

Organisatorisches

Mittwoch, 13. September 2017

Dozent

Andreas Hiemer, Email: andreas.hiemer@hs-kempten.de, Raum T322

An wen richtet sich der Kurs?

An alle mit mehr oder weniger großen Lücken im Basis- Mathematikwissen.

Was wird vorausgesetzt?

Keine konkreten Voraussetzungen, grundlegende Mathematikkenntnisse wie Bruchrechnen, Kopfrechnen, einfache algebraische Termumformungen und Gleichungen sollen bekannt sein.

Wann und wo findet der Kurs statt?

13.09.-28.09.2017, jeweils Mo-Fr hier im S0.15

08:00-09:30

09:45-11:15

11:30-13:00

29.09.2017: Basis-Mathematiktest (wer mag!)

Wie lerne ich am besten?

Zuerst Sachwissen aufnehmen, dann an Beispiele und Übungsaufgaben einüben, verstehen und vertiefen.

Wo finde ich den Kurs, Zusatzinformationen und ergänzendes Material?

Auf der Moodle Plattform der Hochschule Kempten (abgeschaltet vom 11.9. - 15.9.)

Kurs: Basismathematik

Inhaltsübersicht nach Themen

Mittwoch, 13. September 2017 10:00

1. Zahlenräume, Mengenlehre und logische Mengenoperationen
2. Arithmetik
3. Gleichungen
4. Logarithmen, Potenz- und Wurzelrechnung (Arithmetik)
5. Funktionen
6. Trigonometrie (Arithmetik)
7. Ungleichungen
8. Vektorrechnung
9. Proportionen
10. Geometrie

Inhalte 1

Mittwoch, 13. September 2017

1. Algebra

Aufbau des Zahlensystems, Termumformungen, Ausmultiplizieren, Faktorisieren, Binome, Brüche, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Komplexe Zahlen, Summen und Reihen

2. Gleichungen

Lineare, quadratische, kubische Gleichungen, Gleichungen n-ten Grades, Ungleichungen, Betrags-, Bruch-, Potenz-, Wurzel-, Exponential- und Logarithmus-Gleichungen, Lineare Systeme

3. Funktionen

Elementare F., Eigenschaften, Graphen

Inhalte 2

Mittwoch, 13. September 2017

4. Differentialrechnung

Ableitung, Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmung, Anwendungen

5. Integralrechnung

Unbestimmtes, bestimmtes Integral, Anwendungen

6. Vektorrechnung

Definition, Addition, skalare Multiplikation, Skalar-, Vektor-, Spat-Produkt

Literatur

Mittwoch, 13. September 2017

Peter Stingl

„Einstieg in die Mathematik für Fachhochschulen“

SK110 S859 E5

Hanser, ISBN 3-446-21950-1

Jürgen Wendeler

„Vorkurs der Ingenieurmathematik“

SK110 W469

Harry Deutsch, ISBN 3-8171-1670-5

Holger Ihrig, Peter Pflaumer

„Finanzmathematik“

QP890 I25

Oldenbourg, ISBN 3-486-57922-2

Zahlenräume

Mittwoch, 13. September 2017

Zahlenräume

Lernziel: Zahlenräume kennen, Schreibweisen für Zahlenräume und Mengen kennen und beherrschen

natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ ist darstellbar } \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$

Beispiele: $\frac{4}{3}$; $1,3$; -2 ; $\frac{1}{3} = 0,3$

reelle Zahlen $\mathbb{R}$, z.B. $\sqrt{2} = 1,414\dots$; π

komplexe Zahlen $\mathbb{C}$; negative Wurzeln aus reellen Zahlen

z.B.: $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{2}i$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$

Mengen, Schreibweisen für Mengen, Intervalle

Mittwoch, 13. September 2017

Lernziel: Schreibweisen für Mengen kennen und beherrschen (aufzählende Schreibweise, Intervallschreibweise, Mengen mit Eigenschaften)

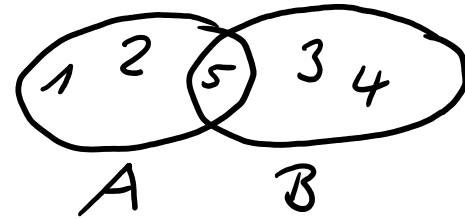
- ① aufzählende Schreibweise $M = \left(1; \frac{4}{3}; -2\right)$ $M = \{-2; 1; \frac{4}{3}\}$
- ② Mengenelemente mit best. Eigenschaften
z.B. $x < 2$ $\mathbb{L} = \{x \mid x < 2\}$
- ③ Intervallschreibweise
- $x < 2$ $x \leq 2$
 $\mathbb{L} =]-\infty; 2[$ $\mathbb{L} =]-\infty; 2]$
- $\mathbb{L} =]3; 6]$

Logische Mengenoperationen 1

Mittwoch, 13. September 2017

Lernziele: Schreibweisen und Operationen für Schnittmengen, Vereinigung von Mengen, Teilmengen

$$A = \{1; 2; 5\} \quad B = \{3; 4; 5\}$$



$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad \text{Vereinigung}$$

$$A \cap B = \{5\}$$

Schnittmenge

$$A \setminus B = \{1; 2\}$$

Mengenausschluss

Anwendungsbeispiel

Mittwoch, 13. September 2017

Seien die Mengen $A = \text{"Menge aller Primzahlen kleiner 15"}$, $B = \mathbb{Q}$, $C = \{-3; 0; \sqrt{2}; \pi\}$ und $D = \mathbb{N}$ gegeben. Bestimmen sie:

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = A \cup \emptyset = A$

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13\}$$

b) $D \setminus (A \cup C) = \{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 17; \dots\}$

$$M = \{ \}$$

c) $(D \setminus B) \cup A = \mathbb{N} \setminus A$
 $= \emptyset \cup A = A$

$$A \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; -3; 0; \sqrt{2}; \pi\}$$

Terme

Mittwoch, 13. September 2017

Was sind Terme und welche Regeln gelten dabei?

Klammern vor Potenzierung vor Punkt vor Strich

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$T(x) = 4x - 3$$

Termumformungen 1 - Zusammenfassen von Termen

Mittwoch, 13. September 2017

Werden bei Termen verschiedene Teile addiert oder subtrahiert, dann können gleichartige Terme zusammengefasst werden.

$$T(x) = 4 + x + x^2 + 2x + 5x^2 + 8 = 12 + 3x + 6x^2$$

$$T(x) = x + 2 \cdot \sin(x) + 3x + 5 \cdot \sin(x) = 4x + 7 \sin(x)$$

Termumformungen 2 - Ausmultiplizieren

Mittwoch, 13. September 2017

Lernziele: Klammern mit Zahlen oder Variablen multiplizieren, Klammern miteinander multiplizieren

$$T(x) = 5 \cdot (x - 2) = 5x - 10$$

$$\text{Distributivgesetz: } a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$\begin{aligned} T(x) &= 2 \cdot (5x + 4) - 3 \cdot (x^2 + 2x) \\ &= 10x + 8 - 3x^2 - 6x = 8 + 4x - 3x^2 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren Übungsaufgaben

Mittwoch, 13. September 2017

Multiplizieren Sie die Terme aus

(a) $(3a + b)(4 - a) = 12a - 3a^2 + 4b - ab$

(b) $[2 + a)(b - a)](b + 1) = (2b - 2a + ab - a^2)(b + 1) = 2b^2 + 2b - 2ab - 2a + ab^2 + ab - a^2b - a^2$
 $= 2b^2 + 2b - ab - 2a + ab^2 - a^2b - a^2$

(c) $(5x - 3y)(3x - 5y)$

(d) $(5y + 2y^2)(2y^2 - 5y)$

(e) $(a - 2b)(2b - a)(a + 2b)(2b + a)$

Termumformungen 3 - Ausklammern

Mittwoch, 13. September 2017

$$2 \cdot (x - 2) = \cancel{4x} - 4$$

$$5x^2 + 10x + 20 = 5 \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

$$2x \cdot \sin(x) + 7 \cdot \sin(x) = \sin(x) \cdot (2x + 7)$$

Übungsaufgaben Ausklammern

Mittwoch, 13. September 2017

Klammern Sie jeweils den angegebenen Term T aus.

(a) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}; \quad T = \frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}; \quad T = \frac{1}{16}$

(c) $x^3 - 3x + 9; \quad T = 27$

(d) $bx^3 - b^2x - b; \quad T = b$

(e) $x + ax + y + ay; \quad T = x + y$

(f) $-2x^3 - 4x^2 + 10x; \quad T = -2x$

a) $\frac{1}{4}(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1)$ b) $\frac{1}{16}(x^2 - 2x + 4)$

c) $27 \cdot (\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3})$

d) $b \cdot (x^3 - bx - 1)$

e) $x + y + ax + ay = (x + y) + a(x + y) = (x + y) \cdot (1 + a)$

f) $-2x(x^2 + 2x - 5)$

Termumformungen 4 - Binome

Mittwoch, 13. September 2017

Lernziel: Binomische Formeln kennen und anwenden können, Rechnen mit Binomen höherer Ordnung

$$\text{I } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{II } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{III } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Beispiel 1: } (5x+7y)^2 = 25x^2 + 70xy + 49y^2$$

$$\text{Beispiel 2: } 4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$$

$$\text{Beispiel 3: } x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$$

$$\text{Binome: } (a+b)^n \quad (a-b)^n$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \end{array}$$

↗
⑥
①
②
③
④

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a-b)^2 = 1a^2 - 2ab + 1b^2$$

$$(a-b)^3 = 1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$$

$$(a-b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$$

Übungsaufgaben zu den Binomen 1

Mittwoch, 13. September 2017

Multiplizieren Sie die Terme aus und benutzen Sie (wenn möglich) die binomischen Formeln.

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad 7(a-b)^2 + 3(b-a)^2 &= 7 \cdot (a^2 - 2ab + b^2) + 3 \cdot (b^2 - 2ab + a^2) = \\ &= 7a^2 - 14ab + 7b^2 + 3b^2 - 6ab + 3a^2 = 10a^2 - 20ab + 10b^2 \\ &= 10(a^2 - 2ab + b^2) = 10 \cdot (a-b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{(h)} \quad (x-1)^5(x+1)^3$$

$$\text{(i)} \quad (a+b)^4 - (a-b)^2(-a-b)^2$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad &7 \cdot (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + 3(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) \\ &= 7a^3 - 21a^2b + 21ab^2 - 7b^3 + 3b^3 - 9ab^2 + 9a^2b - 3a^3 \\ &= 4a^3 - 12a^2b + 12ab^2 - 4b^3 = 4(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = \underline{4(a-b)^3} \end{aligned}$$

Übungsaufgaben zu den Binomischen Formeln

Mittwoch, 13. September 2017

Verwenden Sie binomische Formeln.

$$(a) \quad 121b^2 + 25a^2 - 110ab = (11b - 5a)^2 \quad \text{oder} \quad (5a - 11b)^2$$

$$(b) \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x + 4y)^2$$

$$(c) \quad 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x - 1)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(d) \quad 72x^2y^4 - 96x^3y^3 + 32x^4y^2 = x^2y^2(72y^2 - 96xy + 32x^2)$$

$$= 8x^2y^2(9y^2 - 12xy + 4x^2)$$

$$= 8x^2y^2(3y - 2x)^2$$

Termumformungen 5 - Bruchterme

Mittwoch, 13. September 2017

Lernziele: Bruchterme kürzen, erweitern, auf einen Hauptnenner bringen, zusammenfassen

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

Hauptnenner bilden: $x(x-1)$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6}$$

$$\text{Erweitern: } \frac{1 \cdot x}{(x-1) \cdot x} + \frac{1 \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1)} = \frac{x + 1 \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

Übungsaufgaben zu Bruchtermen 1

Mittwoch, 13. September 2017

Fassen Sie die Terme zu einem Bruch zusammen. Den Zähler sollten Sie ausmultiplizieren und zusammenfassen, den Nenner nicht unbedingt.

i.)

$$\frac{1}{5a} + \frac{4}{a^2}$$

ii.) HN: $5 \cdot a \cdot a = 5a^2$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Erweitern: $\frac{1 \cdot a}{5a \cdot a} + \frac{4 \cdot 5}{a^2 \cdot 5} = \frac{a + 20}{5a^2}$

ii.)

$$\frac{a^2 + 1}{2a^2} - \frac{a + 1}{3a}$$

iii.) HN: $2 \cdot a \cdot a = 2a^2$ $3a$ $2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$

Erweitern: $\frac{(a^2 + 1) \cdot 3}{(2a^2) \cdot 3} - \frac{(a + 1) \cdot 2a}{(3a) \cdot 2a} =$

iii.)

$$\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{2x^4} + \frac{5}{6x}$$

$$= \frac{3a^2 + 3 - 2a^2 - 2a}{6a^2} = \frac{a^2 - 2a + 3}{6a^2}$$

iv.)

$$\frac{2x - 3}{x^2(x + 1)} - \frac{3 - 4x}{x(x + 1)^2}$$

v.) HN: $3 \cdot x \cdot x = 3x^2$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 2x^4$$

$$2 \cdot 3 \cdot x = 6x$$

$$2 \cdot 3 \cdot x^4 = 6x^4$$

Erweitern: $\frac{2 \cdot 2x^2}{3x^2 \cdot 2x^2} - \frac{4 \cdot 3}{2x^4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot x^3}{6x \cdot x^3} =$

$$\frac{4x^2 - 12 + 5x^3}{6x^4}$$

iv.) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

HN: $x \cdot x \cdot (x + 1)$

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)$$

$$x \cdot x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 \cdot (x + 1)^2$$

Erweitern: $\frac{2x - 3}{x^2(x + 1)} - \frac{3 - 4x}{x \cdot (x + 1)^2} =$

$$\frac{(2x - 3) \cdot (x + 1)}{x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)} - \frac{(3 - 4x) \cdot x}{x \cdot (x + 1)^2 \cdot x} =$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - 3x + 4x^2}{x^2 \cdot (x + 1)^2} = \frac{6x^2 - 4x - 3}{x^2 \cdot (x + 1)^2}$$

Übungsaufgaben zu Bruchtermen 1 (Fortsetzung)

Donnerstag, 14. September 2017

Fassen Sie zu einem Bruchterm zusammen:

$$\frac{4(x-1)}{x(2x-3)} + 2x - \frac{1}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1,5\}$$

$$\text{HN: } \frac{x \cdot (2x-3)}{x \cdot (2x-3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Erweitern: } & \frac{4(x-1)}{x(2x-3)} + \frac{2x \cdot x \cdot (2x-3)}{x \cdot (2x-3)} - \frac{1 \cdot (2x-3)}{x \cdot (2x-3)} = \\ & \frac{4x-4+4x^3-6x^2-2x+3}{x \cdot (2x-3)} = \frac{4x^3-6x^2+2x-1}{x \cdot (2x-3)} \end{aligned}$$

= (Übungsaufgaben zu Bruchtermen 2

Donnerstag, 14. September 2017

Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich:

i.)

$$\frac{144x^3y^4z}{\frac{256x^2y^5}{84z^3}} = 144x^3y^4z \cdot \frac{84z^3}{256x^2y^5} = \frac{36x^2z^4 \cdot 84}{64y} = \frac{3 \cdot 21 \cdot 2^4}{4y} = \frac{189 \cdot 2^4}{4y}$$

Handwritten red notes above the fraction:
 $\frac{y \cdot y \cdot y \cdot y}{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}$

ii.)

$$\left(\frac{24a^2y}{63b^2x^2} : \frac{36ay^2}{50bx^3} \right) : \frac{25a^3x}{84by^2} = \frac{24a^2y}{63b^2x^2} \cdot \frac{50bx^3}{36ay^2} \cdot \frac{84by^2}{25a^3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4y}{1a^2} = \frac{16y}{9a^2}$$

iii.)

$$\left(1 + \frac{a}{b} \right) : \left(1 - \frac{a}{b} \right) = \left(\frac{b}{b} + \frac{a}{b} \right) : \left(\frac{b}{b} - \frac{a}{b} \right) = \left(\frac{a+b}{b} \right) : \left(\frac{b-a}{b} \right) = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{b-a} = \frac{a+b}{b-a}$$

Übungsaufgaben zu Bruchtermen 3

Donnerstag, 14. September 2017

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

i.)

$$\frac{10a^2 + 5a}{5a} = \frac{5a(2a+1)}{5a} = 2a+1$$

ii.)

$$\frac{2a + 6b}{3a + 9b} = \frac{2(a+3b)}{3(a+3b)} = \frac{2}{3}$$

iii.)

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)} = a+b$$

iv.)

$$\frac{342x - 342y}{513(y^2 - x^2)}$$

v.)

$$\frac{1-x}{1-x^3}$$

Übungsaufgaben zu Termen 1

Donnerstag, 14. September 2017

Vereinfachen sie die Terme so weit wie möglich:

a) $62x - 9y - (41x - 11y) - (x - 18y) = 62x - 9y - 41x + 11y - x + 18y$

b) $(a^2 - ab + b^2)(a + b) = 20x + 20y = 20(x + y)$

c) $((2x^2 + y^3)^2 - (2x^2 - y^3)^2)^3$

d) $(3x^2 - 7y^2)^2$

$$(y^3)^2 = y^3 \cdot y^3 = \underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}_{y^6}$$

e) $((4x^4 + 4x^2y^3 + y^6) - (4x^4 - 4x^2y^3 + y^6))^3 =$

$$= (\cancel{4x^4} + 4x^2y^3 + \cancel{y^6} - \cancel{4x^4} + 4x^2y^3 - \cancel{y^6})^3 = (8x^2y^3)^3 = 512x^6y^9$$

d) $9x^4 - 42x^2y^2 + 49y^4$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Übungsaufgaben zu Termen 2

Donnerstag, 14. September 2017

Brüche addieren und soweit wie möglich zusammenfassen:

a) $\frac{z-1}{z} + \frac{3z^2-6z+5}{z^2} - \frac{4z^3-7z^2+5z-5}{z^3}$

b) $\frac{x+6}{(x-3)^2} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{2}{x+3}$

c) $\frac{a^2}{a-b} - \frac{4ab^3}{(a^2-b^2)(a+b)} - \frac{b^2(a-b)}{(a+b)^2}$

b) HN: $(x-3) \cdot (x-3)$

$(x-3) \cdot (x+3)$

$(x+3)$

$(x-3)(x-3)(x+3)$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

Erweitern: $\frac{(x+6) \cdot (x+3)}{(x-3)^2(x+3)} + \frac{x \cdot (x-3)}{(x^2-9)(x-3)} - \frac{2 \cdot (x-3)^2}{(x+3) \cdot (x-3)^2} =$

$\frac{\cancel{1} + \cancel{3}x + \cancel{6x} + \cancel{18} + x^2 - \cancel{3x} - \cancel{2x^2} + \cancel{12x} - \cancel{18}}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{18x}{(x-3)^2(x+3)}$

Übungsaufgaben zu Termen 3

Donnerstag, 14. September 2017

So weit wie möglich vereinfachen:

a) $\frac{a+b}{4a} \cdot \frac{12a}{a+b}$ b) $\left(\frac{4a}{3} + \frac{3b^2}{a^3} + \frac{b}{4a}\right) \cdot \frac{4b}{3a}$

c) $\left(\frac{a^2}{8} + \frac{a}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{24}{a^2} - \frac{9}{a}\right)$ d) $\frac{a^2+1}{a^2-1} : \frac{a+1}{a-1}$

e) $\left(1 - \frac{x-5}{x-1}\right) : \left(\frac{x-1}{x-5} - 1\right)$ f) $\frac{\frac{1}{4x^2-1} + 1}{x - \frac{x}{3(2x+1)}}$

d) $\frac{a^2+1}{\cancel{(a-1)}(a+1)} \cdot \frac{\cancel{(a-1)}}{(a+1)} = \frac{a^2+1}{(a+1)^2}$

f) $\frac{\frac{1}{4x^2-1} + \frac{4x^2-1}{4x^2-1}}{\frac{x \cdot 3(2x+1)}{3(2x+1)} - \frac{x}{3(2x+1)}} = \frac{\frac{4x^2}{4x^2-1}}{\frac{6x^2+3x-x}{3(2x+1)}} = \frac{4x^2}{4x^2-1} \cdot \frac{3(2x+1)}{6x^2+2x} =$

$= \frac{\overset{2x}{\cancel{4x^2}}}{(2x-1)\cancel{(2x+1)}} \cdot \frac{3\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x}(3x+1)} = \frac{6x}{(2x-1)(3x+1)}$

Gleichungen und Äquivalenzumformungen

Donnerstag, 14. September 2017

Bei einer Gleichung gilt, dass zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ gleich sind. Steht x in der 1. Potenz, dann kann man durch sogenannte **Äquivalenzumformungen** x isolieren und so die Lösungsmenge IL der Gleichung bestimmen.

$$\begin{array}{ccc} T_1(x) & T_2(x) & \\ x-3 & = 2x+5 & | +3 \end{array}$$

$$x = 2x + 8 \quad | -x$$

$$0 = x + 8 \quad | -8$$

$$x = -8$$

$$IL = \{-8\}$$

Polynome

Donnerstag, 14. September 2017

Polynome sind Terme, bei denen x in einer bestimmten Potenz vorkommt.

Die höchste Potenz von x bestimmt den Grad des Polynoms. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Gleichungen, in denen nur Polynome vorkommen.

