

Potenzrechnung - Grundbegriffe

Dienstag, 17. September 2019

Potenzen Grundbegriffe, gerade und ungerade Potenzen, negative Exponenten

Beispiele: 2^3 ; 3^4 ; 5^{-1} ; $4^{\frac{2}{3}}$

Grundbegriffe: a^b — Exponent
 a — Basis

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{b\text{-mal}}$

Beispiele: $(-5)^n = \begin{cases} 5, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -5, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Potenzgesetze

Dienstag, 17. September 2019

Lernziel: Potenzgesetze kennen, mit Potenzen rechnen können, Potenzgesetze anwenden

Potenzgesetze: I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II $a^m : a^n = a^{m-n}$

III $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Beispiele: $2^4 \cdot 2^3 = 2^7$
 $(2^2)^3 = 2^6$

negative Exponenten: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Beispiele: $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$; $10^{-12} \text{ m} = \frac{1}{10^{12}} \text{ m}$

Übungen zur Potenzrechnung 1

Dienstag, 17. September 2019

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

$$(a) \quad ((-2)^{-2})^3 = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$(b) \quad ((-2)^3)^{-2} = \text{siehe (a)}$$

$$(c) \quad (-2^3)^{-2} = (-8)^{-2} = \frac{1}{(-8)^2} = \frac{1}{64}$$

$$(d) \quad (-2^3)^3 = (-8)^3 = -8^3 = -512$$

$$(e) \quad (-2)^{3^2} = (-2)^9 = -2^9 = -512$$

$$(f) \quad (2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$$

Übungen zur Potenzrechnung 2

Dienstag, 17. September 2019

Geben Sie die gegebenen Terme bzw. die Ergebnisse mit positiven Exponenten an.

a) $(a + b)^{-1}$ b) $\frac{3x^4}{6x^{-3}}$

c) $(x^2y^{-3})^{-2}(x^{-2}y^3)^2$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \left(\frac{9}{4}\right)^{-3}$

Wurzelrechnung

Dienstag, 17. September 2019

Lernziel: Definition der n-ten Wurzel, Gesetze zur Wurzelrechnung kennen, mit Wurzeln rechnen können

$\sqrt{2}$ = Welche Zahl gibt mit sich selber multipliziert 2 ?

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ denn } 2^3 = 8$$

$\sqrt[n]{x}$: n-te Wurzel

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

Zusammenhang Wurzeln $\leftrightarrow$ Potenzen
 $\rightarrow$ Potenzgesetze sind anwendbar

Beispiel: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$

$$4^{0,2} = 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$$

$$5^{-0,1} = \frac{1}{5^{0,1}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{5}}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[2]{4} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Teilweise Radizieren:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

$$(a) 7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^{-2} = \underline{7^6}$$

$$(b) \frac{1}{16} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{64} = \frac{1}{2^4} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2^6} = 2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^2 = \underline{4}$$

$$(c) 3^{-1/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{-\frac{3}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12}} = 3^{\frac{7}{12}} = \underline{\sqrt[12]{3^7}}$$

$$(d) 3^{-1/4} : 3^{1/2} : 3^{1/3} = 3^{-\frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{4}{12}} = 3^{-\frac{13}{12}} = \frac{1}{3^{\frac{13}{12}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt[12]{3^{13}}}}$$

$$(e) \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{4}{3}}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} = \underline{\sqrt[3]{2}}$$

$$(f) \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[2]{7^{-3}}} = \sqrt[3]{7 \cdot 7^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{7^{-\frac{1}{2}}} = (7^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \underline{\frac{1}{\sqrt[6]{7}}}$$

$$(g) \sqrt[7]{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{25}} = 5^{\frac{1}{7}} \cdot 25^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{7}} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{21} - \frac{14}{21}} = 5^{-\frac{11}{21}} = \underline{\frac{1}{\sqrt[21]{5^{11}}}}$$

