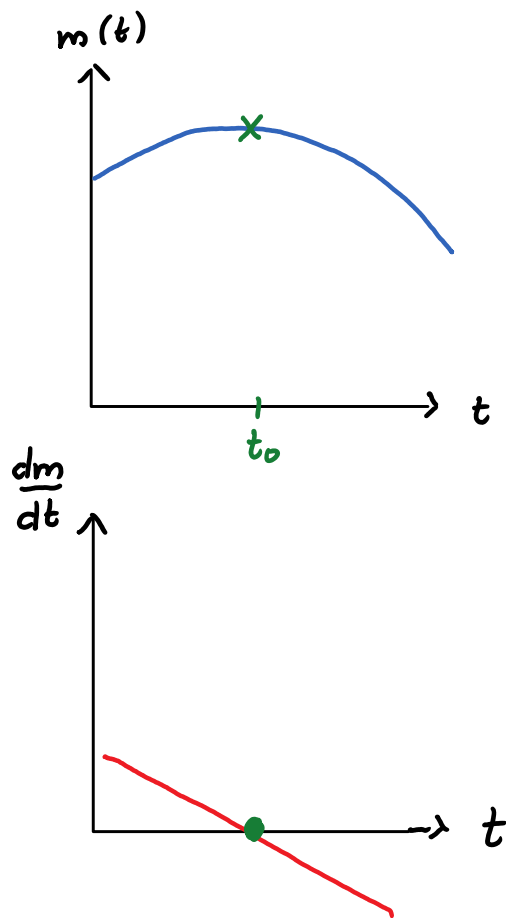


Was ist Differentialrechnung?

Dienstag, 24. September 2019

Beispiel: Masse eines Gletschers als Funktion der Zeit



Ziel der Differentialrechnung:
Eine neue Funktion berechnen, die
das Änderungsverhalten der
Grundfunktion beschreibt.

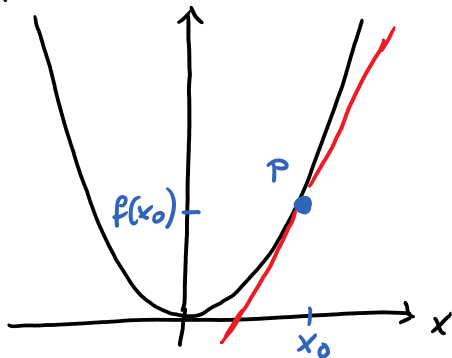
Wo steigt $m(t)$, wo fällt $m(t)$,
wo gibt es Maxima/Minima?

Ableitung einer Funktion

Dienstag, 24. September 2019

Definition der Ableitung, Differentialquotient

$$f(x) = x^2$$

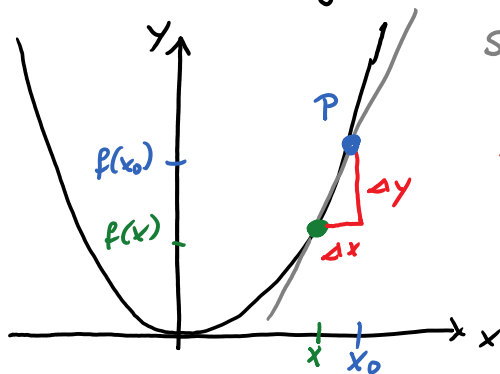


Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

1. Ableitung(sfunktion) von $f(x)$ an der Stelle x_0 .
"Differentialquotient"

Konstruktion der Tangentensteigung:



Secante durch $f(x)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

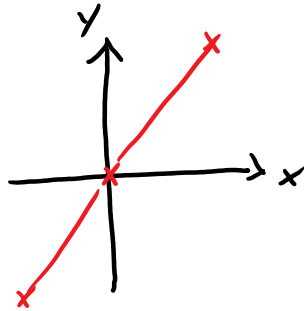
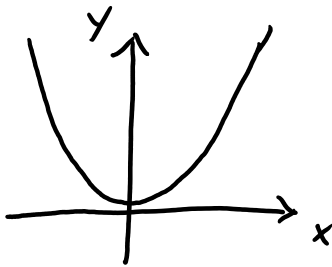
Steigung der Secante