Beispiele: $a \cdot x + b$ Polynom 1. Grades

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Polynom 2. Grades

$a x^3 + b x^2 + c x + d$ Polynom 3. Grades

$\vdots$

$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \dots + d x + e$ Polynom n -ten Grades

Polynome 2. Grades

Donnerstag, 14. September 2017

Lernziel: Polynome 2. Grades faktorisieren und Gleichungen mit Polynomen 2. Grades lösen, Lösungsformel kennen und anwenden können, Satz von Vieta

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Lösungsformel für quadrat. Gleichungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$ „Diskriminante“

3 Fälle: 1. Wenn $D > 0$: 2 Lösungen

2. Wenn $D = 0$: 1 Lösung

3. Wenn $D < 0$: keine Lösung (in $\mathbb{R}$)

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Polynome 2. Grades faktorisieren - Satz von Vieta

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel: $3x^2 + 6x = 0$

$$3x(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -2$$

$$L = \{-2; 0\}$$

Sonderfall „ $c=0$ “

→ keine Lösungsformel,
sondern x ausklammern

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x_{1/2} = -1$$

$$L = \{-1\}$$

Sonderfall „binomische Formel“

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{matrix} \quad L = \{-3; -1\}$$

Satz von Vieta: „Nullstellen raten“

$$x^2 + \textcircled{4}x + \textcircled{3} = (x + \underline{x_1})(x + \underline{x_2}) = (x + 3)(x + 1) = 0$$

↑ muss das Produkt aus x_1 und x_2 sein
↑ muss die Summe aus x_1 und x_2 sein

Beispiel: $(x-2)(x+5) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3x - 10$

Satz von Vieta: 2 Möglichkeiten: Entweder $x_1 = -2, x_2 = 5$
oder $x_1 = 2; x_2 = -5$

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5) \quad \text{Nullstellen: } x_1 = 2; x_2 = -5$$

Übungen zu den Polynomen 2. Grades

Donnerstag, 14. September 2017

Faktorisieren sie die folgenden Polynome. Wenden sie dabei das geeignetste Verfahren an!

a) $3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$

b) $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

c) $3x^2 + 2x - 1 = 3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$

Satz von Vieta
 $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ -1 \end{array} \right.$

d) $x^2 + 4x + 3$

$3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$

e) $6x^2 + x - 2$

f) $7x^2 - 21x$

d) $(x + 1)(x + 3)$

g) $4x^2 - 12x - 40$

f) $7x(x - 3)$

h) $36x^2 + 108x + 81$

g) $4x^2 - 12x - 40 = 4(x^2 - 3x - 10)$

i) $4x^2 - 16x + 16$

$= 4(x + 2)(x - 5)$

h) $9(4x^2 + 12x + 9) = 9(2x + 3)^2$

Polynome 3.Grades

Donnerstag, 14. September 2017

Lernziel: Mit Polynomen 3.Grades umgehen können, Gleichungen mit Polynomen 3. Grades lösen, Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Sonderfall $d=0$: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

→ Polynom 2. Grades

Sonst: Polynomdivision

Polynome 3.Grades - Polynomdivision

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

1. Nullstelle raten, Zahlen von -3 bis +3 einsetzen

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

2. Polynomdivision starten:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$\underline{-5x^2 + 11x - 6}$$

$$\underline{-(-5x^2 + 5x)} \quad \underline{-(-5x^2 + 5x)}$$

$$\underline{6x - 6}$$
$$\underline{-(6x - 6)}$$
$$\underline{\quad \quad}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$L = \{1; 2; 3\}$$

Polynome 3.Grades - Polynomdivision

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

1. Nullstelle raten: $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0 \quad \checkmark$

2. Ansatz & Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1) = x^2 - 1x - 2$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ -(x^3 - x^2) \quad \downarrow \downarrow \\ \hline -x^2 - x + 2 \\ -(-x^2 + x) \\ \hline -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$= (x - 2)(x + 1)$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x + 1) \quad \mathbb{L} = \{-1; 1; 2\}$$

Polynome 4.Grades

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel: $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Substitution : $u = x^2$

$$u^2 + 4u + 3 = 0$$

$$(u + 3)(u + 1) = 0$$

$$u_1 = -3 ; u_2 = -1$$

$$u = \{ \}$$

$$1. -3 = x^2$$

$$x_{1/2} = \sqrt{-3}$$

$$2. -1 = x^2$$

$$x_{3/4} = \sqrt{-1}$$

Polynome 4.Grades

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel: $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

Subst.: $u = x^2$

$$u^2 - 3u - 10 = 0$$

$$(u + 2)(u - 5) = 0$$

$$u_1 = -2; u_2 = 5$$

Rücksubst.: $-2 = x^2$

$$x_{1,2} = \sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$$

$$L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

Merke: Polynome n-ten Grades
haben maximal
n Nullstellen.

$$5 = x^2$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{5}$$

Übungen zu den Polynomen höherer Ordnung

Donnerstag, 14. September 2017

Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

- a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ $x_1 = 4$
b) $-2x^3 + 20x^2 - 24x - 144$
c) $3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

a) $(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : (x - 4) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 4x^2) \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline -5x^2 + 26x - 24 \\ -(-5x^2 + 20x) \\ \hline 6x - 24 \\ -(6x - 24) \\ \hline - \quad - \end{array}$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 4)(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\mathbb{L} = \{2; 3; 4\}$$

Gleichungen mit Brüchen

Donnerstag, 14. September 2017

Beispiel 1: $\frac{x+52}{x+2} = 11$ $\quad | \cdot (x+2) \rightarrow x+52 = 11 \cdot (x+2) \rightarrow \dots \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Beispiel 2: $\frac{6x-24}{x-4} = 4$ $\quad | \cdot (x-4) \rightarrow 6x-24 = 4 \cdot (x-4) \rightarrow \dots \quad D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$6x-24 = 4x-16 \quad | -4x$$

$$2x-24 = -16 \quad | +24$$

$$2x = 8 \quad | :2$$

$$x = 4 \quad \quad \quad \mathbb{L} = \{ \}$$

Übungsaufgaben zu den Polynomen 3. Grades und 4. Grades 1

Donnerstag, 14. September 2017

Bestimmen Sie die Lösungen in $\mathbb{R}$

a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
 c) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$ d) $\frac{9x+7}{5} - \frac{3x+2}{9} = \frac{3x+2}{3} - \frac{4x+2}{45}$
 e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{2}\right)^2 - \left(\frac{13x}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = -(6x)^2 + 29$
 f) $\frac{3x+2}{2x-4} - \frac{3x^2+1}{2x^2-8} = \frac{16x+114}{4x^2+8x}$ g) $\frac{x-4}{x+4} = \frac{1-x}{1+x}$

a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$
 $x(x^2 - 5x + 4) = 0$
 $x(x-4)(x-1) = 0$
 $\mathbb{L} = \{0; 1; 4\}$

b) Subst.: $u = x^2$
 $u^2 - 13u + 36 = 0$
 $(u-4)(u-9) = 0$ $u_1 = 4; u_2 = 9$
 Rücksubst.: 1. $4 = x^2$ 2. $9 = x^2$
 $x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ $x_{3/4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
 $\mathbb{L} = \{-3; -2; 2; 3\}$

c) $\frac{9x+7}{5} - \frac{3x+2}{9} = \frac{3x+2}{3} - \frac{4x+2}{45}$ $D = \mathbb{R}$

HN.: $\frac{5}{3 \cdot 3}$
 $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 5} = 45$

$\frac{(9x+7) \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{(3x+2) \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{(3x+2) \cdot 15}{3 \cdot 15} - \frac{4x+2}{45} \quad | \cdot HN$
 $9 \cdot (9x+7) - 5 \cdot (3x+2) = 15 \cdot (3x+2) - (4x+2)$
 $81x + 63 - 15x - 10 = 45x + 30 - 4x - 2$
 $66x + 53 = 41x + 28 \quad | -41x - 53$
 $25x = -25 \quad | :25$
 $x = -1 \quad \mathbb{L} = \{-1\}$

f) $\frac{3x+2}{2x-4} - \frac{3x^2+1}{2x^2-8} = \frac{16x+114}{4x^2+8x}$

$\frac{3x+2}{2(x-2)} - \frac{3x^2+1}{2(x-2)(x+2)} = \frac{16x+114}{4x(x+2)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

HN: $\frac{2(x-2)}{2(x-2)(x+2)}$
 $\frac{2 \cdot 2 \cdot x(x+2)}{2 \cdot 2 \cdot x(x-2)(x+2)}$

Erweitern:

$(3x^2+1) \cdot 2x$ $(16x+114)(x-2)$

Erweitern:

$$\frac{(3x+2) \cdot 2x(x+2)}{2(x-2) \cdot 2x(x+2)} - \frac{(3x^2+1) \cdot 2x}{2(x-2)(x+2) \cdot 2x} = \frac{(16x+114)(x-2)}{4x(x+2)(x-2)} \quad | \cdot 4x$$

$$2x \cdot (3x+2)(x+2) - 2x \cdot (3x^2+1) = (16x+114)(x-2)$$

$$2x(3x^2+6x+2x+4) - 6x^3 - 2x = 16x^2 - 32x + 114x - 228$$

$$\cancel{6x^3} + \cancel{16x^2} + 8x - \cancel{6x^3} - 2x = \cancel{16x^2} + 82x - 228 \quad | -16x^2 - 6x$$

$$0 = 76x - 228 \quad | +228$$

$$76x = 228 \quad | :76$$

$$x = 3$$

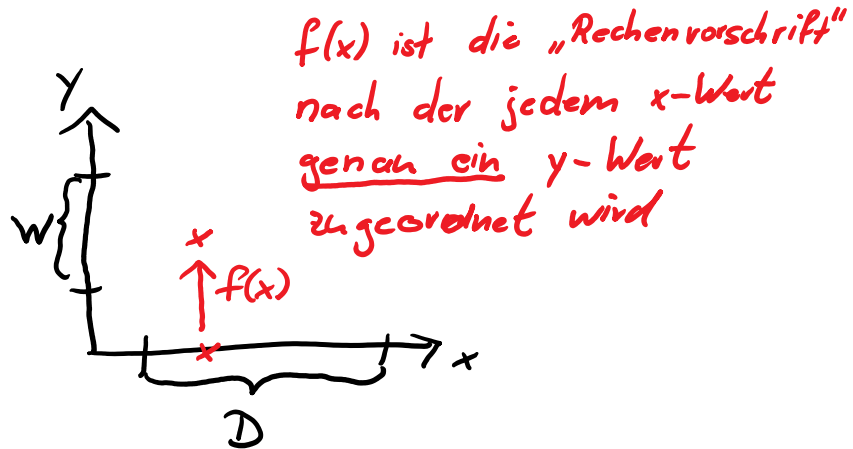
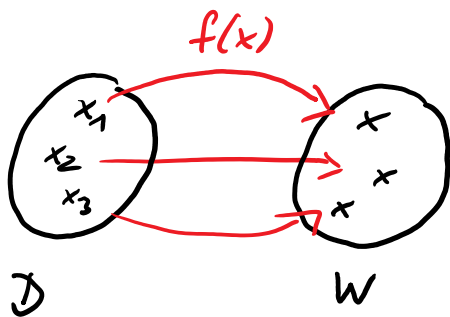
$$\mathbb{L} = \{3\}$$

Grundlagen zum Funktionsbegriff

Donnerstag, 14. September 2017

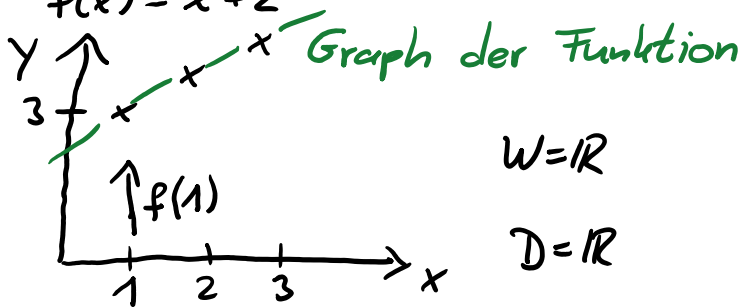
Funktionen sind eindeutige **Abbildungen**, bei denen jedem Element aus einer **Definitionsmenge** D **eindeutig** ein Element aus einer **Wertemenge** W zugeordnet wird. Diese Zuordnung erfolgt immer gemäß einer **Funktionsvorschrift** $f(x)$.

Beispiele:

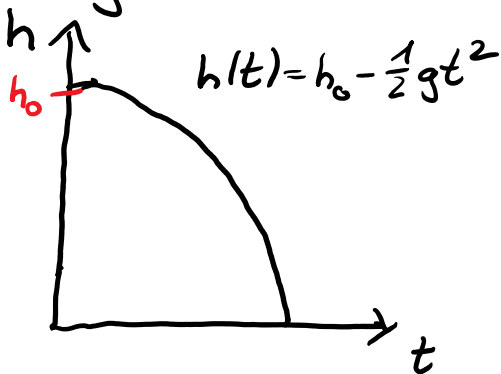


Beispiel:

$$f(x) = x + 2$$



Flughöhe eines waagrecht geworfenen Steins



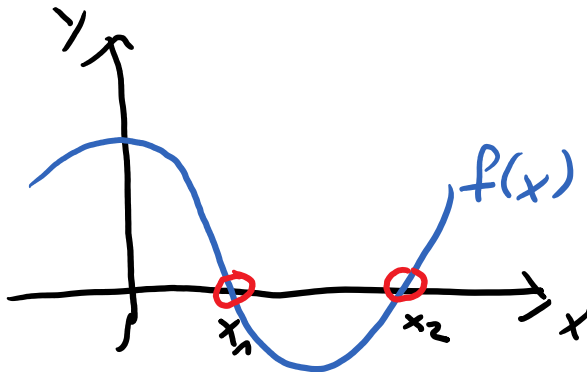
Grundlegende Begriffe

Freitag, 15. September 2017

14:20

Nullstellen

Implizite und explizite Darstellung von Funktionen



Nullstelle $f(x)=0$

$$N_1(x_1|0)$$

$$N_2(x_2|0)$$

$y=f(x)$ explizite Darstellung z.B.: $y=x+2$

$y-f(x)=0$ implizite Darstellung $y-x-2=0$

Geradengleichungen

Donnerstag, 14. September 2017

Wenn die Funktionsvorschrift $f(x)$ ein Polynom 1. Grades ist, dann ist der Graph der Funktion eine Gerade im Koordinatensystem.

$$f(x) = ax + b$$

Beispiele : $y = f(x) = 1x + 1 = t$

Wertetabelle:

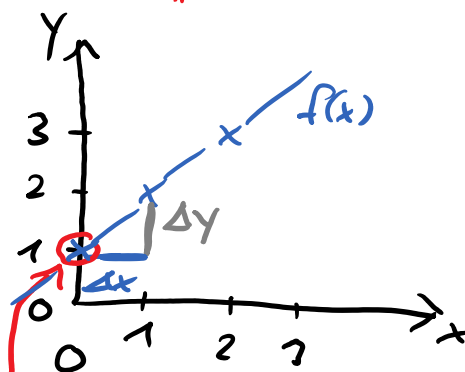
x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

$$y = mx + t$$

Geradengleichung

m : Steigungsfaktor

t : y-Achsenabschnitt



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Beispiel Geradengleichung 1

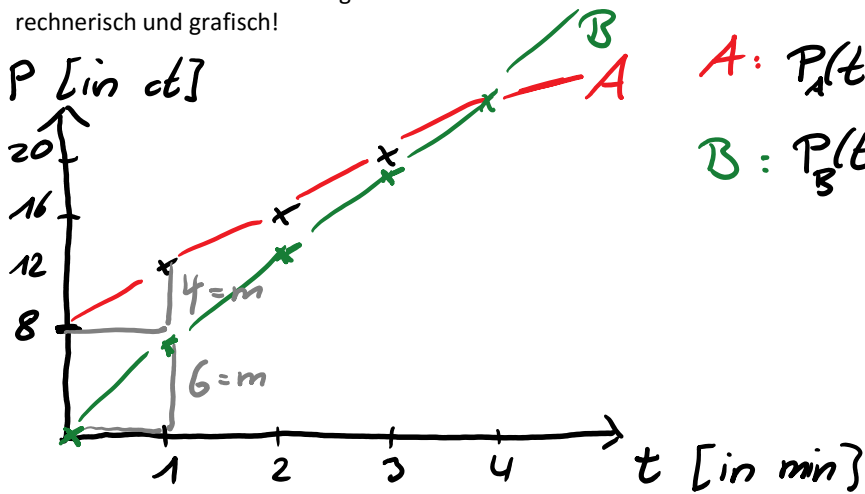
Donnerstag, 14. September 2017

2 Handy-Tarife:

Tarif A: 8 c pro Gespräch pauschal plus 4 c pro Minute

Tarif B: 6 c pro Minute

Beide Tarife rechnen sekundengenau ab. Für wen ich welcher Tarif am besten? Lösen Sie rechnerisch und grafisch!



$$A: P_A(t) = 8 + 4 \cdot t$$

$$f(x) = 4x + 8$$

$$B: P_B(t) = 6 \cdot t$$

$$f(x) = 6x$$

$$P_A(t) = P_B(t)$$

$$8 + 4t = 6t \quad | -4t$$

$$8 = 2t \quad | :2$$

$$t = 4 \text{ [min]}$$

Bis 4min: Tarif B

Ab 4min: Tarif A

Beispiel Geradengleichung 2

Freitag, 15. September 2017

Hans startet eine Reise mit 60 km/h. Sabine startet eine Viertelstunde später mit einer 50% höheren Geschwindigkeit. Wann und nach wie vielen km holt Sabine Hans ein? Lösen Sie grafisch und rechnerisch!

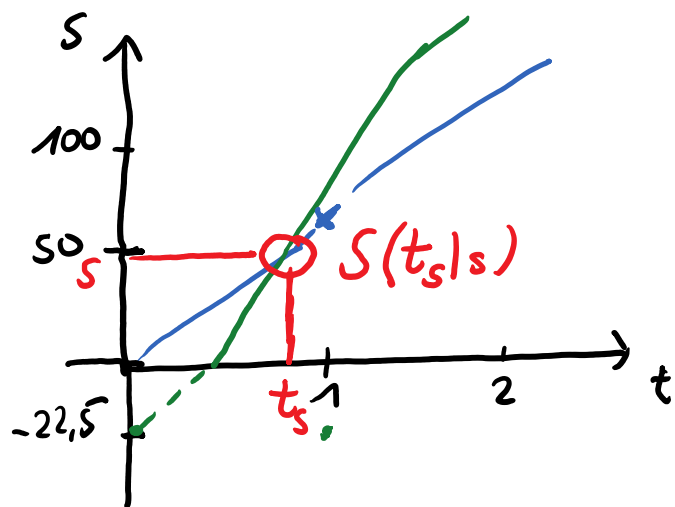
geg.: $v_H = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_S = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_* = 0,25\text{h}$

ges.: t_s ; s

$s_H(t) = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$

$s_s(t) = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot (t - 0,25\text{h}) = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 22,5 \text{ km}$

grafische Lösung:



rechnerische Lösung:

$s_H(t) = s_s(t)$

$$60t = 90t - 22,5 \quad | -60t + 22,5$$

$$30t = 22,5 \quad | :30$$

$$t = \frac{22,5}{30} = \frac{45}{60} [\text{h}] \hat{=} \underline{45 \text{ min}}$$

$$s_H(t=45 \text{ min}) = s_H(t=\frac{3}{4} \text{ h}) = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{4} \text{ h} = \underline{45 \text{ km}}$$

$$v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t$$
$$\boxed{s = v \cdot t}$$

Übungsaufgaben zu Geradengleichungen 1

Freitag, 15. September 2017

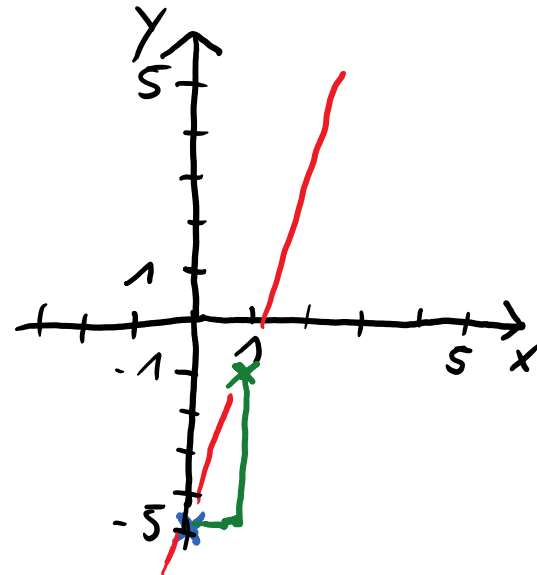
Welche der Punkte liegen auf der Geraden $g(x)=y=4x-5$

- a) A (1; 1) b) B (2; 4) c) C (20; 75) d) D (732,2; 2933)

$$\begin{aligned} a) \quad 1 &= 4 \cdot 1 - 5 \quad ? \\ 1 &= -1 \quad \text{falsch} \\ &\rightarrow A \notin g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 4 &= 4 \cdot 2 - 5 \quad ? \\ 4 &= 3 \quad \text{falsch} \\ &\rightarrow B \notin g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 75 &= 4 \cdot 20 - 5 \\ 75 &= 75 \\ C &\in g \end{aligned}$$



Übungsaufgaben zu Geradengleichungen 2

Freitag, 15. September 2017

Ermitteln Sie die Geradengleichung der Gerade, die durch die Punkte geht, sowie die Schnittpunkte mit X bzw. Y-Achse

- a) A (2; 1) B (-5; -13) b) C (0; 2) D (20; 52)
c) E (-3; 2) F (-4; -1)

a) $y = m \cdot x + t$ ges.: $m; t$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-13 - 1}{-5 - 2} = \frac{-14}{-7} = 2$$

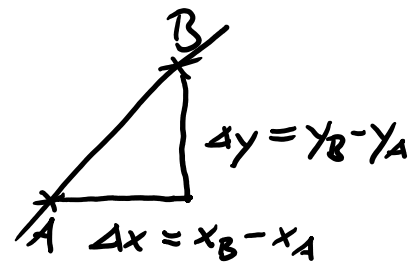
Punktkoordinaten von A und m einsetzen:

$$1 = 2 \cdot 2 + t$$

$$1 = 4 + t$$

$$t = -3$$

Geradengleichung $g: y = 2x - 3$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Quadratische Funktionen

Freitag, 15. September 2017

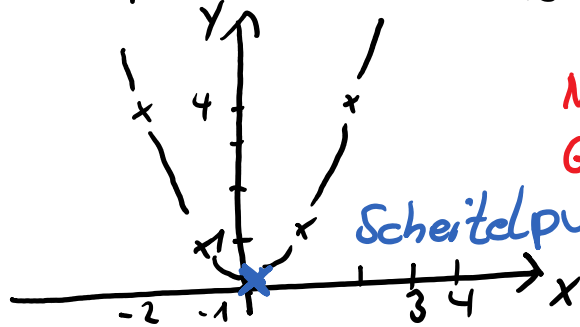
Lernziel: Definition der quadratischen Funktion, Nullstellen bestimmen können

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow \text{Graph: Parabel}$$

$$f(x) = x^2$$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	4	9	16



Normalparabel
Graph der Funktion $f(x) = x^2$

$$\text{Nullstelle: } ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\rightarrow N_1(x_1|0), N_2(x_2|0)$
(wenn $D \geq 0$)

Quadratische Ergänzung und Scheitelpunkte

Freitag, 15. September 2017

Beispiel: Bringen Sie folgenden quadratischen Term auf Scheitelpunktsform und zeichnen Sie den Graphen:

$$x^2 - 6x + 7$$

$$x^2 - 6x + 7$$

Binomische Formel „basteln“

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 7 = (x - 3)^2 - 2$$

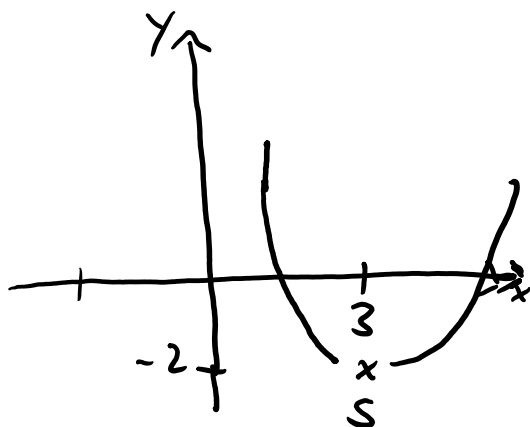
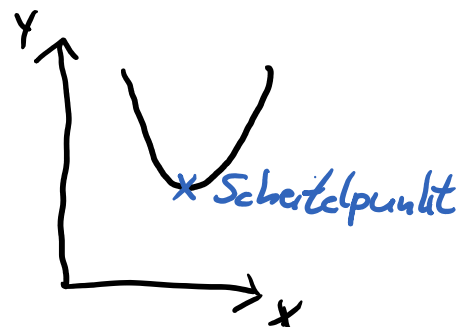
„durch 2 & quadrieren“

Scheitelpunkt (x_s/y_s)

x_s

y_s

$$S(3|-2)$$



Quadratische Funktionen zeichnen

Freitag, 15. September 2017

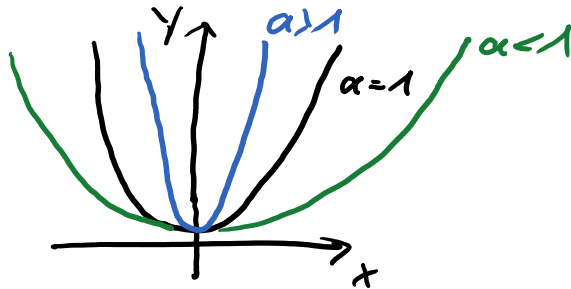
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wenn $a=1$: Verschiebene Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$.