Übungen zur Potenz- und Wurzelrechnung 2

Dienstag, 17. September 2019

Soweit wie möglich vereinfachen:

a) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$ b) $\sqrt[5]{x} : \sqrt{x}$

$$(a) (3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 2 - 25 \cdot 3 = -57$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(b) x^{\frac{1}{5}} : x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{10} - \frac{5}{10}} = x^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Übungen zur Potenz- und Wurzelrechnung 3

Dienstag, 17. September 2019

Nenner rational machen:

a) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+y}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(a) \frac{\sqrt{x^2-y^2} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x^2-y^2} \cdot \sqrt{x+y}}{x+y}$$

$$\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x-y)(\cancel{x+y})}{(\cancel{x+y})}} = \sqrt{x-y}$$

$$(b) \frac{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-1)}} = \sqrt[3]{x-1}$$

Zusatzübungen

Dienstag, 17. September 2019

09:34

$$\sqrt{75} + \sqrt{100} = \sqrt{3 \cdot 25} + \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 5 \cdot (2 + \sqrt{3})$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{108} = \sqrt{2 \cdot 36} - \sqrt{3 \cdot 36} = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} = 6(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$\frac{1}{27} \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^{-3} \cdot 3^2 \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$5^{-\frac{1}{2}} : 25^{0,2} = 5^{-\frac{1}{2}} : (5^2)^{0,2} = 5^{-0,5-0,4} = 5^{-\frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{5^9}}$$

$$\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[5]{9}} = \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[5]{3^2}} = (3 \cdot 3^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{20}} = \sqrt[20]{3^7}$$

$$\frac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{2x(x+y)}}{x+y} = \frac{\sqrt{2x^2 - 2xy}}{x+y}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 5 + 3\sqrt{5}}{15} = \frac{10\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{15}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Der Logarithmus

Dienstag, 17. September 2019

Lernziel: Definition des Logarithmus kennen, Rechenregeln für Logarithmen kennen, mit Logarithmen rechnen können, Basiswechsel, Schreibweisen für besondere Logarithmen kennen

$$2^x = 8 \rightarrow x = \log_2 8 = 3$$

$$TR: \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$a^x = b \rightarrow x = \log_a b$$

Definition des Logarithmus
 $a, b > 0$

„Logarithmus zur Basis a von b “

Rechenregeln: I $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

II $\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$

III $\log_a u^n = n \cdot \log_a u$

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$$

$$\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$$

$$\log_5(125^4) = 4 \cdot \log_5(125) = 4 \cdot 3 = 12$$

Besondere Schreibweisen: $\log_2 x = \lg x$

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$\log_e x = \ln x$$

$e \approx 2,718...$
„Eulerzahl“

Übungen zum Logarithmus 1

Dienstag, 17. September 2019

Berechnen sie die folgenden Logarithmen:

a)	$\log_2 8 = 3$	$\log_3 81 = 4$	$\log_5 125 = 3$	$\log_2 0,125 = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$
	$\lg 1000 = 3$	$\lg 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$	$\ln e^4 = \log_e e^4 = 4$	$\log_{16} 256^{12} = 12 \cdot \log_{16} 256 = 12 \cdot 2 = 24$

- b) Wie berechnen sie $\log_2 7$ mit einem (alten) Taschenrechner?

$$\frac{\log 7}{\log 2}$$

Wie könnte man $\log_2 24$ etwas vereinfachen?

$$\log_2 (8 \cdot 3) = \log_2 8 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3$$

Übungen zum Logarithmus 2

Dienstag, 17. September 2019

(a) Bestimmen Sie (ohne Taschenrechner):

$$\ln(e^2) = 2 \cdot \ln e = 2 \log_e e = 2$$

$$e^{\ln(e)} = e$$

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$e^{\ln(3)} = 3$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \ln e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \ln(3e^k) &= \ln 3 + \ln e^k \\ &= \ln 3 + k \cdot \ln e = \ln 3 + k \end{aligned}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a u$$