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ableitung elementarer Funktionen

Dienstag, 24. September 2019

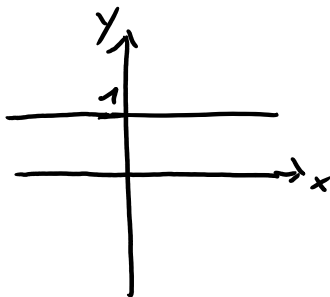
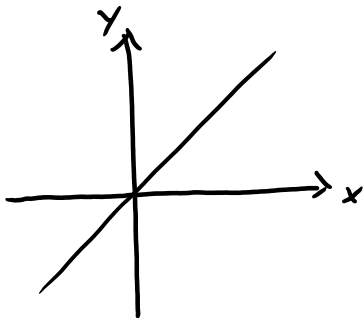
Beispiel: $f(x) = x^2$



$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x$$

Beispiel: $f(x) = x$



$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 1$$

Funktion $f(x)$	Ableitungsfunktion $f'(x)$
x^1	$1 = 1x^0$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

$$x^n$$

$$n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregel :

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregeln für elementare Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = C = \text{const.}$	0
$f(x) = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$\cos x$
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$
$f(x) = a^x$	$\ln a \cdot a^x$
$f(x) = e^x$	e^x
$f(x) = \log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
$f(x) = \ln x$	$\frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	

Faktorregel: Ein konstanter Faktor C bleibt beim Ableiten erhalten.

$$y = C \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = C \cdot f'(x)$$

Beispiel: $f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 = 2$

$f(x) = 3 \cdot \sin x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos x$

Summenregel: $y = f(x) \pm g(x)$

$$y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Beispiel: $f(x) = x^2 + \sin x \rightarrow f'(x) = 2x + \cos x$

Produktregel: $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Quotientenregel: $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Beispiel: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Kettenregel: Ableitung von „verschachtelten Funktion“

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{„Nachdifferenzieren“}$$

Beispiel: $y = \sin(x^2)$

äußere Funktion $f(x)$ innere Funktion $g(x)$

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Rechenbeispiele 1

Dienstag, 24. September 2019

Berechnen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

2. $f(x) = 4x^3$

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

3. $f(x) = 2x + 5x^4 - 1$

$$f'(x) = 2 + 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 + 2$$

4. $f(x) = 2 \cdot \sin x$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos x$$

5. $f(x) = 4x^{-2} - 8x^{-4} + \frac{1}{x} = 4x^{-2} - 8x^{-4} + x^{-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} - 8 \cdot (-4) x^{-5} + (-1) \cdot x^{-2} \\ &= -\frac{8}{x^3} + \frac{32}{x^5} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-8x^2 + 32 - x^3}{x^5} \end{aligned}$$

1. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 4x^{-1} + 4x^{-2} + 4x^{-3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4 \cdot x^{-2} - 4 \cdot 2 \cdot x^{-3} - 4 \cdot 3x^{-4} \\ &= -\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^4} \end{aligned}$$

Rechenbeispiele 2

Dienstag, 24. September 2019

$$1. f(x) = \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{h(x)}$$

$$2. f(x) = \tan x$$

$$3. f(x) = x^2 \cdot e^x + x \cdot \ln x$$

$$4. f(x) = \frac{\underbrace{2x^3}_{g(x)}}{\underbrace{\cos x}_{h(x)}} + \frac{x^2}{x-1}$$

$$5. f(x) = \frac{x^3 + 2x}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x - 2}$$

$$6. f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$7. f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{2x+1}}$$