Wenn $a \neq 1$: a ausklammern, Scheitelpunkt in der Klammer berechnen

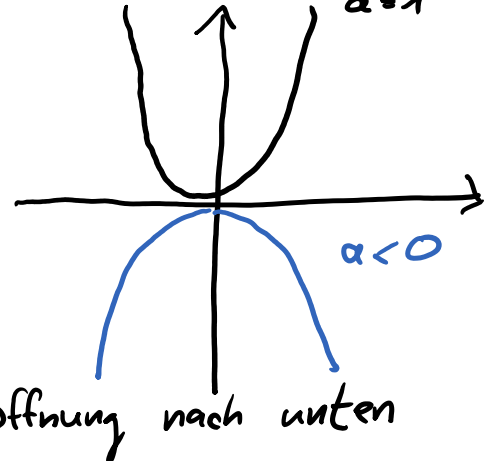
Beispiel: $y = 3x^2 - 18x + 21 = 3(x^2 - 6x + 7)$

Wenn $a > 1$: Normalparabel wird gestaucht



a : Öffnungsfaktor

Wenn $a < 0$:



Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen 1

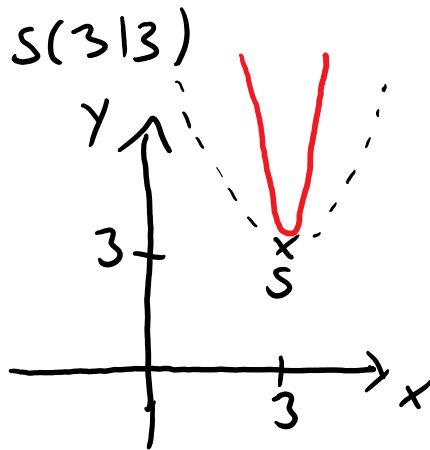
Freitag, 15. September 2017

Bringen sie die quadratischen Funktionen auf Scheitelpunktsform und zeichnen sie die Graphen:

a) $x^2 - 4x + 2$

b) $3x^2 - 18x + 30$

b) $3(x^2 - 6x + 10) = 3(x^2 - 6x + 9 - 9 + 10) = 3[(x-3)^2 + 1] = 3(x-3)^2 + 3$



Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen

Freitag, 15. September 2017

- a) Welche quadratische Funktion ist durch die Punkte A(0|4), B(2|0) und C(3|1) festgelegt?
b) Ein Stein wird in einen Brunnen fallen gelassen. Es dauert 2 Sekunden, bis der Stein auf der Wasseroberfläche am Grund des Brunnens einschlägt. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Fallstrecke s des Steins in Abhängigkeit von der Zeit durch Bewegungsgleichung $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ beschrieben wird? Wie lange fällt der Stein in einem 40m tiefen Brunnen ($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$)?

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

I $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$4 = c$

II $0 = 4a + 2b + 4 \quad | :2 \quad 0 = 2a + b + 2 \quad | -2a - 2 \rightarrow b = -2a - 2 \quad \text{in III}$

III $1 = 9a + 3b + 4$

$1 = 9a + 3(-2a - 2) + 4$

$1 = 9a - 6a - 2$

$1 = 3a - 2 \quad | +2$

$3 = 3a \quad | :3$

$a = 1$ in II

II $0 = 2 + b + 2$

$b = -4$

$f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

- a) Ein Stein wird in einen Brunnen fallen gelassen. Es dauert 2 Sekunden, bis der Stein auf der Wasseroberfläche am Grund des Brunnens einschlägt. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Fallstrecke s des Steins in Abhängigkeit von der Zeit durch Bewegungsgleichung $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ beschrieben wird? Wie lange fällt der Stein in einem 40m tiefen Brunnen ($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$)?

$s(t=2s) = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = \underline{20m}$

$40m = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad | :5$

$8s^2 = t^2 \quad | \sqrt{\quad}$

$t = \sqrt{8}s \approx \underline{2,82s}$

Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen 2

Freitag, 15. September 2017

Gegeben sind: 1. Die Gerade $g(x) = 2x + 5$ und 2. die quadratische Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.
Beweisen Sie, dass $g(x)$ und $f(x)$ keine Schnittpunkte haben!

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 2x + 5 \quad | +x^2 - 4x + 4$$

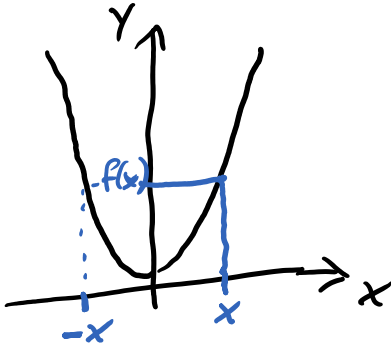
$$x^2 - 2x + 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 4 - 36 = -32 < 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Symmetrie von Funktionen

Freitag, 15. September 2017

Achsensymmetrie bzgl. y-Achse



Kriterium: $f(-x) = f(x)$

Achsensymmetrie

Beispiel:

$$f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^4 + 5(-x)^2 + 3 \\ &= 4x^4 + 5x^2 + 3 = f(x) \end{aligned}$$

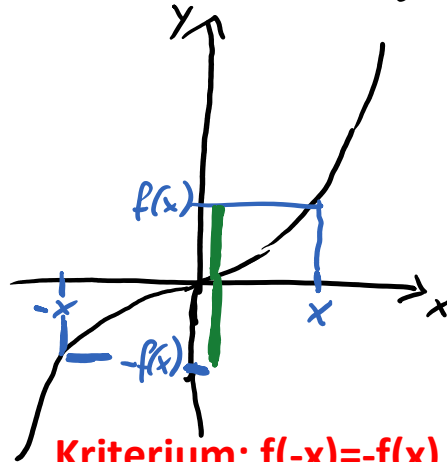
→ Achsensymmetrie bzgl. y-Achse

Gerade Funktionen:

nur gerade Exponenten

→ immer achsensymmetrisch zur y-Achse

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung



Kriterium: $f(-x) = -f(x)$

Punktsymmetrie zum KUO

Beispiel: $f(x) = 2x^5 + 3x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 + 3(-x) \\ &= -2x^5 - 3x \\ &= -\underbrace{(2x^5 + 3x)}_{f(x)} = -f(x) \end{aligned}$$

$(-x)^5 = -x^5$
 $(-x)(-x)(-x)(-x)(-x)$

→ Punktsymmetrie zum KU.

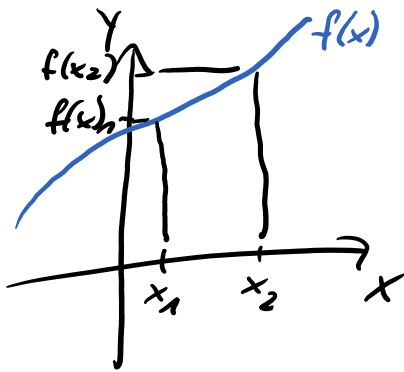
Ungerade Funktionen:

nur ungerade Exponenten

→ punktsymmetrisch zum KU

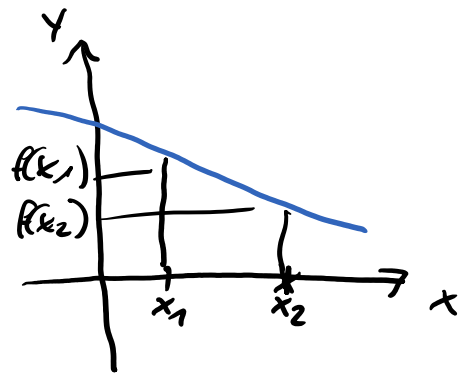
Monotonie

Freitag, 15. September 2017



streng monoton wachsende
Funktion

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



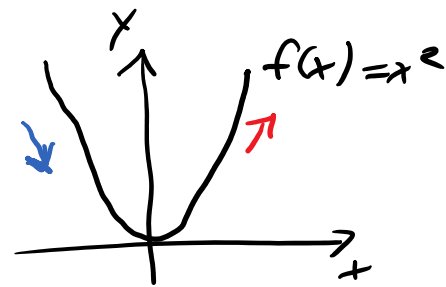
streng monoton fallende
Funktion

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Beispiel: Monotonieverhalten von $f(x) = x^2$

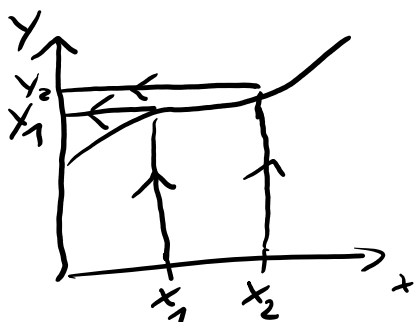
Wenn $x \in]-\infty; 0[$: $f(x)$ streng
monoton fallend

Wenn $x \in]0; \infty[$: $f(x)$ streng
monoton wachsend

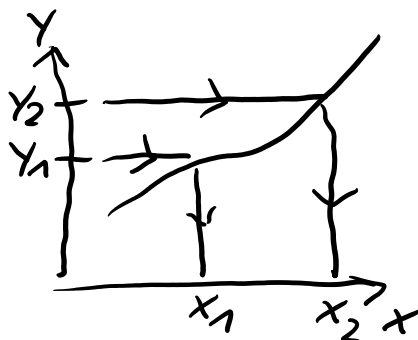


Umkehrfunktion

Freitag, 15. September 2017



Funktion f



Umkehrfunktion f^{-1} (inverse Funktion)

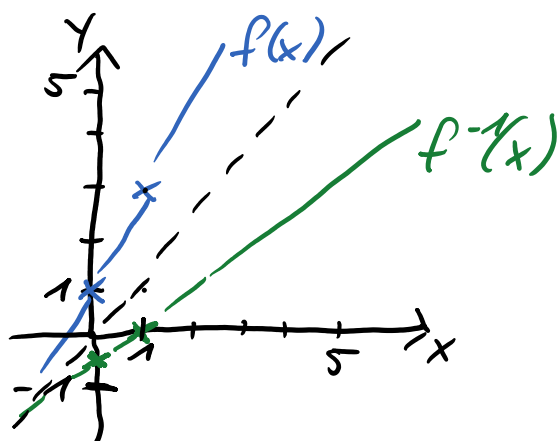
f ist nur dann umkehrbar, wenn f eine streng monotone Funktion ist.

Wie erstelle ich f^{-1} ?

① $y = f(x) \xrightarrow{\text{Funktionsgleichung nach } x \text{ auflösen}} x = g(y)$

② $x = g(y) \xrightarrow{x \text{ und } y \text{ vertauschen}} y = g(x) = f^{-1}(x)$

Beispiele: 1. $f: y = 2x + 1 \quad | -1$
 $y - 1 = 2x \quad | :2$
 $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
 2. $f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



$f(x) \rightarrow f^{-1}(x)$: Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

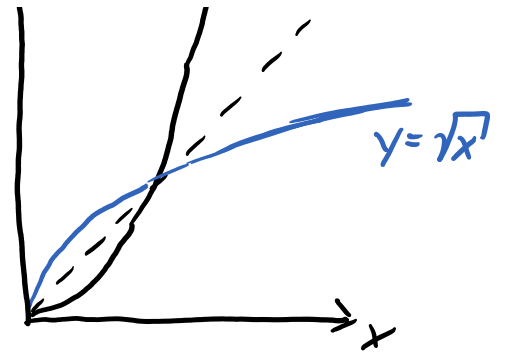
Beispiel: $y = x^2 \quad (x > 0)$

1. $x = \sqrt{y}$



$$1. x = f(y)$$

$$2. f': y = f'(x)$$



Übungen zu Umkehrfunktionen

Freitag, 15. September 2017

Wie lautet die Umkehrfunktion von

a) $y = 2x + 1$

b) $y = \frac{1}{2x} \ (x > 0)$

b) $y = \frac{1}{2x} \quad | \cdot 2x$

1. $y \cdot 2x = 1 \quad | : 2y$

$$x = \frac{1}{2y}$$

2. $y = \frac{1}{2x} \quad f(x) = f^{-1}(x)$

Übungen zu Funktionen

Freitag, 15. September 2017

Symmetrieverhalten Funktionen

Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen und den maximalen Definitionsbereich.

a) $y = 4x^2 + 16$

$D = \mathbb{R}$, gerade Funktion $\rightarrow$ achsensymm. zur y-Achse

b) $y = 3x^5 + 2x$

$D = \mathbb{R}$, ungerade Funktion $\rightarrow$ punktsymm. zum KV

c) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -\frac{x^3}{x^2 + 1} = -f(x) \quad D = \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ punktsymm. Funktion

Nullstellen

Wo haben die folgenden Funktionen Nullstellen?

a) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

b) $y = x^4 - 4x^2 - 45$

$x_1 = -3, x_2 = 3 \quad N_1(-3/0) \quad N_2(3/0)$

Subst. $u = x^2$

$u^2 - 4u - 45 = 0$

$(u - 9)(u + 5) = 0$

$u_1 = 9; u_2 = -5$

Rücksubst. $x^2 = 9$

$x_{1/2} = \pm \sqrt{9} = \pm 3$

$N_1(-3/0) \quad N_2(3/0)$

$x^2 = -5$

$x_{3/4} = \pm \sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$

Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen

Freitag, 15. September 2017

- a) Welche relative Lage im Koordinatensystem haben die Funktionen $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ und $y = (x - 2)^2 + 3$?
- b) Welches Monotonieverhalten hat die Funktion $y = x^3$? Zeichnen Sie den Graphen!

Proportionalitäten

Freitag, 15. September 2017

Direkte Proportionalität, indirekte Proportionalität, Schreibweisen für allgemeine Proportionalitäten

Direkte Proportionalität: 1 Faktor wird vervielfacht $\rightarrow$
2 Faktor wird genauso vervielfacht

Graph: Ursprungsgerade $f(x) = ax$ $f(x) \sim x$

Indirekte Proportionalität: 1 Faktor wird vervielfacht
 $\rightarrow$ 2 Faktor wird entsprechend geteilt

Graph: Hyperbel $f(x) \sim \frac{1}{x}$

$\nearrow$ Proportionalitäts-
zeichen

Andere Proportionalitäten:

z.B. Fallen eines Steins $s(t) \sim t^2$

z.B. exponentielle Vermehrung von Bakterien $n(t) \sim 2^t$

Potenzrechnung - Grundbegriffe

Freitag, 15. September 2017

Potenzen Grundbegriffe, gerade und ungerade Potenzen, negative Exponenten

Bsp.: 2^3 ; 3^4 ; 5^{-1} ; $4^{\frac{2}{3}}$

Grundbegriffe: a^b — *Exponent*
— *Basis*

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{b\text{-mal}}$

Beispiele: $(-5)^n = 5^n$, wenn n gerade

$(-5)^n = -5^n$, wenn n ungerade

Potenzgesetze

Freitag, 15. September 2017

Lernziel: Potenzgesetze kennen, mit Potenzen rechnen können, Potenzgesetze anwenden

Potenzgesetze:

$$\text{I } a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$\text{II } a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$\text{III } (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beispiele:

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^7$$
$$(2^2)^3 = 2^6$$

negative Exponenten: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Beispiele: $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$; $8^{-2} = (2^3)^{-2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$

Übungen zur Potenzrechnung 1

Freitag, 15. September 2017

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

$$(a) ((-2)^{-2})^3 = (-2)^{-6} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$(b) ((-2)^3)^{-2} = (-2)^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$(c) (-2^3)^{-2} = (2^3)^{-2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$(-\frac{1}{2^3})^2 = (\frac{1}{2^3})^2$$

$$(d) (-2^3)^3 = -2^9 = -512$$

$$(e) (-2)^{3^2} = (-2)^9 = -2^9 = -512$$

$$(f) (2^{-3})^{-2} = \frac{1}{(2^{-3})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2^3})^2} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 2^6$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Übungen zur Potenzrechnung 2

Freitag, 15. September 2017

Geben Sie die gegebenen Terme bzw. die Ergebnisse mit positiven Exponenten an.

a) $(a+b)^{-1}$ b) $\frac{3x^4}{6x^{-3}}$

c) $(x^2y^{-3})^{-2}(x^{-2}y^3)^2$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{9}{4}\right)^{-3}$

a) $\frac{1}{a+b}$ b) $\frac{x^{4-(-3)}}{2} = \frac{x^7}{2}$

c) $x^{-4}y^6 x^{-4}y^6 = x^{-8}y^{12} = (x^{-2}y^3)^4$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{9^3} = \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{2^6}{3^6} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Wurzelrechnung

Freitag, 15. September 2017

Lernziel: Definition der n-ten Wurzel, Gesetze zur Wurzelrechnung kennen, mit Wurzeln rechnen können

$\sqrt{2}$ = Welche Zahl gibt mit sich selber multipliziert 2?

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ denn } 2^3 = 8$$

$\sqrt[n]{x}$: n-te Wurzel : Welche Zahl muss ich mal mit sich selber multiplizieren, um x zu erhalten?

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

Zusammenhang Wurzeln $\rightarrow$ Potenzen

$\rightarrow$ Potenzgesetze sind anwendbar

Beispiel: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$

$$4^{0,2} = 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$$

$$5^{-0,1} = \frac{1}{5^{0,1}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{5}}$$

Teilweise Radizieren: $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

Übungen zur Potenz- und Wurzelrechnung 1

Freitag, 15. September 2017

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

(a) $7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^{-2} = 7^6$

(b) $\frac{1}{16} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{64} = \frac{1}{2^4} \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2^6} = 2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 2^{\frac{6}{2}} = 2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^2 = 4$

(c) $3^{-1/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{3^7}$
 $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

(d) $3^{-1/4} : 3^{1/2} : 3^{1/3} = 3^{-\frac{13}{12}} = \frac{1}{3^{13/12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^{13}}}$

(e) $\sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{1/3}} = \sqrt[4]{2^{4/3}} = (2^{4/3})^{1/4} = 2^{1/3} \cdot \frac{1}{4} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

(f) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7^{-3}}} = \sqrt[3]{7 \cdot (7^{-3/2})^{1/2}} = \sqrt[3]{7 \cdot 7^{-3/4}} = \sqrt[3]{7^{1-3/4}} = \sqrt[3]{7^{1/4}} = (7^{1/4})^{1/3} = 7^{1/12} = \sqrt[12]{7}$

(g) $\sqrt[3]{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{25}} = 5^{1/3} \cdot 5^{-2/3} = 5^{1/3-2/3} = 5^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

Übungen zur Potenz- und Wurzelrechnung 2

Freitag, 15. September 2017

Soweit wie möglich vereinfachen:

a) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$ b) $\sqrt[5]{x} : \sqrt{x}$

$$a) 9 \cdot 2 - 25 \cdot 3 = 18 - 75 = -57$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$b) x^{\frac{1}{5}} : x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{10} - \frac{5}{10}} = x^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}$$

Übungen zur Potenz- und Wurzelrechnung 3

Freitag, 15. September 2017

Nenner rational machen:

a) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+y}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt{(x-y)(x+y)}}{\sqrt{x+y}} &= \frac{\sqrt{x-y} \cdot \cancel{\sqrt{x+y}}}{\cancel{\sqrt{x+y}}} \\ &= \sqrt{x-y} \quad (= (x-y)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1)} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Der Logarithmus

Freitag, 15. September 2017

Lernziel: Definition des Logarithmus kennen, Rechenregeln für Logarithmen kennen, mit Logarithmen rechnen können, Basiswechsel, Schreibweisen für besondere Logarithmen kennen

$$2^x = 8 \rightarrow x = \log_2 8 = 3 \quad \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$a^x = b \rightarrow x = \log_a b \quad \text{„Logarithmus zur Basis } a \text{ von } b\text{“}$$

Definition des Logarithmus $b, a > 0$

Rechenregeln:

- I $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$ $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2(8) + \log_2(4) = 3 + 2 = 5$
- II $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$ $\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3(81) - \log_3(27) = 4 - 3 = 1$
- III $\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$ $\log_5(125^4) = 4 \cdot \log_5(125) = 4 \cdot 3 = 12$

Besondere Schreibweisen:

$$\log_2 x = \lg x$$

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$\log_e x = \ln x$$

$$e = 2,718 \dots$$

Übungen zum Logarithmus 1

Freitag, 15. September 2017

Berechnen sie die folgende Logarithmen:

a)

$\log_2 8$	$\log_3 81$	$\log_5 125$	$\log_2 0,125$
$\lg 1000$	$\lg 0,0001$	$\ln e^4$	$\log_{16} 256^{12}$

- b) Wie berechnen sie $\log_2 7$ mit einem (alten) Taschenrechner?
c) Wie könnte man $\log_2 24$ etwas vereinfachen?

a) $3 \mid 4 \mid 3 \mid \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \cdot \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$
 $\log_{10} 1000 = 3 \mid \lg 0,0001 = \log_{10} \frac{1}{10000} = \log_{10} 10^{-4} = -4$
 $\ln e^4 = \log_e e^4 = 4 \mid \log_{16} 256^{12} = 12 \cdot \log_{16} 256 = 12 \cdot 2 = 24$

b) $\log 2 \approx 2,8...$

c) $\log_2 24 = \log_2 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \log_2 2^3 \cdot 3 =$
 $\log_2 2^3 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3$

Übungen zum Logarithmus 2

Freitag, 15. September 2017

(a) Bestimmen Sie (ohne Taschenrechner):

$$\ln(e^2) = 2 \ln(e) = 2$$

$$e^{\ln(e)} = e$$

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln(e) = \frac{1}{2}$$

$$e^{\ln(3)} = 3$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\right) = \ln e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\ln(3e^4) = \ln 3 + \ln e^4 = \ln 3 + 4$$