(b) Zerlegen Sie soweit wie möglich in einzelne Logarithmen:

$$\text{i.) } \log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3}a^4}{9}\right) = \log_3 \sqrt[3]{3}a^4 - \log_3 9 = \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_3 a^4 - 2 = \frac{1}{3} + 4 \log_3 a - 2 = 4 \log_3 a - \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ii.) } \log_4\left(\frac{16x}{\sqrt{2}}\right)^6 &= 6 \log_4\left(\frac{16x}{\sqrt{2}}\right) = 6[\log_4(16x) - \log_4 \sqrt{2}] = 6[\log_4 16 + \log_4 x - \log_4 \sqrt{2}] \\ &= 6[2 + \log_4 x - \log_4(2^{\frac{1}{2}})] = 6[2 + \log_4 x - \frac{1}{4}] = \\ &= \frac{21}{2} + 6 \log_4 x \end{aligned}$$

(c) Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen und berechnen das Ergebnis (ohne Taschenrechner):

$$\text{i.) } \lg(5) - 2 \lg(5) + \lg(30) - \lg(6) \stackrel{5 \cdot 6}{=} -\lg 5 + \lg 5 + \lg 6 - \lg 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii.) } \frac{1}{2} \lg(81) - \lg(2) - 2 \lg(3) + \lg(20) &\stackrel{2 \cdot 10}{=} \frac{1}{2} \cdot \lg 3^4 - \lg 2 - 2 \lg 3 + \lg 2 + \lg 10 \\ &= 2 \lg 3 - \lg 2 - 2 \lg 3 + \lg 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

Übungen zum Logarithmus 3

Dienstag, 17. September 2019

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \log_8(2\sqrt{24}) &= \log_8(2 \cdot \sqrt{4 \cdot 6}) = \log_8(4\sqrt{6}) = \log_8 4 + \log_8 \sqrt{6} \\
 &= \log_8 2^2 + \log_8 6^{\frac{1}{2}} = 2\log_8 2 + \frac{1}{2}\log_8 6 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\log_8 6 \\
 \log_{100}(10\sqrt{1000}) &= \log_{100} 10 + \log_{100} \sqrt{1000} \\
 &= \log_{100} \sqrt{100} + \log_{100} 1000^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{100} 1000 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{100} (100 \cdot 10) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\log_{100} 100 + \log_{100} 10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\
 \log_a(u : v) &= \log_a u - \log_a v \\
 \log_a u^n &= n \cdot \log_a u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_9(27\sqrt{3}) &= \log_9 27 + \log_9 \sqrt{3} = \log_9(3 \cdot 3) + \log_9 3^{\frac{1}{2}} = \log_9 3 + \log_9 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_9 3 = \\
 &= 1 + \log_9 3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \log_9 3^{\frac{1}{2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{1\frac{3}{4}}}
 \end{aligned}$$

Terme so weit wie möglich zerlegen:

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \log \frac{ab}{cd} &= \log ab - \log cd = \log a + \log b - (\log c + \log d) = \log a + \log b - \log c - \log d \\
 \text{c) } \log \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} &= \log(a^2+b^2) - \log(a^2-b^2) = \log(a^2+b^2) - \log[(a+b)(a-b)] = \log(a^2+b^2) - \log(a+b) - \log(a-b) \\
 \text{d) } \log \left(\frac{x^3}{y^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2x}{3b^3}} \right) &= \log \frac{x^3}{y^2} + \log \left(\frac{a^2x}{3b^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \log x^3 - \log y^2 + \frac{1}{2} [\log a^2x - \log 3b^3] = \\
 &= 3\log x - 2\log y + \frac{1}{2} [2\log a + \log x - (\log 3 + 3\log b)] \\
 &= 3\log x - 2\log y + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log b \\
 &= \frac{13}{2}\log x - 2\log y + \frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log b
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \log \frac{x^9 \sqrt[5]{(z-y)^4 y^3}}{y^7 \sqrt[7]{(z-y)^5 x^{12}}} (xz^2)^5$$

Kleiner Zwischentest

Dienstag, 17. September 2019

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

1. Binomische Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a) $\frac{2x^2 - 12xy + 18y^2}{4y^2 - 4x^2} =$

b) $\frac{48a^2 - 75b^2}{9a - 15b} =$

2. Gleichungen

Welche reellen Lösung besitzen die folgenden Gleichungen?