$$8. f(x) = \sin(x^2 + 2x + 1)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos x = 2(\sin x + x \cdot \cos x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$5. f'(x) = \frac{(3x^2 + 2) \cdot (x^2 + x - 2) - (x^3 + 2x) \cdot (2x + 1)}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$\frac{3x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x^2 + 2x - 4 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x}{[(x-1)(x+2)]^2} =$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 4}{[(x-1)(x+2)]^2}$$

$$6. f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7. f(x) = x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$y = f(g(x)) \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \cos(x^2 + 2x + 1) \cdot (2x + 2)$$

$$\text{Beispiel: } f(x) = \sqrt[4]{(2x+1)^{-1}} = (2x+1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} (2x+1)^{-\frac{5}{4}} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2x+1)^{\frac{5}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt[4]{(2x+1)^5}}$$

$$f(x) = \ln(x^2)$$

$$\therefore \frac{1}{x} \cdot 2x = 2$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} \\ g(x) = 2x-1$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2}{x}}}$$

$$f(x) = 3^{x^2}$$

$$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x^2} \cdot 2x$$

$$f(x) = 3^{h(x)}$$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = x^2 \quad h'(x) = 2x$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

$$(3^x)^2 = 3^x \cdot 3^x = 3^{2x}$$

Kombination von Ableitungsregeln

Mittwoch, 25. September 2019

Beispiele 1: $f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)$

Kettenregel: $f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot$

$$= \cos\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)$$

$$N \cdot A Z - Z \cdot A N$$

$$\frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2}$$

Quotientenregel

Rechenbeispiele 1

Dienstag, 24. September 2019

(a) Bestimmen Sie die Ableitung jeweils auf zwei Arten:

- Zuerst mit der Kettenregel (und dann ggf. ausmultiplizieren).
- Zuerst ausmultiplizieren (binomische Formeln), dann mit passenden Regeln differenzieren.

i.) $f(x) = (2x^4 - 3x)^2$ i.) $g(x) = x^2$ $h(x) = 2x^4 - 3x$ $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
 $f'(x) = 2(2x^4 - 3x) \cdot (8x^3 - 3)$

ii.) $f(x) = (2x - 3x^2)^3$ ii.) $g(x) = x^3$ $h(x) = 2x - 3x^2$
 $f'(x) = 3(2x - 3x^2)^2 \cdot (2 - 6x)$

iii.) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$
 $= (2x+1)^{-2}$ iii.) $g(x) = x^{-2}$ $h(x) = 2x+1$
 $f'(x) = -2(2x+1)^{-3} \cdot 2 = -\frac{4}{(2x+1)^3}$

Rechenbeispiele 2

Mittwoch, 25. September 2019

(b) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Ableitungsfunktion, benennen Sie die verwendeten Ableitungsregeln:

i.) $f(x) = x^2 + \sin(x)$ $f'(x) = 2x + \cos x$

ii.) $f(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

iii.) $f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$

$f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{x} + \sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

iv.) $f(x) = \sin^2(x)$

$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$

v.) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x-1}$

$f'(x) = \frac{\cos x (x-1) - \sin x}{(x-1)^2}$

vi.) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

vii.) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$

viii.) $f(x) = \cos(x^2 + 2x)$

ix.) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x^2}}{2x}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n x^{n-1}$

$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Rechenbeispiele 3

Mittwoch, 25. September 2019

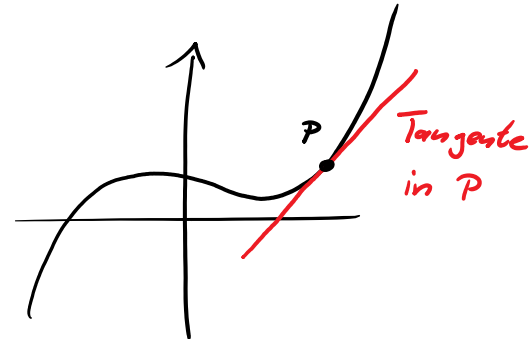
- a) In welchen Punkten der Kurve mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ verlaufen die Tangenten parallel zur Gerade $y = \frac{1}{4}x - 2$?
- b) Bestimmen Sie für die Funktion $y = 5 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$ alle Kurvenpunkte mit einer Tangente parallel zur x-Achse.