(b) Zerlegen Sie soweit wie möglich in einzelne Logarithmen:

$$\text{i.) } \log_3\left(\frac{\sqrt{3}a^4}{9}\right) = \log_3(\sqrt{3}a^4) - \log_3 9 = \log_3 \sqrt{3} + \log_3 a^4 - \log_3 9 = \frac{1}{2} + 4\log_3 a - 2 = -\frac{3}{2} + 4\log_3 a$$

$$\text{ii.) } \log_4\left(\frac{16x}{\sqrt{2}}\right)^6 = 6 \cdot \log_4\left(\frac{16x}{\sqrt{2}}\right) = 6 \cdot (\log_4(16x) - \log_4(\sqrt{2})) = 6 \cdot (\log_4 16 + \log_4 x - \log_4 \sqrt{2}) = 6 \cdot (2 + \log_4 x - \frac{1}{4}) = 6 \cdot (2 + \log_4 x - \frac{1}{4}) = 6 \cdot (\frac{7}{4} + \log_4 x) = \frac{21}{2} + 6\log_4 x$$

(c) Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen und berechnen das Ergebnis (ohne Taschenrechner):

$$\text{i.) } \lg(5) - 2\lg(5) + \lg(30) - \lg(6) = -\lg 5 + \lg 30 - \lg 6 = \lg \frac{30}{5 \cdot 6} = \lg 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii.) } \frac{1}{2} \lg(81) - \lg(2) - 2\lg(3) + \lg(20) &= \lg 81^{\frac{1}{2}} - \lg 2 - \lg 3^2 + \lg 20 \\ &= \lg 9 - \lg 2 - \lg 9 + \lg 20 = \\ &= \lg 20 - \lg 2 = \lg \frac{20}{2} = \lg 10 = 1 \end{aligned}$$

log —

Übungen zum Logarithmus 3

Freitag, 15. September 2017

Terme so weit wie möglich zerlegen:

a) $\log \frac{ab}{cd}$ b) $\log \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ c) $\log \frac{x^3}{y^2} \sqrt[4]{\frac{a^2x}{3b^3}}$ d) $\log \frac{x^9 \sqrt[5]{(z-y)^4 y^3}}{y^7 \sqrt[7]{(z-y)^5 x^{12}}} (xz^2)^5$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\log ab}{\log cd} &= \log(ab) - \log(cd) = \log a + \log b - (\log c + \log d) \\ &= \log a + \log b - \log c - \log d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} &= \log(a^2+b^2) - \log(a^2-b^2) \\ &= \log(a^2+b^2) - \log[(a-b)(a+b)] = \\ &\quad - [\log(a-b) + \log(a+b)] \\ &= \log(a^2+b^2) - \log(a-b) - \log(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log \left(\frac{x^3}{y^2} \sqrt[4]{\frac{a^2x}{3b^3}} \right) &= \log \frac{x^3}{y^2} + \log \sqrt[4]{\frac{a^2x}{3b^3}} \\ &= \log x^3 - \log y^2 + \frac{1}{4} \log \left(\frac{a^2x}{3b^3} \right) \\ &= 3 \log x - 2 \log y + \frac{1}{4} \cdot (\log a^2x - \log 3b^3) \\ &= 3 \log x - 2 \log y + \frac{1}{4} \cdot (2 \log a + \log x - \log 3 - 3 \log b) \\ &= 3 \log x - 2 \log y + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \log x - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{3}{4} \log b \\ &= 3\frac{1}{4} \log x - 2 \log y + \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{3}{4} \log b \end{aligned}$$

Kleiner Zwischentest

Montag, 18. September 2017

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

1. Binomische Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a) $\frac{2x^2 - 12xy + 18y^2}{4y^2 - 4x^2} =$

b) $\frac{48a^2 - 75b^2}{9a - 15b} =$

2. Gleichungen

Welche reellen Lösung besitzen die folgenden Gleichungen?

a) $x^5 - 3x^3 + x = 0$

b) $t^2 - 13t + 36 = 0$ (Satz von Vieta anwenden)

3. Funktionen

Welche Nullstellen und welches Symmetrieverhalten hat die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

4. Potenzgesetze und Wurzeln

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich!

a) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9^{-3}}} =$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} =$

c) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} =$

5. Logarithmus

a) Berechnen Sie:

$\log_2 32 =$	$\log_2 0,25 =$	$\log_2 \sqrt[3]{2} =$
---------------	-----------------	------------------------

$\log_5 625 =$	$\log_3 \frac{1}{27} =$	$\log_3 \sqrt[5]{9} =$
----------------	-------------------------	------------------------

b) $\log \left(\frac{x^2}{y^5} \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} \right) =$

Kleiner Zwischentest

Montag, 18. September 2017

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

1. Binomische Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$a) \frac{2x^2 - 12xy + 18y^2}{4y^2 - 4x^2} = \frac{2(x^2 - 6xy + 9y^2)}{4(y^2 - x^2)} = \frac{2(x-3y)^2}{4(y-x)(y+x)} = \frac{(x-3y)^2}{2(y-x)(y+x)}$$

$$b) \frac{48a^2 - 75b^2}{9a - 15b} = \frac{3(16a^2 - 25b^2)}{3(3a - 5b)} = \frac{3(4a-5b)(4a+5b)}{3(3a-5b)}$$

2. Gleichungen

Welche reellen Lösung besitzen die folgenden Gleichungen?

$$a) x^5 - 3x^3 + x = 0$$

$$x(x^4 - 3x^2 + 1) = 0$$

$$b) t^2 - 13t + 36 = 0 \quad (\text{Satz von Vieta anwenden})$$

$$b) (t-4)(t-9) = 0$$

$$t_1 = 4; t_2 = 9 \quad \mathbb{L} = \{4, 9\}$$

$$\text{Subst.: } u = x^2$$

$$u^2 - 3u + 1 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Resubst.: } x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; x_4 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$x_5 = 0$$

$$\mathbb{L} = \dots$$

3. Funktionen

Welche Nullstellen und welches Symmetrieverhalten hat die Funktion

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -\underbrace{(x^3 - 4x)}_{f(x)} = -f(x)$$

$\rightarrow$ Punktsymmetrie zum NU

$$f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0; x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 2$$

$$N_1(-2|0) \quad N_2(0|0) \quad N_3(2|0)$$

4. Potenzgesetze und Wurzeln

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich!

$$a) \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9^{-3}}} = \sqrt[3]{9 \cdot 9^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{9^{-\frac{1}{2}}} = \left(9^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 9^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{9}}$$

$$b) \sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{(7^2)^{\frac{1}{3}}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

$$c) \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x+y}$$

$$= \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x+y}$$

5. Logarithmus

a) Berechnen Sie:

$\log_2 32 = 5$	$\log_2 0,25 = -2$	$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$
-----------------	--------------------	------------------------------------

$\log_5 625 = 4$	$\log_3 \frac{1}{27} = -3$	$\log_3 \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$
------------------	----------------------------	------------------------------------

$$\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4$$

$$= \log_2 4^{-1} = \log_2 2^{-2}$$

$$\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 8^{\frac{1}{5}} =$$

$$= \log_3 (3^2)^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}}$$

b) $\log \left(\frac{x^2}{y^5} \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} \right) = \log \frac{x^2}{y^5} + \log \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} =$

$$\log x^2 - \log y^5 + \frac{1}{3} \cdot \log \frac{a^6 x}{3b^3} =$$

$$2 \log x - 5 \log y + \frac{1}{3} \cdot (\log a^6 + \log x - \log 3 - \log b^3) =$$

$$2 \log x - 5 \log y + \frac{1}{3} \cdot (6 \log a + \log x - \log 3 - 3 \log b) =$$

$$\underline{2 \log x} - 5 \log y + 2 \log a + \underline{\frac{1}{3} \log x} - \frac{1}{3} \log 3 - \log b$$

$$2 \frac{1}{3} \cdot \log x - 5 \log y + 2 \log a - \frac{1}{3} \log 3 - \log b$$

Beträge

Montag, 18. September 2017

Definition des Betrags, rechnen mit Beträgen

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Beispiele: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$

Beim Rechnen: **Fallunterscheidung**

Fall 1: Positiver Fall

$\Rightarrow \mathbb{I}_1$

Fall 2: Negativer Fall

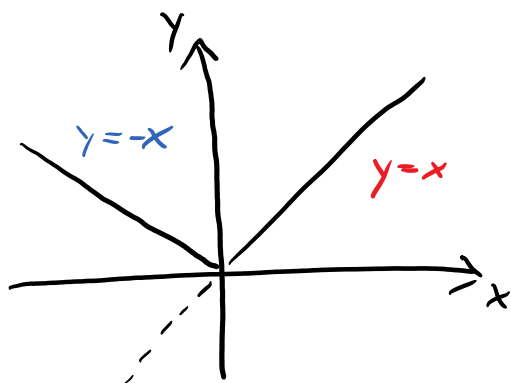
$\Rightarrow \mathbb{I}_2$

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_2$$

Betragsfunktion

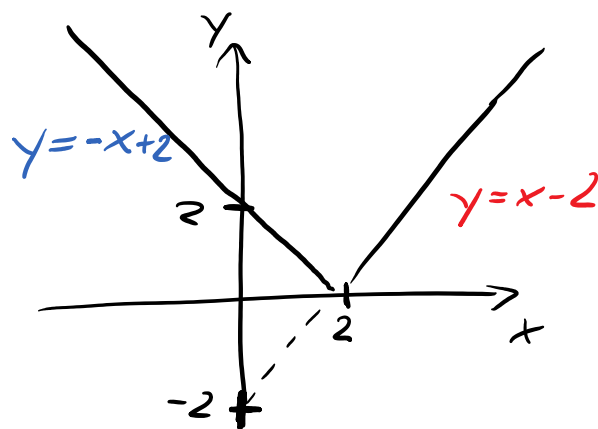
Montag, 18. September 2017

$$f(x) = |x| \quad \text{„Betragsfunktion“}$$



Alle negativen Kurvenstücke werden an der x-Achse gespiegelt.

$$y = |x-2| = \begin{cases} x-2; & \text{wenn } x \geq 2 \\ -(x-2); & \text{wenn } x < 2 \end{cases}$$



Betragsgleichungen

Montag, 18. September 2017

Beispiel: $|x - 2| = x^2$

Fallunterscheidung:

Fall 1: $x - 2 \geq 0$
 $x \geq 2$

$$x - 2 = x^2 \quad | -x + 2$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \text{↯}$$

keine Lösung

$$\mathbb{L}_1 = \{ \}$$

Fall 2: $x - 2 < 0$

$x < 2$

$$-(x-2) = x^2$$

$$-x + 2 = x^2 \quad | +x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 1$$

$$\mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$$

$$|x - 2| = x^2$$

graphische Lösung:

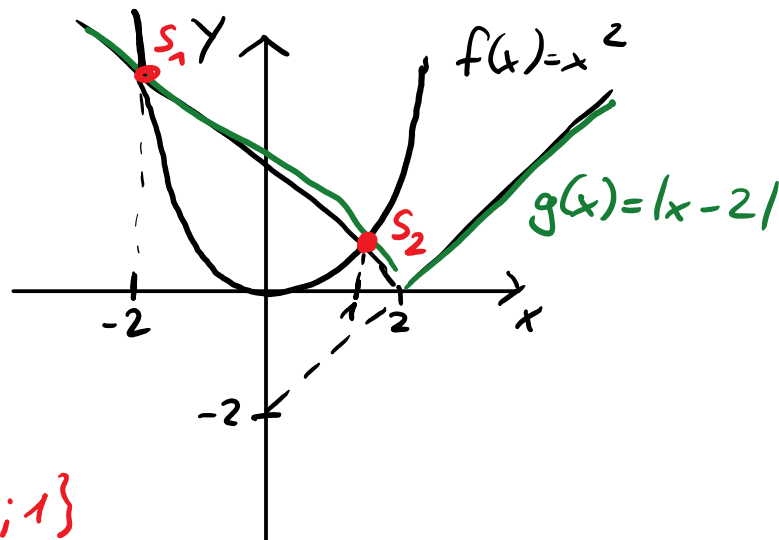
$$S_1(-2|4)$$

$$S_2(1|1)$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \{-2; 1\}$$



Übungsaufgaben zu Beträgen

Montag, 18. September 2017

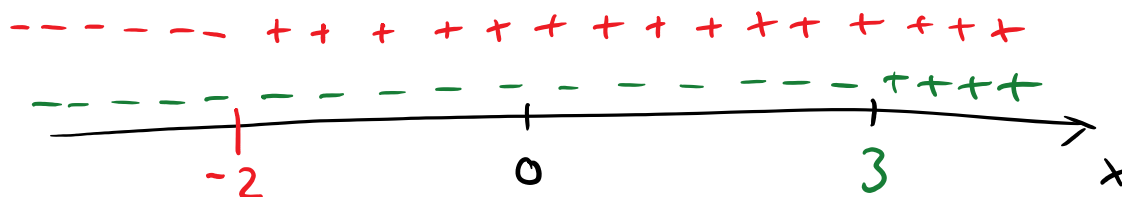
Lösen Sie folgenden Betragsgleichungen:

a) $|x+2| - 2|x-3| = 4$

b) $|2x+4| = -x^2 + x + 6$

a) $|x+2| \rightarrow$ 1. Fall $x+2 \geq 0$ $x \geq -2$
2. Fall $x+2 < 0$ $x < -2$

$|x-3| \rightarrow$ 1. Fall $x-3 \geq 0$ $x \geq 3$
2. Fall $x-3 < 0$ $x < 3$



1. Fall: $x < -2$

$$-(x+2) + 2 \cdot (x-3) = 4$$

$$-x - 2 + 2x - 6 = 4$$

$$x - 8 = 4 \quad | +8$$

$$x = 12$$

$$\mathbb{L}_1 = \{ \}$$

2. Fall $-2 \leq x < 3$

$$(x+2) + 2 \cdot (x-3) = 4$$

$$x+2 + 2x-6 = 4$$

$$3x-4 = 4 \quad | +4$$

$$3x = 8 \quad | :3$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

3. Fall: $x \geq 3$

$$(x+2) - 2(x-3) = 4$$

$$x+2 - 2x+6 = 4$$

$$-x+8 = 4 \quad | +x-4$$

$$x = 4$$

$$\mathbb{L}_3 = \{ 4 \}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{ \frac{8}{3}; 4 \right\}$$

b) $|2x+4| = -x^2 + x + 6$

1. Fall: $2x+4 \geq 0$

$$x \geq -2$$

$$2x+4 = -x^2+x+6 \quad | +x^2-x-6$$

$$x^2+x-2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

2. Fall: $2x+4 < 0$

$$x < -2$$

$$-(2x+4) = -x^2+x+6$$

$$-2x-4 = -x^2+x+6 \quad | +x^2-x-6$$

$$x^2-3x-10 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = 1$$

$$\mathbb{L}_1 = \{-2; 1\}$$

$$-2x - 4 = -x^2 + x + 6 \quad | +x^2 - x - 6$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = 5$$

$$\mathbb{L}_2 = \{ \}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$$

Ungleichungen

Montag, 18. September 2017

Beispiele: $x > 2$ $x \geq 2$ $x < -5$ $x \leq -5$
 $\mathbb{L} =]2; \infty[$ $\mathbb{L} = [2; \infty[$ $\mathbb{L} =]-\infty; -5[$ $\mathbb{L} =]-\infty; -5]$

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad | \cdot (x+2) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x+2 > 0$

$x > -2$

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad | \cdot (x+2)$$

$$2x-1 > 3 \cdot (x+2)$$

$$2x-1 > 3x+6 \quad | -2x-6$$

$$-7 > x$$

$$x < -7$$

$$\mathbb{L}_1 = \{ \}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-7; -2[$$

2. Fall: $x+2 < 0$

$x < -2$

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad | \cdot (x+2)$$

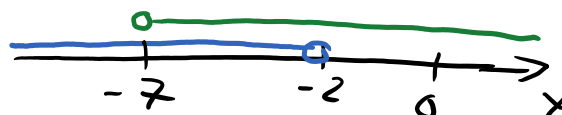
$$2x-1 < 3 \cdot (x+2)$$

ACHTUNG: Nenner negativ!

$$2x-1 < 3x+6 \quad | -2x-6$$

$$-7 < x$$

$$x > -7$$



$$\mathbb{L}_2 =]-7; -2[$$

3 Typen:

- ① x steht in der 1. Potenz, z.B. $3x+5 < 2x+1$
Lösungsstrategie: Nach x auflösen

- ② x steht in einer höheren Potenz, z.B. $x^2-5x+6 < 0$
Nach 0 auflösen, dann faktorisieren, dann Vorzeichen-tabelle

- ③ Bruchungleichung, z.B. $\frac{1}{x+2} < 5$

Definitionsmenge, Fallunterscheidung bezüglich Vorzeichen des Nenners

Ungleichungen Übungsaufgaben

Montag, 18. September 2017

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichungen

a) $|x - 3| \geq 5$ b) $x^2 - 5x + 6 < 0$

2. Für welche Werte gelten die Ungleichungen:

a) $x + 2 \geq 2x + 3$ b) $\frac{x+2}{x-1} \leq 4$ c) $x^3 - 6x^2 > 6 - 11x$ d) $\frac{1}{x+2} > 1$

1a) $|x - 3| \geq 5$

1. Fall: $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$x - 3 \geq 5 \quad | + 3$

$x \geq 8$

$\mathbb{L}_1 = [8; \infty[$

2. Fall: $x - 3 < 0$

$x < 3$

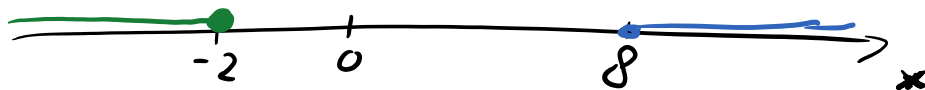
$-(x - 3) \geq 5 \quad | : (-1)$

$x - 3 \leq -5 \quad !!! \geq \rightarrow \leq$

$x \leq -2$

$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -2]$

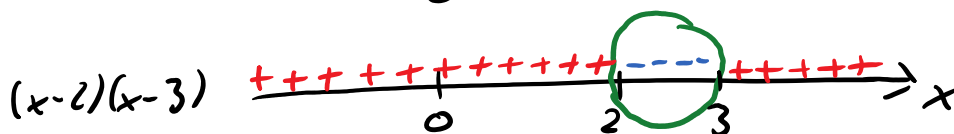
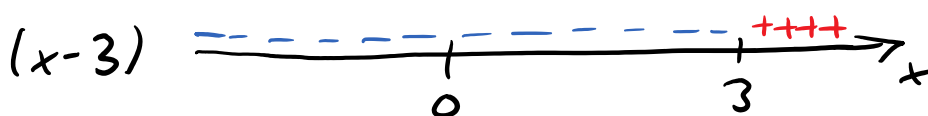
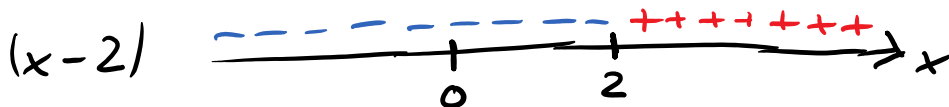
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; -2] \cup [8; \infty[= \mathbb{R} \setminus]-2; 8[$



$x^2 - 5x + 6 < 0$

$(x - 2)(x - 3) < 0$

Vorzeichenentabelle:



$\mathbb{L} =]2; 3[$

$$\bullet \quad x + 2 \geq 2x + 3 \quad | -x - 3$$

$$-1 \geq x$$

$$\mathbb{L} =]-\infty; -1]$$

$$\text{b) } \frac{x+2}{x-1} \leq 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens des Nenners:

1. Fall: $x - 1 > 0$

$$x > 1$$

$$\frac{x+2}{x-1} \leq 4 \quad | \cdot (x-1)$$

$$x+2 \leq 4 \cdot (x-1)$$

$$x+2 \leq 4x-4 \quad | -x+4$$

$$6 \leq 3x \quad | :3$$

$$2 \leq x$$

$$x \geq 2$$

$$\mathbb{L}_1 = [2; \infty[$$

2. Fall: $x - 1 < 0$

$$x < 1$$

$$\frac{x+2}{x-1} \leq 4 \quad | \cdot (x-1)$$

$$x+2 \geq 4 \cdot (x-1)$$

$$x+2 \geq 4x-4 \quad | -x+4$$

$$6 \geq 3x \quad | :3$$

$$2 \geq x$$

$$x \leq 2$$

$$\mathbb{L}_2 =]-\infty; 1[$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; 1[\cup [2; \infty[= \mathbb{R} \setminus [1; 2[$$

$$\text{c) } x^3 - 6x^2 > 6 - 11x$$

$$x^3 - 6x^2 > 6 - 11x \quad | +11x - 6$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$$

Faktorisieren mit Polynomdivision

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

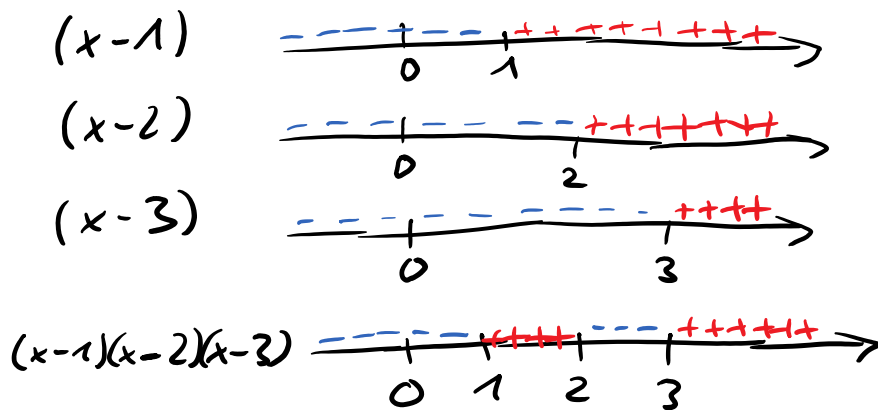
$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$

$$\begin{array}{r}
 -5x^2 + 11x - 6 \\
 -(-5x^2 + 5x) \\
 \hline
 6x - 6 \\
 -(6x - 6) \\
 \hline
 - -
 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0$$



$$\mathbb{L} =]1; 2[\cup]3; \infty[$$

d) $\frac{1}{x+2} > 1$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Fallunterscheidung:

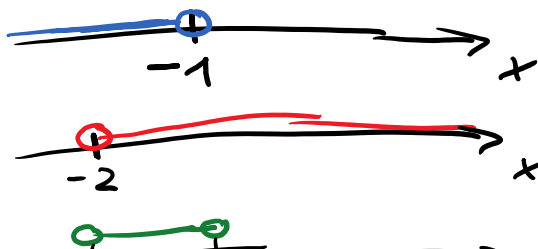
1. Fall: $x+2 > 0$
 $x > -2$

$$\frac{1}{x+2} > 1 \quad | \cdot (x+2)$$

$$1 > x+2 \quad | -2$$

$$-1 > x$$

$$x < -1$$



2. Fall: $x+2 \leq 0$
 $x \leq -2$

$$\frac{1}{x+2} > 1 \quad | \cdot (x+2)$$

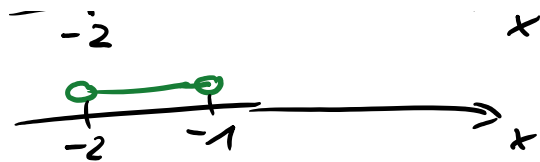
$$1 < x+2 \quad | -2$$

$$-1 \leq x$$

$$x > -1$$

$$\mathbb{L}_2 = \{ \}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-2; -1[$$



$$U_1 =]-2; -1[$$

$$U = U_1 \cup U_2 =]-2; -1[$$

Betragsungleichungen 1

Montag, 18. September 2017

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

- a) $2x - 8 > |x|$
- b) $|x - 4| \geq x^2$ (Auch grafisch lösen)
- c) $|x| \leq x - 2$

a) 1. Fall: $x \geq 0$

$$2x - 8 > x \quad | -x + 8$$

$$x > 8$$

$$\mathbb{L}_1 =]8; \infty[$$

2. Fall: $x < 0$

$$2x - 8 > -x \quad | +x + 8$$

$$3x > 8 \quad | :3$$

$$x > \frac{8}{3}$$

$$\mathbb{L}_2 = \{ \}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]8; \infty[$$

a) $|x - 4| \geq x^2$ (Auch grafisch lösen)