a) $x^5 - 3x^3 + x = 0$

b) $t^2 - 13t + 36 = 0$ (Satz von Vieta anwenden)

3. Funktionen

Welche Nullstellen und welches Symmetrieverhalten hat die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

4. Potenzgesetze und Wurzeln

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich!

a) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9^{-3}}} =$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} =$

c) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} =$

5. Logarithmus

a) Berechnen Sie:

$\log_2 32 =$	$\log_2 0,25 =$	$\log_2 \sqrt[3]{2} =$
---------------	-----------------	------------------------

$\log_5 625 =$	$\log_3 \frac{1}{27} =$	$\log_3 \sqrt[5]{9} =$
----------------	-------------------------	------------------------

b) $\log \left(\frac{x^2}{y^5} \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} \right) =$

Kleiner Zwischentest

Dienstag, 17. September 2019

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

1. Binomische Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$a) \frac{2x^2 - 12xy + 18y^2}{4y^2 - 4x^2} = \frac{2(x^2 - 6xy + 9y^2)}{4(y^2 - x^2)} = \frac{2(x-3y)^2}{4(y-x)(y+x)} = \frac{(x-3y)^2}{2(y-x)(y+x)}$$

$$b) \frac{48a^2 - 75b^2}{9a - 15b} = \frac{3(16a^2 - 25b^2)}{3(3a - 5b)} = \frac{3(4a-5b)(4a+5b)}{3(3a-5b)}$$

2. Gleichungen

Welche reellen Lösung besitzen die folgenden Gleichungen?

$$a) x^5 - 3x^3 + x = 0$$

$$x(x^4 - 3x^2 + 1) = 0$$

$$b) t^2 - 13t + 36 = 0 \quad (\text{Satz von Vieta anwenden})$$

$$b) (t-4)(t-9) = 0$$

$$t_1 = 4; t_2 = 9 \quad \mathbb{L} = \{4; 9\}$$

$$\text{Subst. } u = x^2$$

$$u^2 - 3u + 1 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Resubst.: } x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; x_4 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$x_5 = 0$$

$$\mathbb{L} = \dots$$

3. Funktionen

Welche Nullstellen und welches Symmetrieverhalten hat die Funktion

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -\underbrace{(x^3 - 4x)}_{f(x)} = -f(x)$$

→ Punktsymmetrie zum NU

$$f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0; x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 2$$

$$N_1(-2|0) \quad N_2(0|0) \quad N_3(2|0)$$

4. Potenzgesetze und Wurzeln

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich!

$$a) \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9^{-3}}} = \sqrt[3]{9 \cdot 9^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{9^{-\frac{1}{2}}} = (9^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 9^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{9}}$$

$$b) \sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{(7^2)^{\frac{1}{3}}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

$$b) \sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{(7^2)^{\frac{1}{3}}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

$$c) \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$$

5. Logarithmus

a) Berechnen Sie:

$$\log_2 32 = 5 \quad \log_2 0,25 = -2 \quad \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$$

$$\log_5 625 = 4 \quad \log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad \log_3 \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \log_2 0,25 &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 \\ &= \log_2 4^{-1} = \log_2 2^{-2} \\ \log_3 \sqrt[5]{9} &= \log_3 9^{\frac{1}{5}} = \\ &= \log_3 (3^2)^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

$$b) \log \left(\frac{x^2}{y^5} \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} \right) = \log \frac{x^2}{y^5} + \log \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} =$$

$$\log x^2 - \log y^5 + \frac{1}{3} \cdot \log \frac{a^6 x}{3b^3} =$$

$$2 \log x - 5 \log y + \frac{1}{3} \cdot (\log a^6 + \log x - \log 3 - \log b^3) =$$

$$2 \log x - 5 \log y + \frac{1}{3} \cdot (6 \log a + \log x - \log 3 - 3 \log b) =$$

$$\underline{2 \log x} - 5 \log y + 2 \log a + \underline{\frac{1}{3} \log x} - \frac{1}{3} \log 3 - \log b$$

$$2\frac{1}{3} \cdot \log x - 5 \log y + 2 \log a - \frac{1}{3} \log 3 - \log b$$