$$a) y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{5}{4} \rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

in die Funktionsgleichung einsetzen ergibt die Koordinaten der Punkte



$$b) y' = 6x - \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = 6x - 2x^3 = 2x(3 - x^2) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}$$

$$P_1(0|5)$$

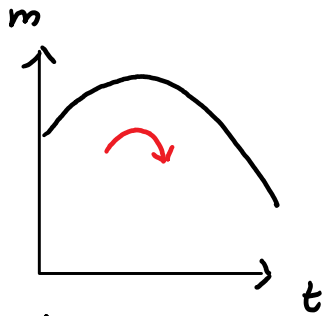
$$P_2(-\sqrt{3}|\frac{19}{2})$$

$$P_3(\sqrt{3}|\frac{19}{2})$$

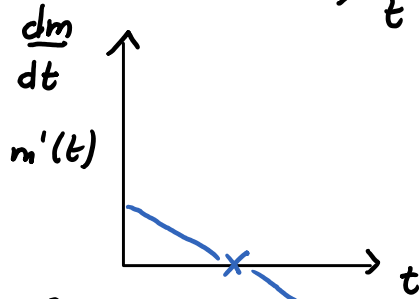
$$y_1 = 5; y_{2/3} = 5 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^4 = 5 + 9 - \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

Höhere Ableitungen

Mittwoch, 25. September 2019

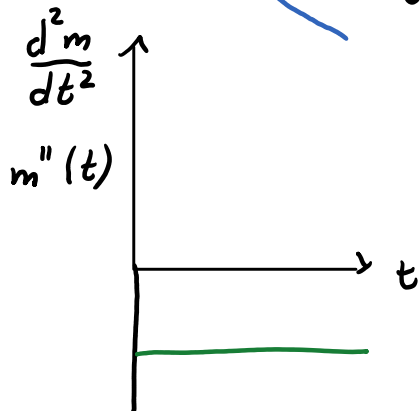


Massefunktion $m(t)$
eines Gletschers



1. Ableitung
der Massefunktion

Steigungsverhalten
von $m(t)$



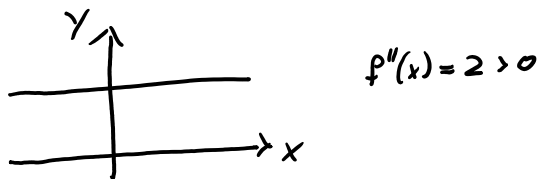
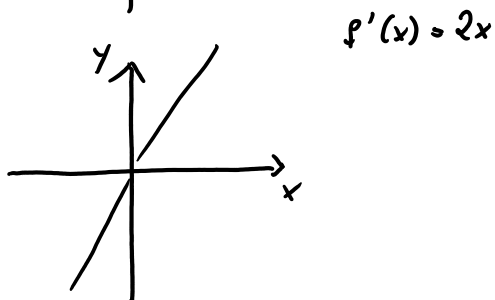
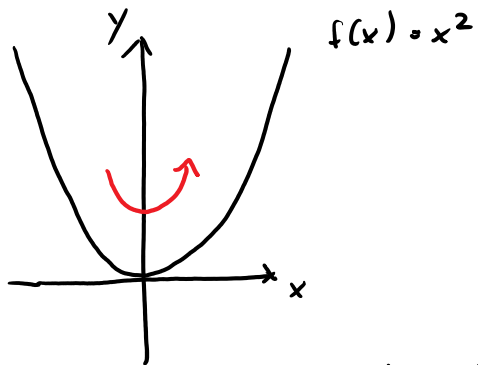
2. Ableitung
der Massefunktion

Krümmungsverhalten
von $m(t)$

Anwendungsbeispiel

Mittwoch, 25. September 2019

Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2x + 1$ und die zugehörigen 1. und 2. Ableitungen. Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$?