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x - 4 \geq 0$

$$x \geq 4$$

$$x - 4 \geq x^2 \quad | -x + 4$$

$$0 \geq x^2 - x + 4$$

$$x^2 - x + 4 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \downarrow$$

$$\mathbb{L}_1 = \{ \}$$

2. Fall: $x - 4 < 0$

$$x < 4$$

$$-(x - 4) \geq x^2$$

$$-x + 4 \geq x^2 \quad | +x - 4$$

$$0 \geq x^2 + x - 4$$

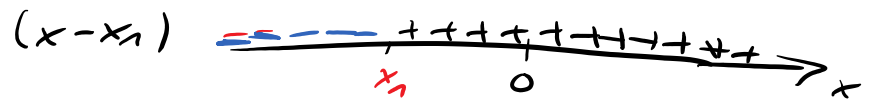
$$x^2 + x - 4 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\left(x - \underbrace{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}_{x_1} \right) \left(x - \underbrace{\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}}_{x_2} \right) \leq 0$$



$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 =$$

$$= \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right]$$



$$\underline{u}_2 = \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \right]$$

Betragsungleichungen 2

Montag, 18. September 2017 20:33

Bestimmen Sie die reellen Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

- a) $|x - 1| \geq |x + 2|$
- b) $-x^2 \leq |x + 4|$
- c) $|x + 2| \geq x^2$

b) $-x^2 \leq |x + 4|$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x + 4 \geq 0$

$x \geq -4$

$$-x^2 \leq x + 4 \quad | +x^2$$

$$0 \leq x^2 + x + 4$$

$$x^2 + x + 4 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \downarrow$$

$$\mathbb{L}_1 = [-4; \infty[$$

2. Fall: $x + 4 < 0$

$x < -4$

$$-x^2 \leq -(x + 4)$$

$$-x^2 \leq -x - 4 \quad | +x^2$$

$$0 \leq x^2 - x - 4$$

$$x^2 - x - 4 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 2,5$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < -\frac{3}{2}$$

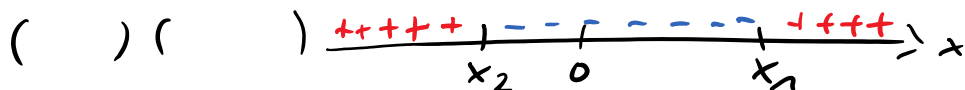
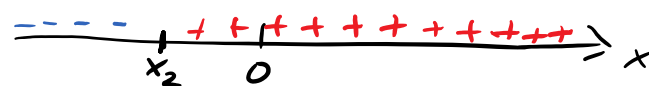
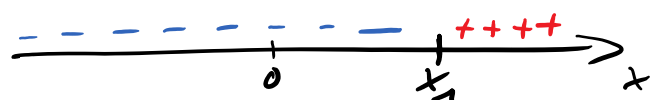
$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\left(\right) \left(\right)$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{R}$$



$$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -4[$$

Lineare Gleichungssysteme

Dienstag, 19. September 2017

Definition

$$\text{I } x + 2y = 4 \quad \rightarrow \quad x = 4 - 2y \quad \text{in II} \quad x + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\text{II } 2x - y = 3 \quad 2 \cdot (4 - 2y) - y = 3 \\ 8 - 5y = 3 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 1} \quad \text{in I} \quad \underline{x = 2}$$

Einsetzungsverfahren:

Eine (beliebige) Gleichung nach einer Unbekannten auflösen

→ In andere Gleichung einsetzen

Einsetzungsverfahren

Dienstag, 19. September 2017

Beispiel 1: $I \ x + y = 11$
 $II \ 2x - 3y = -8$

$I \ -x + y + z = 0$
Beispiel 2: $II \ x - 3y - 2z = 5$
 $III \ 5x + y + 4z = 3$

$$\begin{aligned} x &= 11 - y \text{ in II} \\ 2(11 - y) - 3y &= -8 \\ 22 - 2y - 3y &= -8 \\ 22 - 5y &= -8 \quad | -22 \\ -5y &= -30 \\ \underline{y = +6} & \text{ in I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 6 &= 11 \\ \underline{x} &= \underline{5} \end{aligned}$$

Additionsverfahren

Dienstag, 19. September 2017

$$\begin{array}{l} I \quad -x + y + z = 0 \\ \text{Beispiel: } II \quad x - 3y - 2z = 5 \\ III \quad 5x + y + 4z = 3 \end{array}$$

$$5 \cdot I \quad -5x + 5y + 5z = 0$$

Strategie: Gleichung so addieren oder subtrahieren, dass Variablen herausfallen.

$$I + II \quad -2y - z = 5 \quad (A)$$

$$3A : \quad -6y - 3z = 15$$

$$5 \cdot I + III \quad 6y + 9z = 3 \quad (B)$$

$$3A + B \quad 6z = 18 \quad \rightarrow \quad \underline{z = 3} \quad \text{in } A$$

$$A \quad -2y - 3 = 5 \quad \rightarrow \quad \underline{y = -4} \quad \text{in } I$$

$$I \quad -x - 4 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x = -1}$$

Graphische Lösung linearer GLS mit 2 Unbekannten

Dienstag, 19. September 2017

Beispiel 1: I $x + y = 2$
II $3x - 2y = 1$

$$\underline{y = -x + 2}$$

Geradengleichung 1

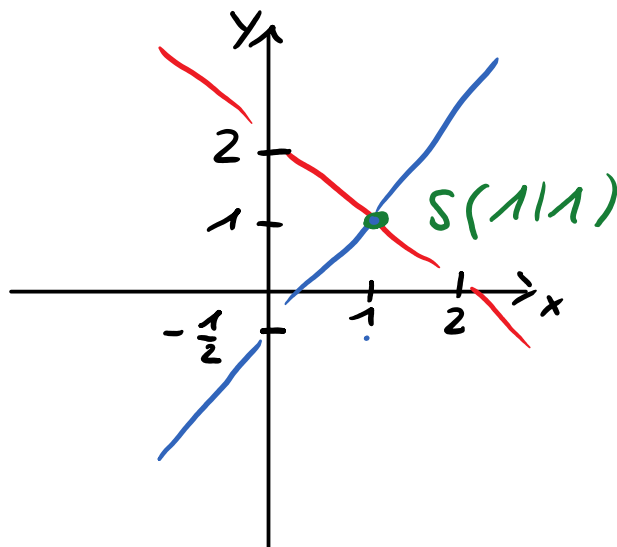
$$-2y = 1 - 3x \quad | -3x$$

$$-2y = -3x + 1 \quad | :(-2)$$

$$\underline{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} \quad \text{Geradengleichung 2}$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$



Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Dienstag, 19. September 2017

① Anzahl Gleichungen $\geq$ Anzahl Variablen

② Gleichungen müssen linear unabhängig sein :

$$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot II = 0 \rightarrow \lambda_1 \text{ und } \lambda_2 \text{ müssen } 0 \text{ sein}$$

$$\begin{array}{l} \text{Beispiel: } I \quad x + y = 2 \\ II \quad 2x + 2y = 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \\ II \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{GLS nicht eindeutig lösbar,} \\ \text{denn } II = 2 \cdot I \\ -2 \cdot I + 1 \cdot II = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Beispiel: } I \quad x + y + z = 0 \\ II \quad 2x - y + 3z = 1 \\ III \quad 3x \quad + 4z = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1 \cdot I + 1 \cdot II = 1 \cdot III \\ \rightarrow \text{linear abhängige Gleichungen,} \\ \text{GLS ist nicht eindeutig lösbar} \end{array}$$

Übungsaufgabe Lineare Gleichungssysteme 1

Dienstag, 19. September 2017

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$I \quad u + 5v + w = -10$$

$$II \quad -4u - 2v - 3w = -10$$

$$III \quad 3u + v - w = -4$$

$$3I \quad 3u + 15v + 3w = -30$$

Strategie: zuerst w eliminieren

$$I + III \quad 4u + 6v = -14 \quad | :2 \quad 2u + 3v = -7 \quad (A)$$

$$3I + II \quad -u + 13v = -40 \quad (B) \quad -2u + 26v = -80 \quad (2B)$$

$$A + 2B \quad 29v = -87 \quad | :29 \quad \Rightarrow \underline{v = -3} \quad \text{in } A$$

$$2u - 9 = -7 \quad \Rightarrow \underline{u = 1} \quad \text{in } III$$

$$\underline{w = 4}$$

Übungsaufgabe zu linearen Gleichungssystemen 2

Dienstag, 19. September 2017

Beweisen Sie, dass das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt:

$$I \quad 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$II \quad 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

$$III \quad 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$3 \cdot II \quad 12x_1 - 12x_2 + 3x_3 = 0$$

$$I + 3 \cdot II \quad 14x_1 - 7x_2 = 0 \quad | :7$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \quad (A)$$

$$III \quad 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \quad (B)$$

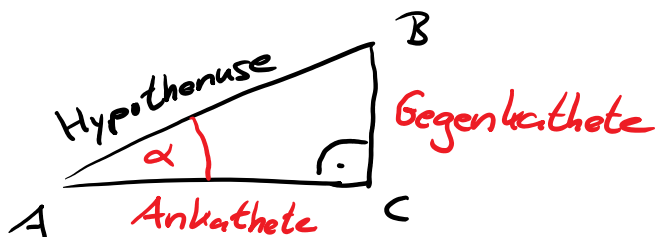
$$A - B \quad 0 = 0$$

Gleichungen sind linear abhängig $\rightarrow$ unendlich viele Lösungen

Trigonometrische Funktionen

Dienstag, 19. September 2017

Grundbegriffe, Sinus und Kosinus am Einheitskreis, Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion, besondere Werte und Graphen

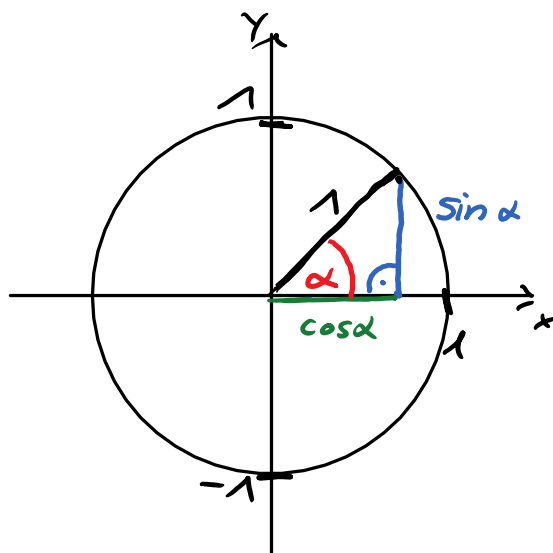


$$\sin \alpha = \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Hypothense"}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{"Ankathete"}}{\text{"Hypothense"}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Ankathete"}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

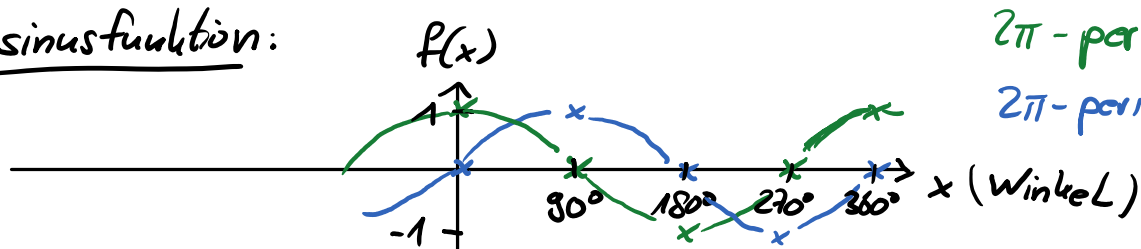
Einheitskreis (Kreis mit Radius $r=1$):



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Sinusfunktion: $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$

Kosinusfunktion:

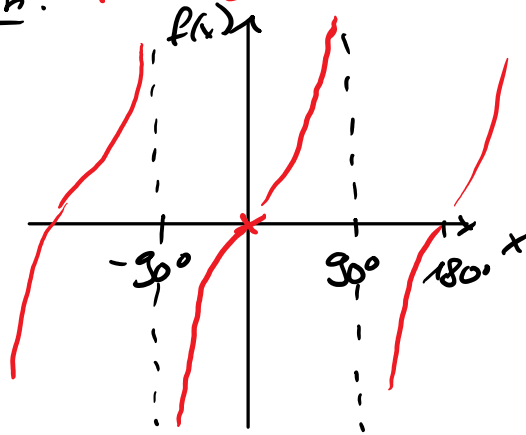


2π -periodisch

2π -periodisch

Tangensfunktion: $f(x) = \tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



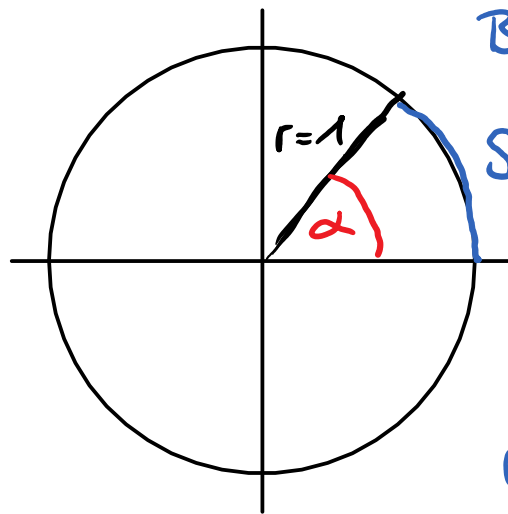
$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Ankathete"}} \\ &= \frac{\frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Hypotenuse"}}}{\frac{\text{"Ankathete"}}{\text{"Hypotenuse"}}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

π -periodisch

Bogenmaß

Dienstag, 19. September 2017

Einheitskreis:



Bogenlänge:

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$S = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

Umrechnungsformel
Gradmaß $\rightarrow$ Bogenmaß

Wichtige Winkel:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π

Besondere Werte für Sinus, Kosinus und Tangens:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	0

Wichtige trigonometrische Beziehungen

Dienstag, 19. September 2017

$\sin(x) = -\sin(-x)$ Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

$\cos(x) = \cos(-x)$ Achsensymmetrie zur y-Achse

$\tan(x) = -\tan(-x)$ Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

„Periodizität“

$$\tan(x) = \tan(x + \pi)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

„Trigonometrischer Pythagoras“

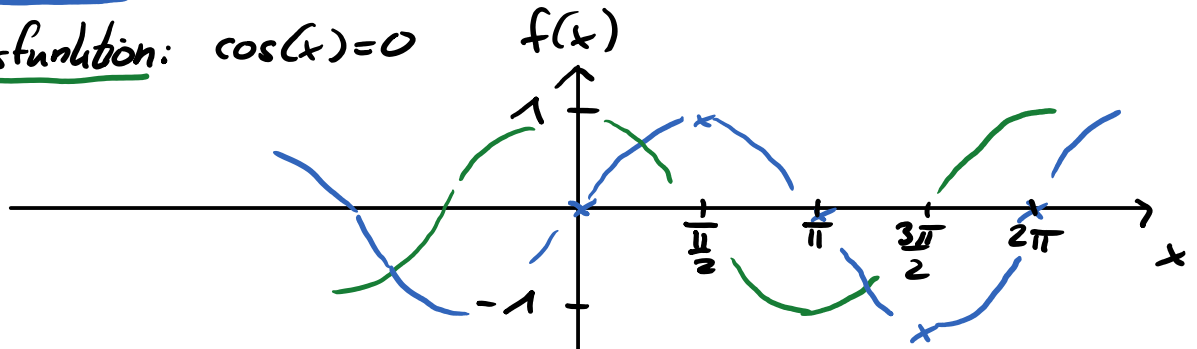
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

Nullstellen trigonometrischer Funktionen

Mittwoch, 20. September 2017

Sinusfunktion: $\sin(x) = 0$

Kosinusfunktion: $\cos(x) = 0$



... $N_1(\pi/0)$; $N_2(2\pi/0)$; $N_3(3\pi/0)$; ...

Nullstellen: $N(k\pi/0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Sinusfunktion

... $N_1(\frac{\pi}{2}/0)$; $N_2(\frac{3\pi}{2}/0)$; $N_3(\frac{5\pi}{2}/0)$; ...

Nullstellen: $N(k\pi - \frac{\pi}{2}/0)$ $k \in \mathbb{Z}$

Kosinusfunktion

Tangensfunktion: $\tan(x)$

Nullstellen:

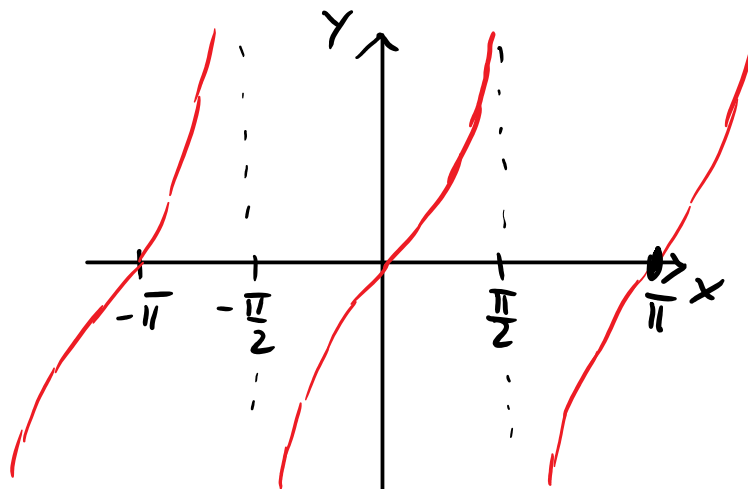
$N_1(\pi/0)$

$N_2(2\pi/0)$

;

$N(k\pi/0)$

$k \in \mathbb{Z}$



Arkusfunktionen

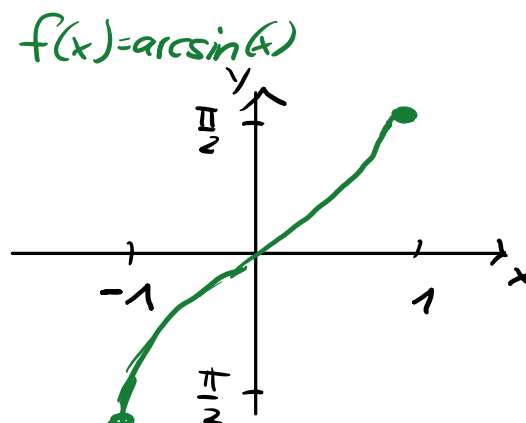
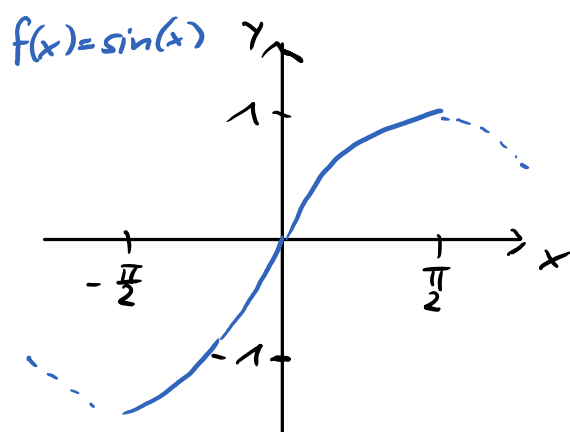
Mittwoch, 20. September 2017

Herausforderung: Trigonometrische Gleichungen lösen, z.B.

$$\sin(x) = 0,1 \rightarrow x = \arcsin(0,1)$$

„Arkussinusfunktion“

Die Arkussinusfunktion $y = \arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion der Sinusfunktion $y = \sin(x)$. $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



Beispiele:

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin(0,5) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

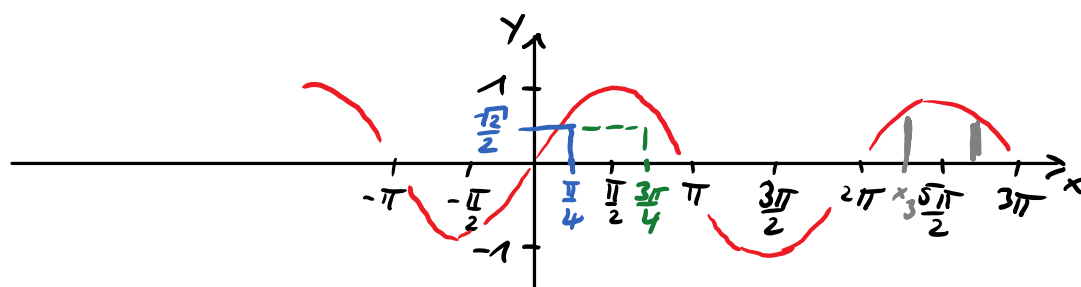
$$\arcsin(0,1) = 0,10\dots$$

$$\sin(x) = 0,1 \rightarrow x = \arcsin(0,1)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}; x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi; x_5 = \frac{\pi}{3} + 4\pi; x_7 = \frac{\pi}{3} + 6\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3}; x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi; x_6 = -\frac{\pi}{3} + 4\pi; x_8 = -\frac{\pi}{3} + 6\pi$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$



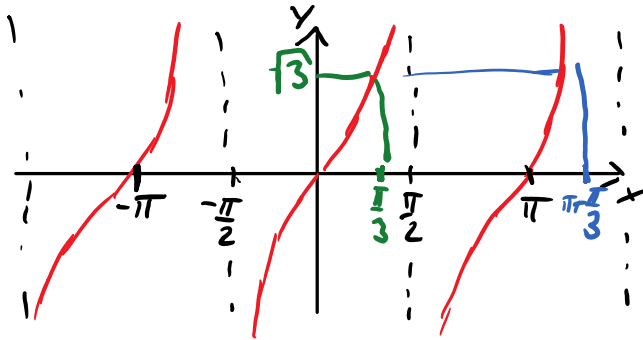
$$x_2 = \frac{3\pi}{4}; x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{9\pi}{4}; x_4 = \frac{11\pi}{4};$$

$$x_5 = x_1 + 4\pi = \frac{17\pi}{4}; x_6 = \frac{19\pi}{4};$$

...

$$\tan(x) = \sqrt{3} \rightarrow x_1 = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} ; x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi ; x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi$$

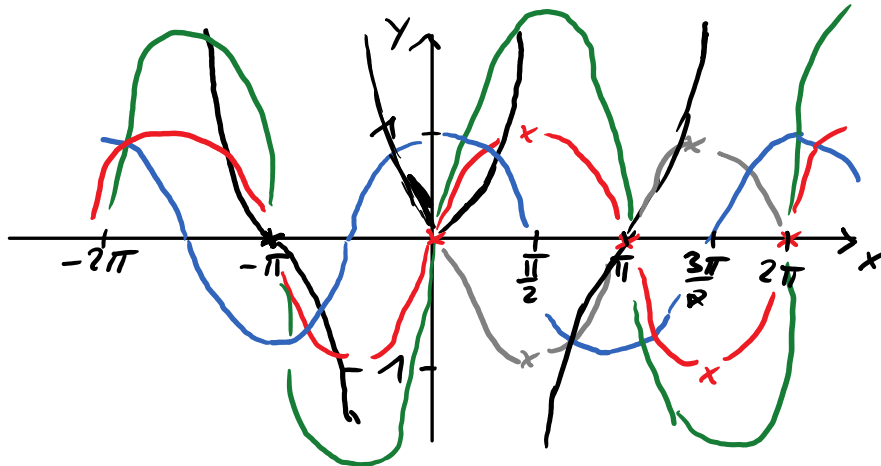
$$x_k = \frac{\pi}{3} + (k-1) \cdot \pi$$



Trigonometrischen Funktionen Übung

Mittwoch, 20. September 2017

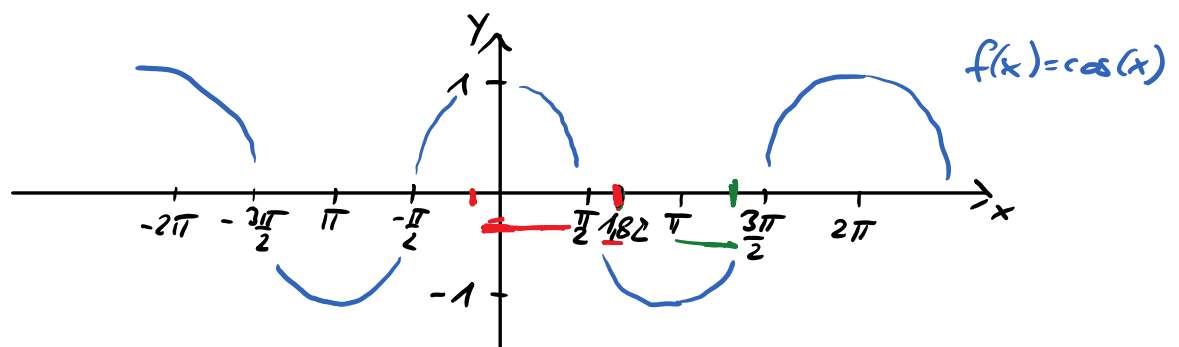
- Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = 2 \sin x$, $f(x) = \sin(x - \pi)$ und $f(x) = \tan |x|$ aus dem Stegreif.
- Geben Sie die Lösungsmenge der folgende Gleichungen an:
 - $\sin(x) - \frac{1}{2} = 1$
 - $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $\tan(x) = \sqrt{3}$
 - $\sin(x) = 2$
 - $\sin(x) = 0,1$ (Mit Taschenrechner die 1.Lösung bestimmen)
 - $\cos(x) = -0.25$ (Mit Taschenrechner die 1.Lösung bestimmen)



$$\sin(x) - \frac{1}{2} = 1 \quad \rightarrow \sin(x) = \frac{3}{2} \quad \rightarrow x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) = \text{↯}$$

- a) $\cos(x) = -0.25$ (Mit Taschenrechner die 1.Lösung bestimmen)

$$x_1 = \arccos(-0,25) = 1,82$$



$$x_2 = 2\pi - 1,82 ; x_3 = x_1 + 2\pi = 1,82 + 2\pi ; x_5 = x_1 + 4\pi = 1,82 + 4\pi$$

$$x_4 = x_2 + 2\pi = 4\pi - 1,82 ; x_6 = x_2 + 4\pi = 6\pi - 1,82$$

Gebrochenrationale Funktionen

Mittwoch, 20. September 2017

Definition (echt und unecht gebrochen-rationale Funktionen), Definitionslücken, Nullstellen, Polstellen

$$f(x) = \frac{\text{"Polynom 1"}}{\text{"Polynom 2"}} = \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

n : Grad des Polynoms im Zähler

m : Grad des Polynoms im Nenner

$n \geq m$: unecht gebrochenrationale Funktion

$n < m$: echt gebrochenrationale Funktion

Beispiele:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+4}$$

echt gebrochen-
rational

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

unecht gebrochenrational

Nullstellen: „Zählerpolynom = 0“

Definitionslücken: „Nennerpolynom = 0“

Grenzwert einer Funktion

Mittwoch, 20. September 2017

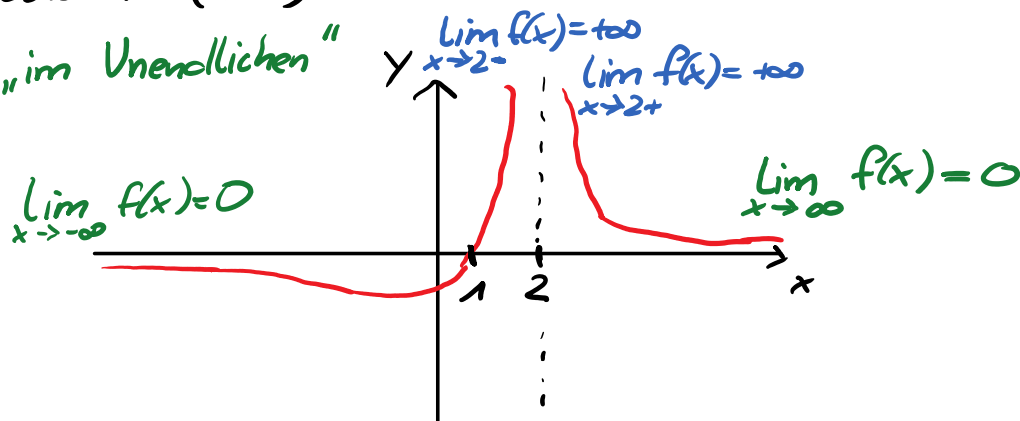
Schreibweisen

Beispiel: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \frac{x-1}{(x-2)^2}$

Nullstellen: $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow N(1|0)$

Definitionslücken: $(x-2)^2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Verhalten „im Unendlichen“



Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken und fixen Werten x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

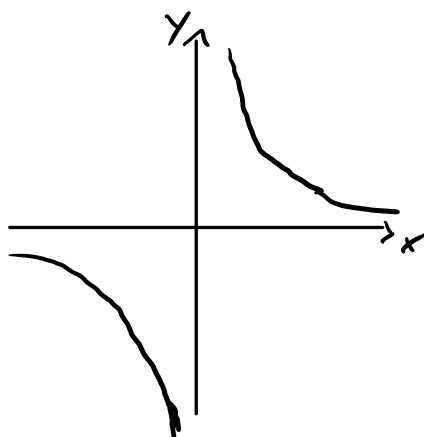
Beispiele: $f(x) = \frac{1}{x}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Unstetigkeiten bei gebrochen-rationalen Funktionen und asymptotisches Verhalten im Unendlichen

Mittwoch, 20. September 2017

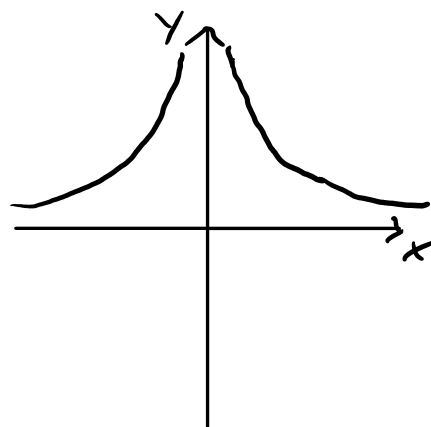
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Polstelle 1. Ordnung
(mit Vorzeichenwechsel)

→ einfache, oder ungerade
Nennernullstellen

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Polstelle 2. Ordnung
(ohne Vorzeichenwechsel)

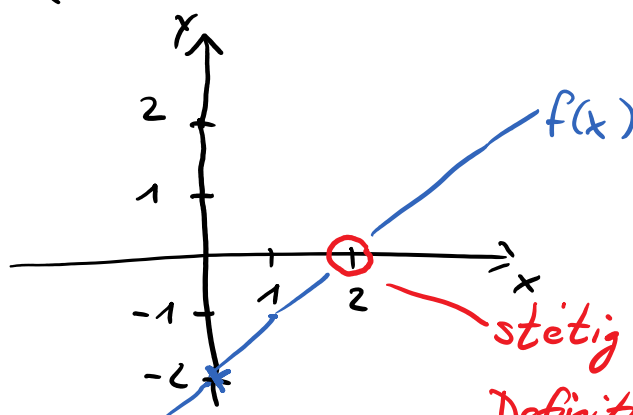
→ doppelte, vierfache, sechsfache...
Nennernullstellen

Weiterer Fall von Definitionslücke:
stetig hebbare Definitionslücke

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$= \frac{(x-2)^2}{(x-2)} = x-2$$



stetig hebbare
Definitionslücke

Behebung der Definitionslücke:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{wenn } x \neq 2 \\ 0, & \text{wenn } x = 2 \end{cases}$$

Gebrochenrationale Funktionen Beispiele

Mittwoch, 20. September 2017

Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad \text{echt gebrochenrationale Funktion}$$

$$\text{Definitionsmenge } D: x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$
$$x_1 = -2; x_2 = 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Nullstellen: $x = 0 \rightarrow N(0|0)$ einzige Nullstelle

$$\text{Symmetrie: } f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x}{x^2 - 4} = - \underbrace{\frac{x}{x^2 - 4}}_{f(x)} = -f(x)$$

$\rightarrow f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

$$\text{Verhalten „im Unendlichen“: } f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

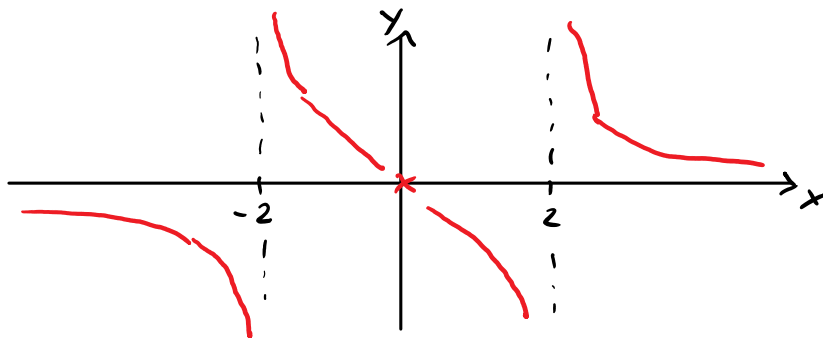
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

„Zähler negativ“

(„negative Zahl“) („sehr kleine negative Zahl“)

„Zähler positiv“

(„sehr kleine pos. Zahl“)(„positive Zahl“)



$$\text{Beispiel: } f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 32x + 40}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10} = \frac{2(x-2)(x-2)(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

$$\text{Definitionsmenge: } D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1; 2\}$$

$$f(x) = \frac{2(x-2)}{x-1}$$

Nullstellen: $2(x-2)=0 \rightarrow x=2$ keine Nullstelle

Verhalten im Unendlichen und in der Umgebung von Definitionslücken:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5+} f(x) = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0$$

Exponentialfunktion

Donnerstag, 14. September 2017

Definition, Eigenschaften, Graphen

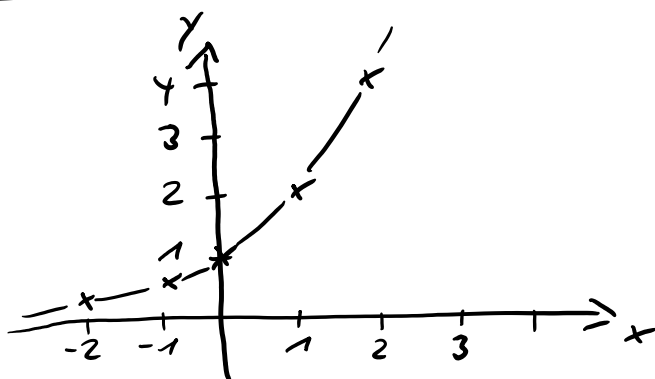
$$f(x) = a^x$$

a : Basis

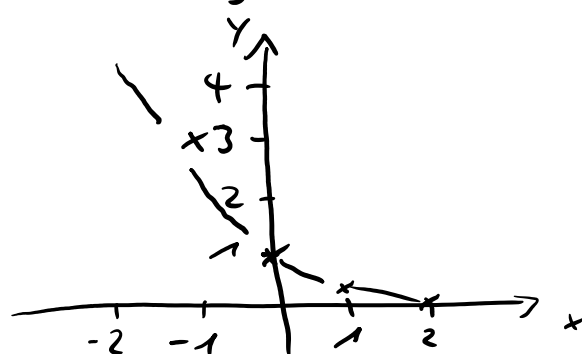
$$a > 0$$

x : Exponent

Beispiele: $f(x) = 2^x$



$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



Eigenschaften:

	$y = a^x \ (a > 1)$	$y = a^x \ (0 < a < 1)$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton fallend
Grenzwerte	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Besondere Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$

e : Eulerzahl $e \approx 2,718...$

Exponentialfunktion - Abkling- und Wachstumsfunktionen

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Eigenschaften, Graphen

Lineare Funktionen

Fritz hat 10 € und spart jeden Tag 1 € dazu.

$$G(t) = 10 + 1 \cdot t$$

t: Tage

exponentielle Wachstumsfunktion

Fritz hat 1000 € auf seinem Konto zu 5% p.a. verzinst.

$$G(t) = ?$$

$$t=0: 1000 \text{ €}$$

$$t=1 \text{ Jahr: } 1000 \text{ €} \cdot 1,05$$

$$t=2 \text{ Jahre: } 1000 \text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ 1000 \text{ €} \cdot 1,05^2$$

$$t=3 \text{ Jahre: } 1000 \text{ €} \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \\ 1000 \text{ €} \cdot 1,05^3$$

$$t=n \text{ Jahre: } 1000 \text{ €} \cdot 1,05^n$$

$$G(n) = 1000 \text{ €} \cdot 1,05^n$$

n: Anzahl Jahre

exponentielle Wachstumsfunktion:

$$y(t) = y_0 \cdot a^t \quad a > 1 ; t \geq 0$$

y_0 : Anfangsbestand

a: Wachstumsrate

exponentielle Abklingfunktion:

2 Möglichkeiten: ① $y(t) = y_0 \cdot a^t$ $0 < a < 1$

② $y(t) = y_0 \cdot a^{-t}$ $a > 1$

Logarithmusfunktion

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Eigenschaften, Graphen

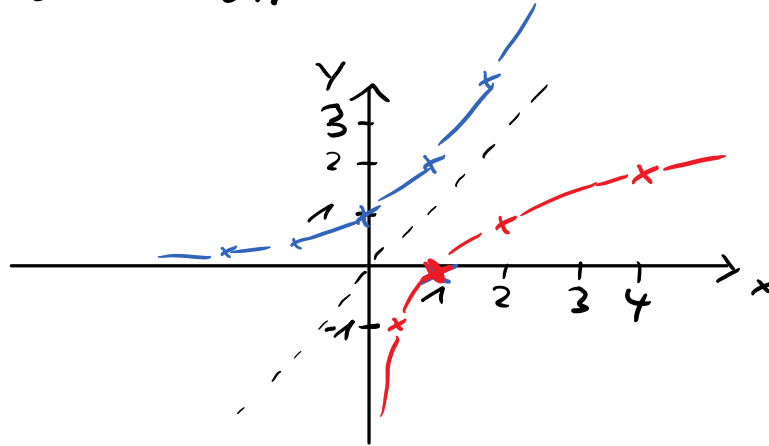
$$y = a^x \rightarrow x = \log_a(y)$$

$$y = \log_a x$$

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = \log_2 x$$



Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

	$y = a^x \ (a > 1)$	$y = \log_a x$
Definitionsbereich:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Wertebereich:	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Nullstellen:	/	$x_0 = 1$

Spezielle Logarithmen:

Basis 2 : $y = \lg x = \log_2 x$

Basis 10 : $y = \lg x = \log_{10} x$

Basis e : $y = \ln x = \log_e x$

Zusätzliche Rechenregeln:

(1) $a^{\log_a x} = x$

(2) $\log_a a^x = x$

$$(3) \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Beispiel: $G(n) = 1000 \cdot 1,05^n$

Nach welcher Zeit gilt $G(n) = 1200$?

$$1200 = 1000 \cdot 1,05^n \quad |:1000$$

$$1,2 = 1,05^n$$

$$n = \log_{1,05} 1,2 = \frac{\log 1,2}{\log 1,05} = \underline{\underline{3,74 \text{ (Jahre)}}}$$

Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion

Donnerstag, 21. September 2017

Übungsaufgaben zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

Donnerstag, 21. September 2017

Beispiel 1: Eine Bakterienkultur besteht aus 10 Individuen. Sie verdoppeln sich alle 20 Minuten. Wie sähe die Funktion $N(t)$ aus, die die Anzahl der Bakterien beschreibt? Wie viele Bakterien hat man nach 3,5 Std.? Nach welcher Zeit liegen 500 Individuen vor?

Beispiel 2: Sie haben 1000€ auf dem Konto und erhalten 3% Zinsen pro Jahr. Welche Funktion beschreibt ihr Geldvolumen in Abhängigkeit von der Zeit? Wie lange dauert es, bis sich ihr Geld verdoppelt hat?

Beispiel 3: Der Schaum auf ihrem Bier ist 10 cm hoch. Pro Minute halbiert sich die Höhe. Welche Funktion beschreibt die Höhe des Schaums als Funktion der Zeit? Wie hoch ist der Schaum nach 3 Min 15 Sek? Nach welcher Zeit ist der Schaum noch 1 cm hoch?

① geg.: $N_0 = 10$; $t_0 = 20 \text{ min}$

ges.: $N(t)$

$t=0$: $N(t=0) = N_0 = 10$

$t=20 \text{ min}$: $N(t=20 \text{ min}) = N_0 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$

$t=40 \text{ min}$: $N(t=40 \text{ min}) = N_0 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^2 = 40$

$t=60 \text{ min}$: $N(t=60 \text{ min}) = N_0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^3 = 80$

$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$ t in Minuten

3,5 Std $\rightarrow$ 210 min

$N(t=210 \text{ min}) = 10 \cdot 2^{\frac{210}{20}} = 10 \cdot 2^{10.5} = \dots$

ges.: t ($N=500$)
 $500 = 10 \cdot 2^{\frac{t}{20}} \quad | :10$
 $50 = 2^{\frac{t}{20}}$
 $\frac{t}{20} = \log_2 50 \quad | \cdot 20$
 $t = 20 \cdot \log_2 50 \approx 112.28$

Beispiel 3: Der Schaum auf ihrem Bier ist 10 cm hoch. Pro Minute halbiert sich die Höhe. Welche Funktion beschreibt die Höhe des Schaums als Funktion der Zeit? Wie hoch ist der Schaum nach 3 Min 15 Sek? Nach welcher Zeit ist der Schaum noch 1 cm hoch?

geg.: $h_0 = 10 \text{ cm}$; $t_H = 1 \text{ min}$

ges.: $h(t)$

$t=0 \text{ min}$: $h(t=0) = h_0 = 10 \text{ cm}$

$t=1 \text{ min}$: $h(t=1 \text{ min}) = h_0 \cdot \frac{1}{2} = h_0 \cdot 2^{-1}$

$t=2 \text{ min}$: $h(t=2 \text{ min}) = h_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = h_0 \cdot (2^{-1})^2 = h_0 \cdot 2^{-2}$

$t=3 \text{ min}$: $h(t=3 \text{ min}) = h_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = h_0 \cdot 2^{-3}$

$h(t) = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = h_0 \cdot 2^{-t}$

3 min 15 sek $\rightarrow$ 3,25 min
 $(1)^{3,25}$

ges.: t ($h=1 \text{ cm}$)
 $1 = 10 \cdot 2^{-t} \quad | :10$
 $\frac{1}{10} = 2^{-t}$

$$\begin{aligned}
 3 \text{ min } 15 \text{ sek} &\rightarrow 3,25 \text{ min} \\
 h(t=3,25 \text{ min}) &= 10 \text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3,25} = \dots \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{10} = 2^{-t} \\ -t = \log_2\left(\frac{1}{10}\right) \quad | :(-1) \\ t = -\log_2\left(\frac{1}{10}\right) = \underline{\log_2 10} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Beispiel : Barometrische Höhenformel

$$p_0 = 1013 \text{ hPa} ; h_{\frac{1}{2}} = 5500 \text{ m}$$

$$p(h) = p_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5500}} \quad p(h) = p_0 \cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$$

$$p(h) = p_0 \cdot \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\frac{h}{5500}}$$

$$2 = e^{\ln(2)}$$

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot h}{5500}}$$

Exponentialfunktion Übungen

Donnerstag, 21. September 2017

1. Ein Körper besitzt zur Zeit $t=0$ die Temperatur $T_0=30^\circ\text{C}$ und wird dann durch einen Luftstrom der konstanten Temperatur $T_L=20^\circ\text{C}$ gekühlt, wobei
$$T(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{-kt} + T_L; t \geq 0$$

gilt.
 - a) Nach 5 min beträgt die Körpertemperatur 28°C . Bestimmen Sie aus diesem Messwert die Konstante k .
 - b) Welche Temperatur besitzt der Körper nach 60 min.
 - c) Wann ist der Abkühlungsprozess beendet, welche Temperatur T_E besitzt dann der Körper? Skizzieren Sie den Temperaturverlauf.
2. Fritzl hat jetzt 1200 € auf seinem Konto, nachdem er anfangs 1000 € zu einem Zinssatz von 5% angelegt hatte. Wie lange lag das Geld auf dem Konto?