Da $f''(x) > 0$ ist, gilt
 $f(x)$ ist linksgekrümmt
(Drehsinn gegen den Uhrzeiger)
Also: $f(x)$ steigt immer schneller

Monotonie und Krümmung einer Funktion

Mittwoch, 25. September 2019

$f(x)$



$f'(x)$

$$f'(x) > 0$$

$f(x)$ streng monoton
wachsend



$$f'(x) < 0$$

$f(x)$ streng monoton
fallend

Monotonieverhalten
(von $f(x)$)

$f(x)$



$f''(x)$

$$f''(x) < 0$$

$f(x)$ rechtsgekrümmt



$$f''(x) > 0$$

$f(x)$ linksgekrümmt

Krümmungsverhalten
(von $f(x)$)

Anwendungsbeispiel

Mittwoch, 25. September 2019

Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2x + 1$ und deren Vorzeichentabellen für die 1. und 2. Ableitungen. Welche Bedeutung haben diese Vorzeichentabellen?

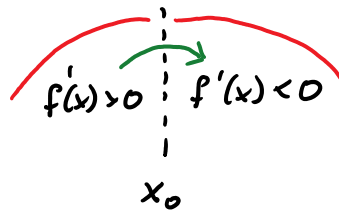
Charakteristische Kurvenpunkte

Mittwoch, 25. September 2019

$f'(x_0) = 0 \rightarrow f(x)$ hat bei x_0 eine waagrechte Tangente

1. Möglichkeit: $f'(x_0) : VZW +/-$

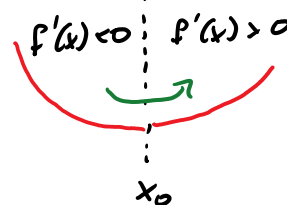
$f(x)$ hat (lokales) Maximum



rechtsgekrümmt
 $f''(x) < 0$

2. Möglichkeit: $f'(x_0) : VZW -/+$

$f(x)$ hat (lokales) Minimum



linksgekrümmt
 $f''(x) > 0$

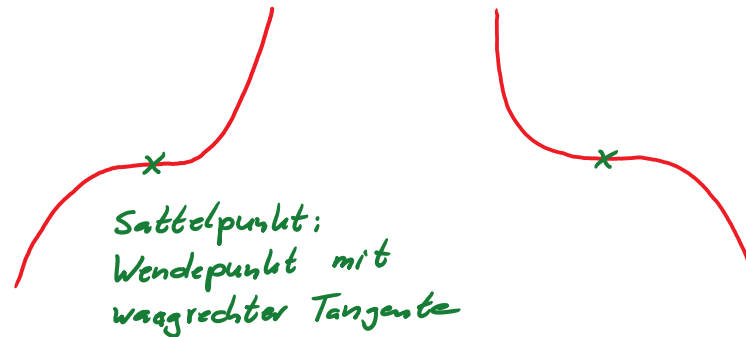
Identifikation charakteristischer Kurvenpunkte:

(lokales) Maximum	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$ oder VZW von $f'(x_0) +/-$
(lokales) Minimum		$f''(x_0) > 0$ oder VZW von $f'(x_0) -/+$

Grund-
voraussetzung

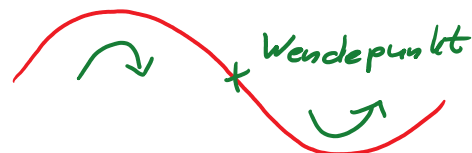
Terassenpunkte / Sattelpunkte:

- ① $f'(x_0) = 0$
- ② $f''(x_0) = 0$
- ③ $f'''(x_0) \neq 0$



Wendepunkte:

- ① $f''(x_0) = 0$
- ② $f'''(x_0) \neq 0$



Anwendungsbeispiele 1

Mittwoch, 25. September 2019

Wo besitzen die Funktionen relative Extremwerte?