1a) ges.: k

$$\text{geg.: } T(t=5\text{min}) = 28^\circ\text{C} ; T_0 = 30^\circ\text{C} ; T_L = 20^\circ\text{C} ; t = 5\text{min}$$

$$28^\circ\text{C} = 10^\circ\text{C} \cdot e^{-k \cdot 5\text{min}} + 20^\circ\text{C} \quad | - 20^\circ\text{C}$$

$$8^\circ\text{C} = 10^\circ\text{C} \cdot e^{-k \cdot 5\text{min}} \quad | : 10^\circ\text{C}$$

$$0,8 = e^{-k \cdot 5\text{min}} \quad | \ln$$

$$\ln 0,8 = -k \cdot 5\text{min} \quad | : (-5\text{min})$$

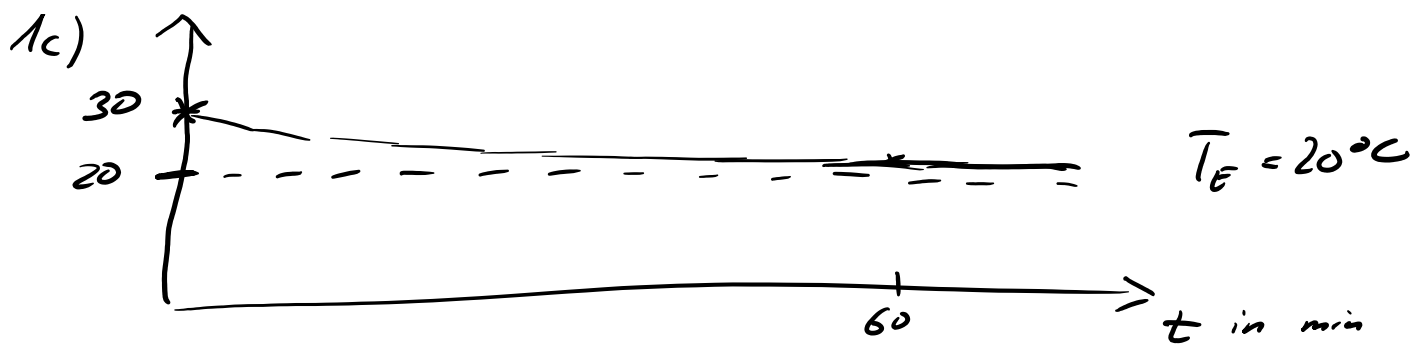
$$k = - \frac{\ln 0,8}{5\text{min}} \approx$$

1b) ges.: $T(t=60\text{min})$

$$T(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{-kt} + T_L$$

$$\begin{aligned} T(t=60\text{min}) &= (30^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot e^{+\left(\frac{\ln 0,8}{5\text{min}}\right) \cdot 60\text{min}} + 20^\circ\text{C} \\ &= 10^\circ\text{C} \cdot e^{12 \cdot \ln 0,8} + 20^\circ\text{C} = 10^\circ\text{C} \cdot 0,8^{12} + 20^\circ\text{C} \\ &= \underline{\underline{20,69^\circ\text{C}}} \end{aligned}$$

$T \text{ in } ^\circ\text{C}$



Exponential- und Logarithmusgleichungen

Donnerstag, 21. September 2017

Beispiele:

1. $\ln e^{\cos x} = 1$

2. $\lg(4x - 5) = 1,5$

3. $\ln(x^2 - 1) = \ln x + 1$

4. $e^{x^2 - 2x} = 2$

5. $\ln \sqrt{x} + 1,5 \cdot \ln x = \ln(2x)$

① $\cos x = 1 \rightarrow x_1 = \arccos(1) = 0$
 $2\pi; x_3 = 4\pi; x_4 = 6\pi$
 $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\lg(4x - 5) = 1,5 \quad | \cdot 10$

$$10^{\lg(4x-5)} = 10^{1,5}$$

$$4x - 5 = 10^{\sqrt{10}} \quad | + 5$$

$$4x = 10^{\sqrt{10}} + 5 \quad | : 4$$

$$x = \frac{5}{2} \sqrt{10} + \frac{5}{4} = \dots$$

$$10^{1,5} = 10 \cdot 10^{0,5} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{\sqrt{10}}$$

③ $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) \quad | e$

$$e^{\ln(x^2-1)} = e^{\ln(x-1)}$$

$$x^2 - 1 = x - 1$$

$$\ln(x^2 - 1) = \ln(x) + 1 \quad | e$$

$$e^{\ln(x^2-1)} = e^{[\ln(x)+1]}$$

$$x^2 - 1 = e^{\ln(x)} \cdot e^1$$

$$x^2 - 1 = x \cdot e \quad | - e \cdot x$$

$$x^2 - ex - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 + 4}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

④ $e^{x^2 - 2x} = 2 \quad | \ln$

$$\ln e^{x^2-2x} = \ln 2$$

$$x^2 - 2x = \ln 2 \quad | -\ln 2$$

$$x^2 - 2x - \ln 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\ln 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \ln 2}$$

$$\textcircled{5} \quad \ln \sqrt{x} + 1,5 \cdot \ln x = \ln(2x)$$

$$\ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln x$$

$$2 \ln x = \ln(2x)$$

$$\ln(x^2) = \ln(2x)$$

$$x^2 = 2x \quad | -2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$(x_1=0); \quad x_2=2$$

$$\frac{1}{2} \ln x + 1,5 \ln x = \ln(2x) \quad | e$$

$$e^{\left[\frac{1}{2} \ln x + 1,5 \ln x\right]} = e^{\ln(2x)}$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln x} \cdot e^{1,5 \ln x} = e^{\ln(2x)}$$

$$e^{\ln x^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\ln x^{1,5}} = e^{\ln(2x)}$$

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{1,5} = 2x$$

$$x^2 = 2x$$

Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Eigenschaften, Graphen

Potenzfunktion: $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Wurzelfunktionen: $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ ($x \geq 0$)

→ Definitionsbereich beachten!

Wurzelfunktionen Übungsaufgaben

Donnerstag, 21. September 2017

Für welche $x \in \mathbb{R}$ nehmen diese Wurzelfunktionen reelle Werte an?

a) $f(x) = \sqrt{2-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

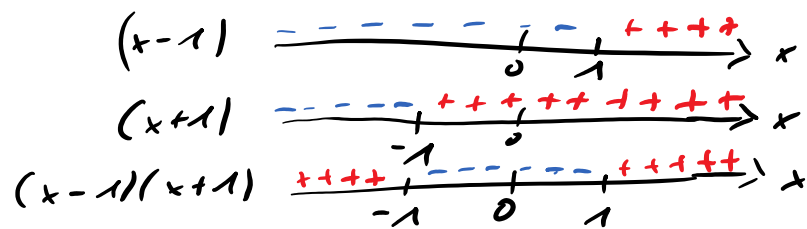
c) $f(x) = \sqrt{(1-x)(x+2)}$

a) $2-x \geq 0 \quad | +x$
 $x \leq 2$
 $x \in]-\infty; 2]$

b) $x^2-1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

Vorzeichen-tabelle:



$x \in]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

$x \in \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$

Vektoren

Donnerstag, 21. September 2017

Definition des Vektors, Spaltenschreibweise, parallele, antiparallele, kollineare Vektoren

Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine Größe, die durch eine Maßzahl (Länge) und eine Richtungsangabe vollständig beschrieben ist.

$|\vec{a}|$: Betrag (oder Länge) des Vektors

Skalare

Masse m

Zeit t

Energie E

Vektoren

Kraft $\vec{F}$

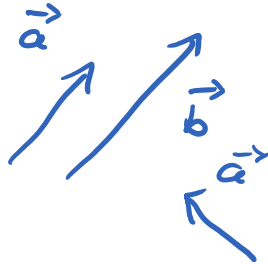
Geschwindigkeit $\vec{v}$

Magnetfeld $\vec{B}$

$|\vec{F}|$

$|\vec{v}|$

parallele Vektoren:



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

senkrechte Vektoren:



$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

gleiche Vektoren:



$$\vec{a} = \vec{b}$$

kollineare Vektoren:



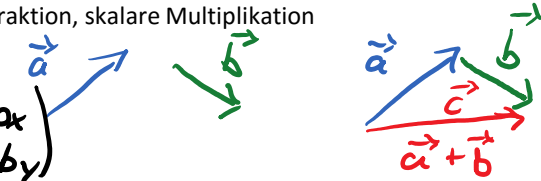
$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln für Vektoren

Donnerstag, 21. September 2017

Vektoroperationen: Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation

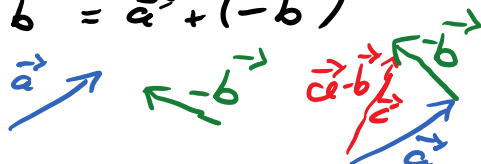
Addition: $\vec{a} + \vec{b}$



$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



skalare Multiplikation: $\lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

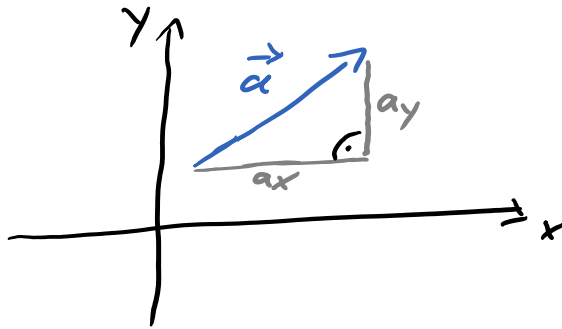


Komponentendarstellung, Betrag des Vektors

Donnerstag, 21. September 2017

Komponentendarstellung, durch 2 Punkte festgelegte Vektoren, Betrag des Vektors

Vektoren im Koordinatensystem:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{„Spaltenschreibweise“}$$

Betrag (oder Länge) des Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

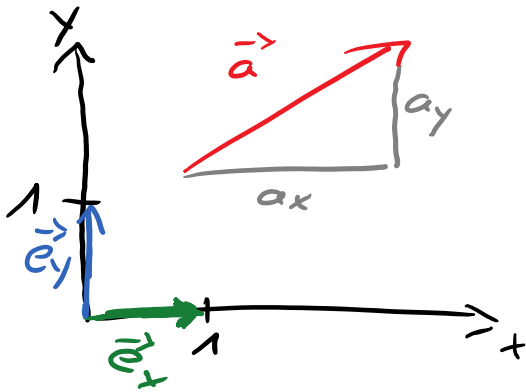
Festlegung durch 2 Punkte:

Anfangspunkt $A(x_A | y_A)$, Endpunkt $B(x_B | y_B)$

„Spitze minus Fuß“ $\rightarrow$ Vektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Komponentendarstellung und Einheitsvektoren:



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

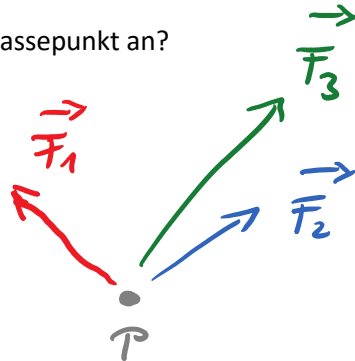
Rechenbeispiel

Donnerstag, 21. September 2017

An einen Massepunkt greifen gleichzeitig drei Kräfte an:

$$\underline{\vec{F}_1} = \begin{pmatrix} -3 \text{ N} \\ 2 \text{ N} \end{pmatrix} \quad \underline{\vec{F}_2} = \begin{pmatrix} 1 \text{ N} \\ 4 \text{ N} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Welche resultierende Kraft greift an dem Massepunkt an?

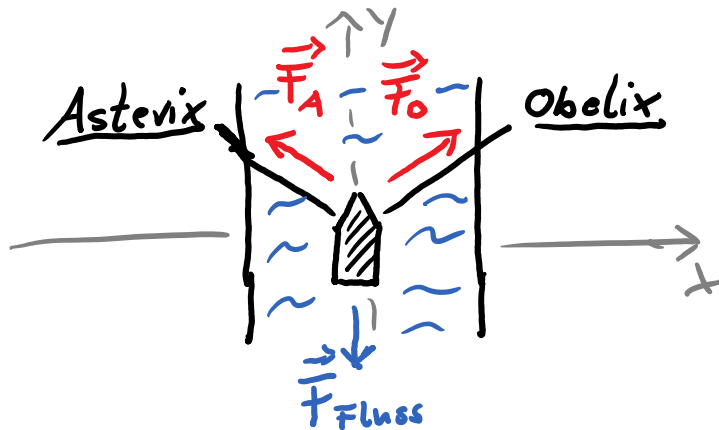


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -3 \text{ N} \\ 2 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \text{ N} \\ 4 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \text{ N} \\ 11 \text{ N} \end{pmatrix}$$
$$|\vec{F}| = \sqrt{(3 \text{ N})^2 + (11 \text{ N})^2} = \sqrt{9 \text{ N}^2 + 121 \text{ N}^2} = \sqrt{130} \text{ N}$$

Rechenbeispiel

Donnerstag, 21. September 2017

Asterix und Obelix ziehen ein ägyptisches Schiff, welches mit Steinen beladen ist, den Nil flussaufwärts. Dabei werden Seile von beiden Ufern aus eingesetzt. Es wirken folgende Kräfte:



$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -1500 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_O = \begin{pmatrix} 1500 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{Fluss}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ N} \\ -3000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Welche resultierende Kraft erfährt das Schiff? In welche Richtung zeigt die resultierende Kraft?

$$\vec{F}_{\text{Ges}} = \vec{F}_A + \vec{F}_O + \vec{F}_{\text{Fluss}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ N} \\ 1000 \text{ N} \end{pmatrix}$$



$$|\vec{F}_{\text{Ges}}| = 1000 \text{ N}$$

Skalarprodukt

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Rechenregeln, orthogonale Vektoren, Winkel zwischen 2 Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y \quad \text{„Skalar“}$$

Eigenschaften: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ „orthogonale Vektoren“

Winkel zwischen zwei Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \varphi: \text{Zwischenwinkel } \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Rechenbespiel

Donnerstag, 21. September 2017

- a) Beweisen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = 4 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

- b) Für welchen Wert von x stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 9 + 3x = 0 \quad |:3$$

$$3 + x = 0 \rightarrow \underline{x = -3}$$

- c) Welche Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen ein?

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

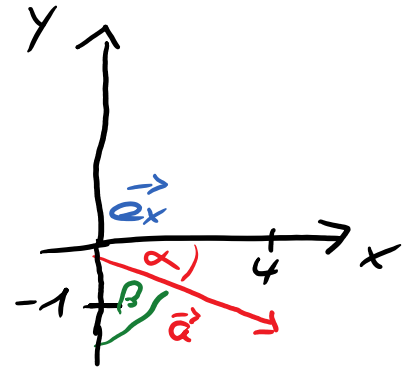
$$|\vec{b}| = |\vec{e}_x| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{17}} \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\rightarrow \alpha = 14^\circ$$

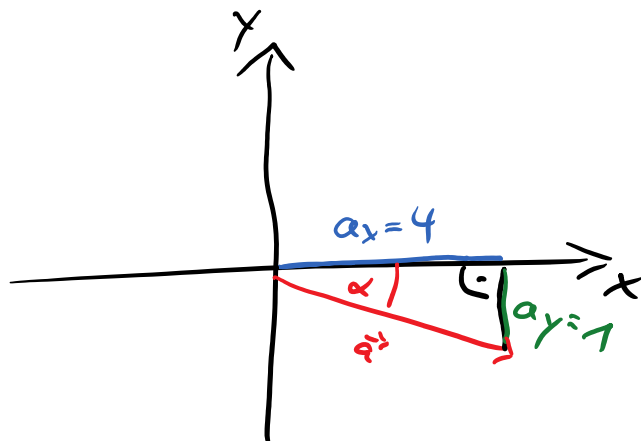
$$\beta = 90^\circ - \alpha = 76^\circ$$



alternative Lösung:

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{4} \approx 14^\circ$$



Linear unabhängige Vektoren

Donnerstag, 21. September 2017

Vektoren sind linear unabhängig, wenn kein Vektor aus einer Linearkombination der restlichen Vektoren hervorgeht, also:

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{b} + \lambda_2 \cdot \vec{c} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{h}$$

Es darf keine $\lambda_1; \dots; \lambda_n$ geben, sodass sich $\vec{a}$ ergibt.

Beispiele: ① $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$  $\vec{a} \parallel \vec{b}$
 $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a} \rightarrow$ linear abhängig

② $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$
 $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{I } 1 = \lambda \cdot 1 \rightarrow \lambda = 1 \\ \text{II } 1 = \lambda \cdot 5 \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Es existiert kein } \lambda, \text{ sodass} \\ \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b} \neq \lambda \cdot \vec{a} \\ \rightarrow \text{linear unabhängig} \end{array}$

Rechenbeispiel

Donnerstag, 21. September 2017

a) Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{b} \quad ? \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad 4 = \lambda \cdot 1 \rightarrow \lambda = 4 \\ \text{II} \quad -1 = \lambda \cdot 4 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Es existiert kein } \lambda, \\ \text{so dass } \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \\ \rightarrow \text{linear unabhängig} \end{array}$$

b) Warum sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

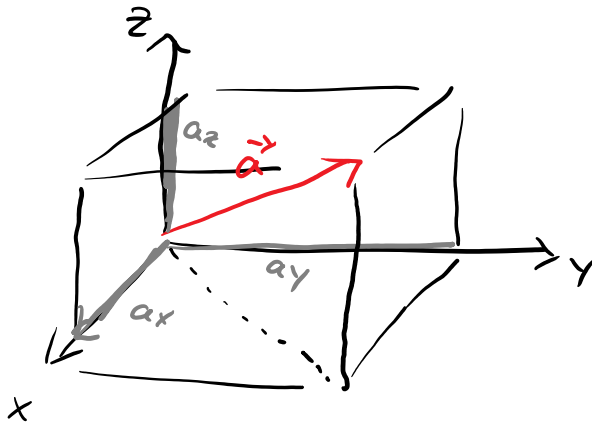
$$\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$$

Weil $\vec{a}$ das -2 -fache von $\vec{b}$ ist.

Dreidimensionale Vektoren

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Rechenregeln, Betrag



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\text{Addition: } \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

$$\text{skalare Multiplikation: } \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Rechenbeispiele 1

Donnerstag, 21. September 2017

a) Wie lange sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$|\vec{a}| = \sqrt{0+4+9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die Länge 1!

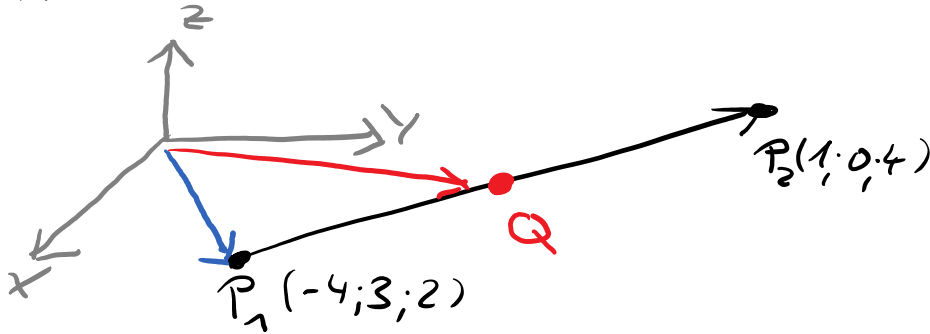
$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3} \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechenbeispiele 2

Donnerstag, 21. September 2017

Welche Koordinaten besitzt der Punkt Q, der die Strecke zwischen den Punkten $P_1(-4; 3; 2)$ und $P_2(1; 0; 4)$ halbiert?



$$\vec{OP_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ „Ortsvektor von } P_1\text{“}$$

ges.: Ortsvektor von Q: $\vec{OQ}$

$$\vec{OQ} = \vec{OP_1} + \frac{1}{2} \cdot \vec{P_1P_2}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

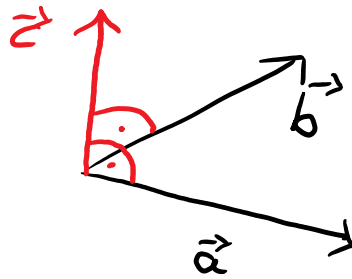
$$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 0 - 3 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q(-1,5/1,5/3)$$

Vektorprodukt

Donnerstag, 21. September 2017

Definition, Eigenschaften, Flächeninhalte



Berechnung des Vektorprodukts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Eigenschaften: ① $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

② Geometrische Deutung:

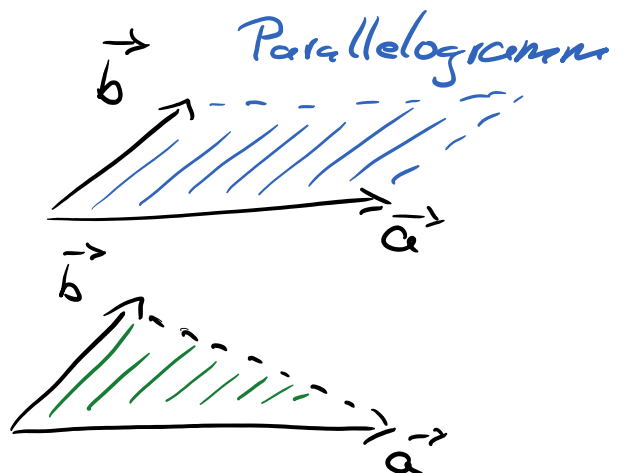
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Fläche des Parallelogramms

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Fläche des Dreiecks

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$



③ Kriterium für kollineare Vektoren:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ sind kollinear (parallele Vektoren)}$$

④ Rechengesetze:

$$\text{I} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad \text{„anti-kommutativ“}$$

$$\text{II} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Rechenbeispiel 3

Donnerstag, 21. September 2017

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie folgende

Vektorprodukte:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c})$

c) $(\vec{a} + 2\vec{c}) \times (-\vec{b}) \times (3\vec{c})$

$$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$a) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$b) (\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} c) (\vec{a} + 2\vec{c}) \times (-\vec{b}) \times (3\vec{c}) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -78 + 6 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} - \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} -36 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} \times 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{6 \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \\ -50 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Rechenbeispiel 4

Donnerstag, 21. September 2017

Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad 1 = 2\lambda_2 \quad \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

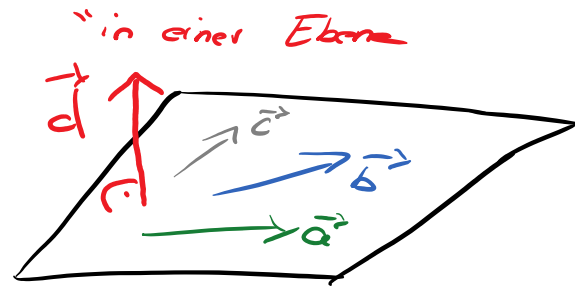
$$\text{II} \quad \lambda = 2\lambda_1 + 1$$

$$\text{III} \quad -2 = 3\lambda_1 + \frac{1}{2} \quad | -\frac{1}{2}$$

$$-2,5 = 3\lambda_1 \quad | :3$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{6} \quad \text{in II}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -\frac{2}{3}}}$$



alternative Lösung:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$n \cdot \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2 + 3\lambda + 4 = 0$$

$$3\lambda + 2 = 0 \quad | -2$$

$$3\lambda = -2$$

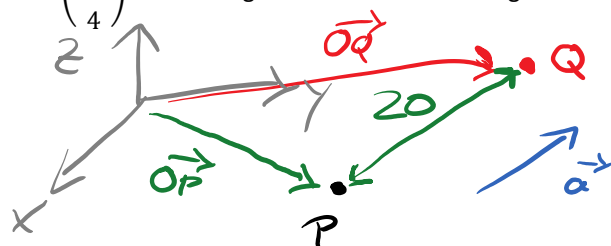
$$\underline{\underline{\lambda = -\frac{2}{3}}}$$

Rechenbeispiel 5

Donnerstag, 21. September 2017

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkt P = (3;1;-5) in Richtung des

Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 20 Längeneinheiten entfernt liegt.