- a) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$
- b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$
- c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Identifikation charakteristischer Kurvenpunkte:

(lokales) Maximum	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$ oder VZW von $f'(x_0)$ +/ - $f''(x_0) > 0$ oder VZW von $f'(x_0)$ -/+
(lokales) Minimum		

Grund-
voraussetzung

$$c) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$1 - \ln x = 0 \quad | + \ln x$$

$$\ln x = 1$$

$$e^{\ln x} = e^1$$

$$x_0 = e \approx 2,718$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{-3x + 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-3 + 2 \cdot \ln x}{x^3}$$

$$-3 + 2 \cdot \ln e = -1 \Rightarrow f''(x=e) < 0$$

$\Rightarrow$ Bei $x_0 = e$ hat $f(x)$ ein Maximum

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{Max}(e | \frac{1}{e})$$

Identifikation charakteristischer Kurvenpunkte:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

(lokales) Maximum	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$ oder VZW von $f'(x_0)$ +/ - $f''(x_0) > 0$ oder VZW von $f'(x_0)$ -/+
(lokales) Minimum		

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x) = 0 \rightarrow x_0 = 1$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (x - 1) - e^{-x} = e^{-x} \cdot [(x - 1) - 1]$$

$$= e^{-x} \cdot (x - 2)$$

$$f''(x=1) = e^{-1} \cdot (1 - 2) = -\frac{1}{e} < 0 \quad \left. \vphantom{f''(x=1)} \right\} \text{Max}(1 | \frac{1}{e})$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{14x(x-1)}{x-4} = \frac{14x^2 - 14x}{x-4} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$f'(x) = \frac{(28x - 14)(x - 4) - (14x^2 - 14x)}{(x - 4)^2} = \frac{28x^2 - 112x - 14x + 56 - 14x^2 + 14x}{(x - 4)^2} = \frac{14x^2 - 112x + 56}{(x - 4)^2}$$

$$14x^2 - 112x + 56 = 0$$

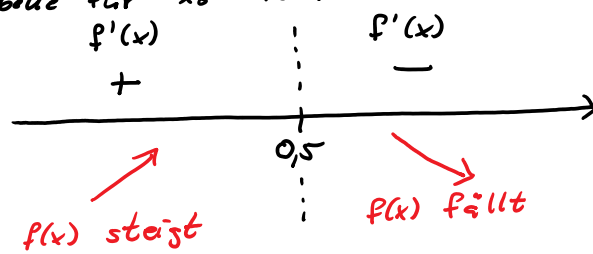
$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{12} = \begin{cases} 7,5 \\ 0,5 \end{cases}$$

Vorzeichentabelle für $x_0 = 0,5$:

$f'(x)$	$\vdots$	$f'(x)$
+	$\vdots$	-

Vorzeichentabelle für $x_0 = 0,5$



$\Rightarrow$ Bei $x = 0,5$ ist ein Maximum.

$$f(0,5) = \frac{14 \cdot 0,5 \cdot (0,5 - 1)}{0,5 - 4} = \frac{7 \cdot (-0,5)}{-3,5} = 1$$

Max(0,5/1)

Anwendungsbeispiele 2

Mittwoch, 25. September 2019

Zeigen Sie, dass die Funktion $V(r), r > 0$ an der Stelle $r=a$ ein Minimum besitzt ($a > 0, D > 0$):

$$V(r) = -D \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Anwendungsbeispiel 3

Mittwoch, 25. September 2019

An den Graphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ wird im Punkt $A(2|y)$ eine Tangente angelegt.
Geben Sie die Geradengleichung der Tangenten an!

Kurvendiskussion

Mittwoch, 25. September 2019

- 1 Definitionsmenge
- 2 Nullstellen
- 3 Schnittpunkte mit der y-Achse
- 4 Symmetrieverhalten
- 5 Verhalten im Unendlichen / Polstellen
- 6 Hochpunkte / Tiefpunkte
- 7 Wendepunkte / Sattelpunkte
- 8 Wertemenge
- 9 Funktionsgraph

Kurvendiskussion 1

Mittwoch, 25. September 2019

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Kurvendiskussion 2

Mittwoch, 25. September 2019

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = 2 \sin(x) + 1$.

Kurvendiskussion 3

Mittwoch, 25. September 2019

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$.

① $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

② $f(x) = 0 \quad -5x^2+5=0 \quad | :(-5) \quad N_1(-1|0)$
 $x^2-1=0 \quad N_2(1|0)$
 $x_1 = -1; x_2 = 1$

③ $f(0) = \downarrow$ kein Schnittpunkt mit der y-Achse

④ $f(-x) = \frac{-5(-x)^2+5}{(-x)^3} = \frac{-5x^2+5}{-x^3} = -\frac{-5x^2+5}{x^3} = -f(x)$ Punktsymmetrie zum Ursprung

⑤ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{5}{-0} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ Polstelle 1. Ordnung mit VZW

⑥ $f'(x) = \frac{-10x \cdot x^3 - (-5x^2+5) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-10x^4 + 15x^4 - 15x^2}{x^6} = \frac{5x^4 - 15x^2}{x^6} = \frac{5x^2 - 15}{x^4} = 0$

$5x^2 - 15 = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = \frac{10x \cdot x^4 - (5x^2-15) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{10x^5 - 20x^5 + 60x^3}{x^8} = \frac{-10x^5 + 60x^3}{x^8} = \frac{-10x^2 + 60}{x^5}$

$f''(\sqrt{3}) = \frac{+}{+} > 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}$ ist Minimum

Punktsymmetrie; $x_2 = -\sqrt{3}$ ist Maximum

$f(\sqrt{3}) = \frac{-5 \cdot 3 + 5}{(\sqrt{3})^3} = \frac{-10}{3\sqrt{3}} \quad \text{Min}(\sqrt{3} | -\frac{10}{3\sqrt{3}}) \quad \text{Max}(-\sqrt{3} | \frac{10}{3\sqrt{3}})$

⑦ $f''(x) = 0 \quad -10x^2 + 60 = 0 \quad f'''(x_0) \neq 0$
 $x^2 = 6$

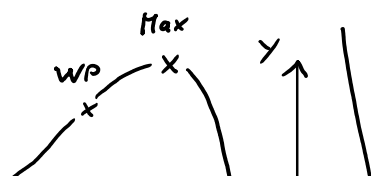
$x_{3/4} = \pm\sqrt{6}$

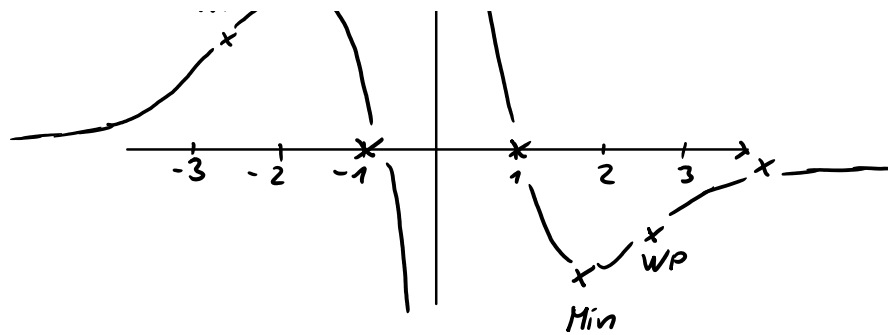
$f(\sqrt{6}) = \frac{-5 \cdot (\sqrt{6})^2 + 5}{(\sqrt{6})^3} = \frac{-25}{6\sqrt{6}}$

$WP_1(\sqrt{6} | -\frac{25}{6\sqrt{6}})$

$WP_2(-\sqrt{6} | \frac{25}{6\sqrt{6}})$

⑧





Kurvendiskussion 4

Mittwoch, 25. September 2019

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9 - x^2}$.

Extremwertaufgaben

Dienstag, 24. September 2019