$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \frac{20}{\sqrt{50}} \vec{a}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50}$$

$\rightarrow \vec{a}$ ist $\sqrt{50}$ LE lang

$\frac{20}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}$ auf die Länge 20 gebracht

$$4 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{20}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{20}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6\sqrt{2} \\ 1-10\sqrt{2} \\ -5+8\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

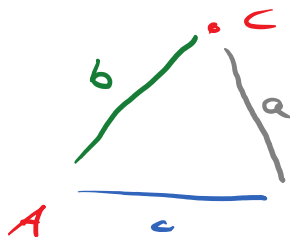
$$Q(3+6\sqrt{2} | 1-10\sqrt{2} | -5+8\sqrt{2})$$

Rechenbeispiel 6

Donnerstag, 21. September 2017 22:26

Durch die drei Punkte A(1;4;2), B(3;1;0) und C(-1;1;2) werden die Ecken eines Dreiecks festgelegt. Berechnen Sie die Länge der drei Seiten und den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = |\vec{BC}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \underline{2\sqrt{5}}$$

$$b = |\vec{AC}| = \sqrt{4 + 9} = \underline{\sqrt{13}}$$

$$c = |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \underline{\sqrt{17}}$$

$$A_A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} \\ = \sqrt{49} = \underline{7}$$

Rechenbeispiel 7

Donnerstag, 21. September 2017

22:29

Zeigen Sie: Die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

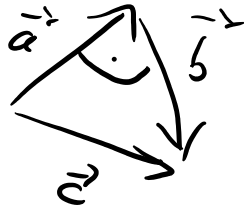
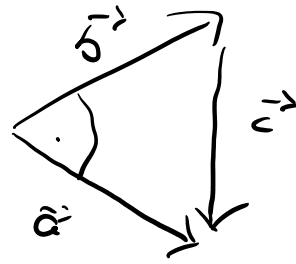
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 8 - 6 = 0$$

$$\rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad \checkmark$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\rightarrow \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0 \quad \text{„geschlossene Vektorreihe“ gefunden}$$

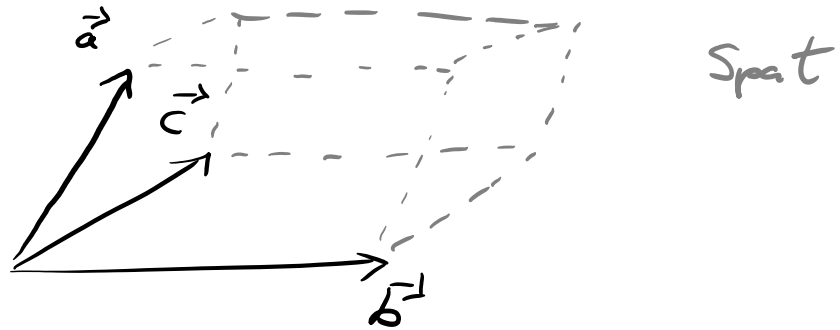


Spatprodukt

Freitag, 22. September 2017 09:29

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{„Spatprodukt“}$$

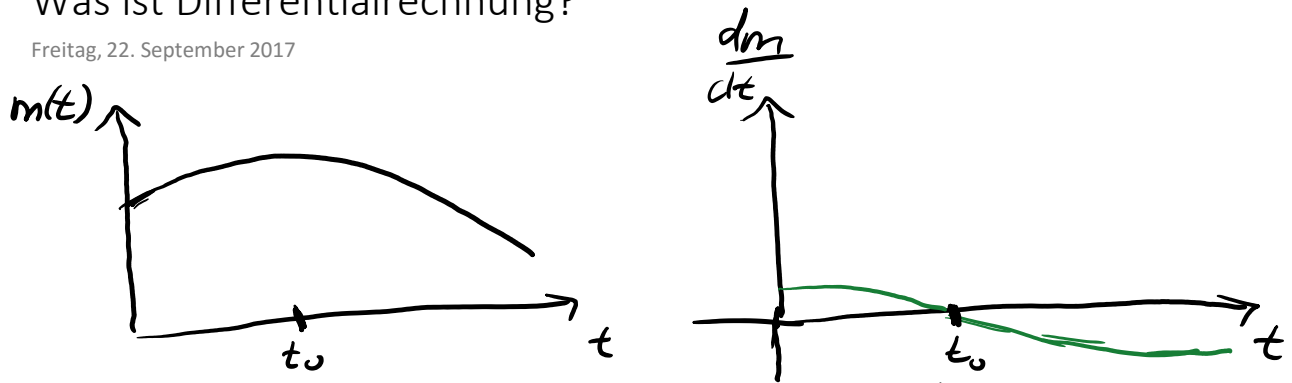
$$V_{\text{Spat}} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar (in einer Ebene)}$$

Was ist Differentialrechnung?

Freitag, 22. September 2017



Masse eines Gletschers über die Zeit

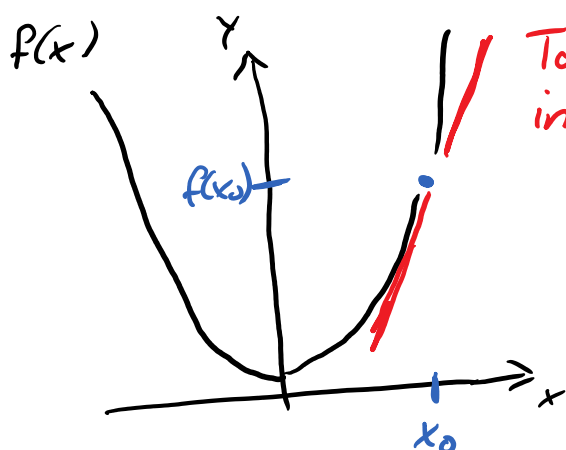
Wo steigt $m(t)$, wo fällt $m(t)$, wie stark fällt/steigt $m(t)$?

Wo gibt es Maxima / Minima?

Ableitung einer Funktion

Freitag, 22. September 2017

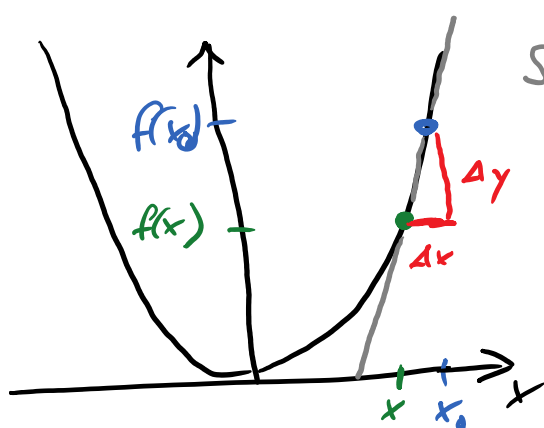
Definition der Ableitung, Differentialquotient



Tangente an $f(x)$
in Punkt x_0 .

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

1. Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 .



Sekante durch $f(x)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

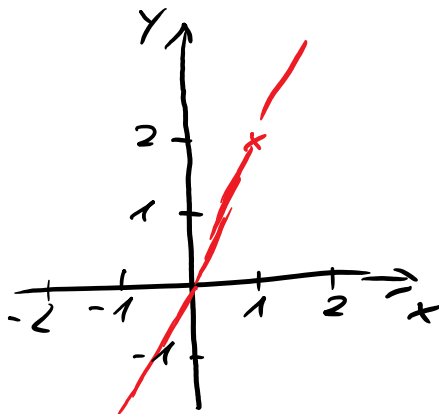
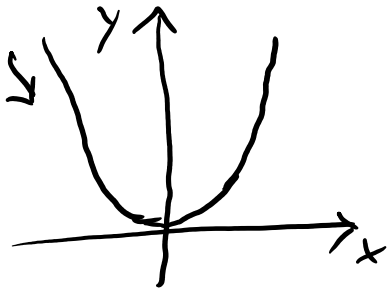
Steigung der Sekanten

$$\left\{ \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right. \quad \text{„Differentialquotient“}$$

Ableitung elementarer Funktionen

Freitag, 22. September 2017

Beispiel: $f(x) = x^2$



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

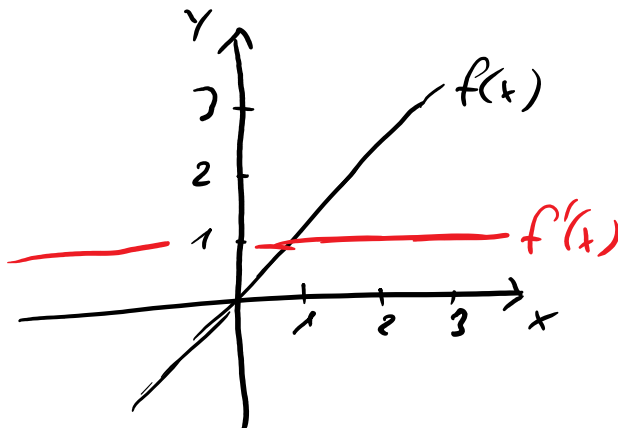
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

$$f'(x) = 2x$$

Beispiel 2: $f(x) = x$

$$f'(x) = 1$$



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

$$f'(x) = 1$$

Funktion $f(x)$	Ableitungsfunktion $f'(x)$
$f(x) = x^1$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregel:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregeln für elementare Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c = \text{const.}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = (\ln a) \cdot a^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	

Ableitungsregeln

Freitag, 22. September 2017

Faktorregel: Ein konstanter Faktor C bleibt beim Ableiten erhalten:

$$y = C \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = C \cdot f'(x)$$

Beispiel: $f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$

$$f(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

Beweis: $y = C \cdot f(x)$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C \cdot f(x) - C \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = C \cdot f'(x_0)$$

Summenregel: $y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \dots$

$$y' = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

Beispiel: $f(x) = x + x^2$

$$f'(x) = 1 + 2x$$

Produktregel: $y = f(x) \cdot g(x)$

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v(x)} \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Quotientenregel: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \cos x - x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

Kettenregel: Ableiten von „verschachtelten Funktionen“

$$y = f(g(x))$$

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{„Nachdifferenzieren“}$$

Beispiel: $y = \sin(x^2)$

äußere Funktion $f(x)$ innere Funktion $g(x)$

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Rechenbeispiele 1

Freitag, 22. September 2017

Berechnen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = x^2$

1. $f'(x) = 2x$ $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

2. $f(x) = 4x^3$

2. $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

3. $f(x) = 2x + 5x^4 - 1$

3. $f'(x) = 2 + 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 2 + 20x^3$

4. $f(x) = 2 \cdot \sin x$

$\Rightarrow x^{-1}$

4. $f'(x) = 2 \cdot \cos x$

5. $f(x) = 4x^{-2} - 8x^{-4} + \frac{1}{x}$

5. $f'(x) = 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} - 8 \cdot (-4) \cdot x^{-5} + (-1) \cdot x^{-2}$
 $= -8x^{-3} + 32x^{-5} - x^{-2} = -\frac{8}{x^3} + \frac{32}{x^5} - \frac{1}{x^2}$

6. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$

6. $f(x) = 4x^{-1} + 4x^{-2} + 4x^{-3}$

$f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 4 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 4 \cdot (-3) \cdot x^{-4}$
 $= -4x^{-2} - 8x^{-3} - 12x^{-4} = -\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^4}$

Rechenbeispiele 2

Freitag, 22. September 2017 12:16

1. $f(x) = 2x \cdot \sin x$

2. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

3. $f(x) = x^2 \cdot e^x + x \cdot \ln x$

4. $f(x) = \frac{2x}{\cos x} + \frac{x^2}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{(x-1)(x+2)}$

6. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

7. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt{2x+1}$
 $= x^{\frac{3}{4}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

8. $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 1)$

$f'(x) = \cos(x^2 + 2x + 1) \cdot (2x + 2) = \underline{2(x+1) \cdot \cos(x^2 + 2x + 1)}$

$f'(x) = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$

$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + \ln x + 1$

$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x - 2x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{2 \cos x + 2x \sin x}{\cos^2 x} + \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$

$= \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} + (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

9. $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}$

$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$

10. $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

11. $f(x) = \sin(3x)$

$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cos(x)$

Kombination von Ableitungsregeln

Freitag, 22. September 2017

Beispiel: $f(x) = \frac{2x \cdot \sin(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

1. Quotientenregel:

2. Produktregel:

$$f'(x) = \frac{(2\sin x + 2x \cdot \cos x) \cdot x^2 - 2x \sin x \cdot 2x}{x^4} =$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{(2\sin x + 2x \cos x) \cdot x^2 - 4x^2 \cdot \sin x}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (2\sin x + 2x \cos x - 4\sin x)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x \cos x - 2\sin x}{x^2}$$

Beispiel: $f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)$

Kettenregel: $f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2}$

Quotientenregel

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Rechenbeispiele 1

Freitag, 22. September 2017

(a) Bestimmen Sie die Ableitung jeweils auf zwei Arten:

- Zuerst mit der Kettenregel (und dann ggf. ausmultiplizieren).
- Zuerst ausmultiplizieren (binomische Formeln), dann mit passenden Regeln differenzieren.

i.) $f(x) = (2x^4 - 3x)^2 = 4x^8 - 12x^5 + 9x^2$

$$y = f(g(x))$$

ii.) $f(x) = (2x - 3x^2)^3$

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

iii.) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$

i.) $f'(x) = 2 \cdot (2x^4 - 3x) \cdot (8x^3 - 3) = 2x(2x^3 - 3)(8x^3 - 3) =$
 $f'(x) = 32x^7 - 60x^4 + 18x = 2x(16x^6 - 6x^3 - 24x^2 + 3) =$
 $= 32x^7 - 60x^4 + 18x$

ii.) $f(x) = (2x - 3x^2)^3$ $y = f(g(x))$
 $f'(x) = 3(2x - 3x^2)^2 \cdot (2 - 6x)$ $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 $= 6x^2 \cdot (2 - 3x)^2 \cdot (1 - 3x)$

iii.) $f(x) = (2x+1)^{-2}$

$$f'(x) = -2(2x+1)^{-3} \cdot 2 = -4 \cdot (2x+1)^{-3} = -\frac{4}{(2x+1)^3}$$

schlechter Weg: $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{1}{4x^2+4x+1}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (4x^2+4x+1) - 1 \cdot (8x+4)}{(4x^2+4x+1)^2} = \frac{-4(2x+1)}{[(2x+1)^2]^2} =$$

 $= \frac{-4(2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{-4}{(2x+1)^3}$

Rechenbeispiele 2

Montag, 25. September 2017

(b) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Ableitungsfunktion, benennen Sie die verwendeten Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned}
 \text{i.) } f(x) &= x^2 + \sin(x) & f'(x) &= 2x + \cos(x) & \text{Summenregel} \\
 \text{ii.) } f(x) &= \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}} & f'(x) &= -3x^{-2} - x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 \text{iii.) } f(x) &= \sin(x) \cdot \sqrt{x} & f'(x) &= \cos x \cdot \sqrt{x} + \sin(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
 \text{iv.) } f(x) &= \sin^2(x) & &= \cos x \cdot \sqrt{x} + \sin(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 \text{v.) } f(x) &= \frac{\sin(x)}{x-1} & &= \frac{\cos x \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} \\
 \text{vi.) } f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} & &= \frac{\cos x \cdot 2x + \sin x}{2\sqrt{x}} = \\
 \text{vii.) } f(x) &= \sin(x^2 + 2) & &= \frac{\sqrt{x} \cdot (\cos x \cdot 2x + \sin x)}{2x} \\
 \text{viii.) } f(x) &= \cos(x^2 + 2x) \\
 \text{ix.) } f(x) &= \frac{\sqrt{2+x^2}}{2x}
 \end{aligned}$$

$$\text{iv.) } f(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$$

$$\text{Kettenregel: } f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\text{Produktregel: } f'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{vi.) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \sqrt{x} \cdot (x^2-1)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Quotientenregel: } f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-1) - \sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}x^{1.5} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{1.5}}{(x^2-1)^2} \\
 &= \frac{-\frac{3}{2}x^{1.5} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-1)^2} \\
 &= \frac{-\frac{3}{2}x^{2.5} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x(x^2-1)^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)}{x(x^2-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{(vii) } f(x) = \sin(x^2+2)$$

äußere Funktion — innere Funktion

$$\begin{aligned}
 \text{Kettenregel: } f'(x) &= \cos(x^2+2) \cdot 2x \\
 &= \cos[x(x+2)]
 \end{aligned}$$

$$\text{(viii) } f(x) = \cos(x^2+2x) \neq x \cdot \cos(x+2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Kettenregel: } f'(x) &= -\sin(x^2+2x) \cdot (2x+2) \\
 &= -2 \sin(x^2+2x) \cdot (x+1)
 \end{aligned}$$

Rechenbeispiele 3

Montag, 25. September 2017

- a) In welchen Punkten der Kurve mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ verlaufen die Tangenten parallel zur Gerade $y = \frac{1}{4}x - 2$?
- b) Bestimmen Sie für die Funktion $y = 5 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$ alle Kurvenpunkte mit einer Tangente parallel zur x-Achse.

$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \quad ; \quad f'(x) = x^2 - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = \frac{1}{4} \quad | +1$$

$$x^2 = \frac{5}{4} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{4}} \quad ; \quad x_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$P_1(-\sqrt{\frac{5}{4}} | f(-\sqrt{\frac{5}{4}})) \quad ; \quad P_2(\sqrt{\frac{5}{4}} | f(\sqrt{\frac{5}{4}}))$$

$$b) f(x) = 5 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

$$f'(x) = 6x - 2x^3 = 2x(3 - x^2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad 3 - x^2 = 0 \quad | +x^2$$

$$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_2 = -\sqrt{3} \quad ; \quad x_3 = \sqrt{3}$$

$$f(0) = 5 \quad \rightarrow \quad P_1(0 | 5)$$

$$f(\sqrt{3}) = 5 + 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 9 = 9,5 \quad \rightarrow \quad P_2(-\sqrt{3} | 9,5)$$

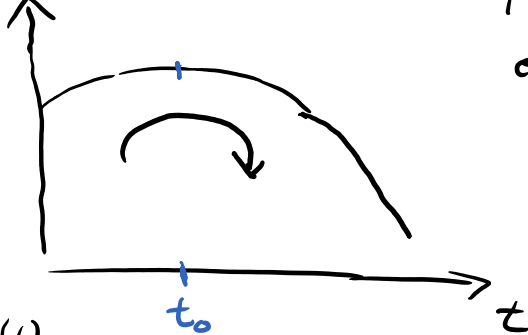
$$P_3(\sqrt{3} | 9,5)$$

Achsensymmetrie
zur y-Achse

Höhere Ableitungen

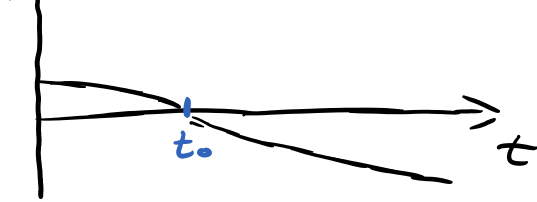
Montag, 25. September 2017

$m(t)$



Massenfunktion
eines Gletschers

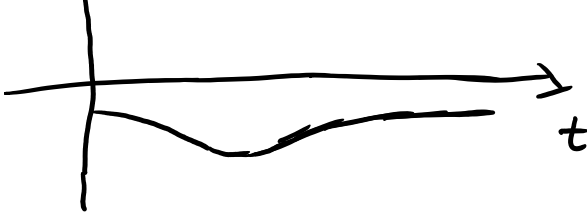
$\frac{dm}{dt}(t)$



1. Ableitung
der Massenfunktion

Steigungsverhalten
von $m(t)$

$\frac{d^2m}{dt^2}$



2. Ableitung
der Massenfunktion

Krümmungsverhalten
von $m(t)$

Anwendungsbeispiel

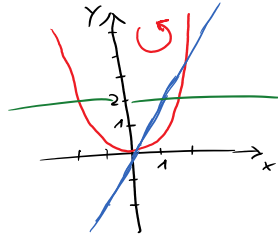
Montag, 25. September 2017

Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2x + 1$ und die zugehörigen 1. und 2. Ableitungen. Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$?

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

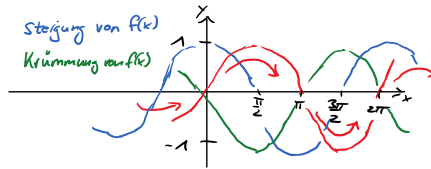
$$f''(x) = 2$$



$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$



Monotonie und Krümmung einer Funktion

Montag, 25. September 2017

$f(x)$ 

$f'(x) > 0$

$f(x)$ streng monoton
wachsend



$f'(x) < 0$

$f(x)$ streng monoton
fallend

Monotonieverhalten

$f(x)$ 

$f''(x) < 0$

$f(x)$ rechtsge-
krümmt



$f''(x) > 0$

$f(x)$ linksgekrümmt

Krümmungsverhalten

Anwendungsbeispiel

Montag, 25. September 2017

Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2x + 1$ und deren Vorzeichentabellen für die 1. und 2. Ableitungen. Welche Bedeutung haben diese Vorzeichentabellen?

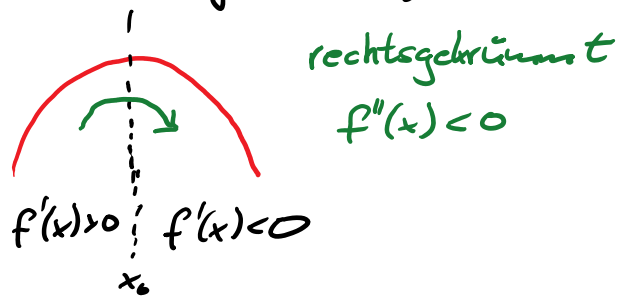
Charakteristische Kurvenpunkte

Montag, 25. September 2017

$f'(x_0) = 0 \rightarrow f(x)$ hat bei x_0 eine waagrechte Tangente

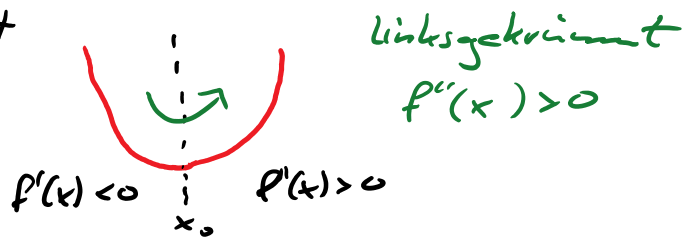
1. Vorzeichenwechsel $f'(x) : +/-$

$\rightarrow f(x)$ hat lokales Maximum



2. Vorzeichenwechsel $f'(x_0) : -/+$

$\rightarrow f(x)$ hat lokales Minimum



Identifikation charakteristischer Kurvenpunkte:

lokales Maximum	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$ oder VZW $f'(x) : +/-$
lokales Minimum		$f''(x_0) > 0$ oder VZW $f'(x) : -/+$

Grund-
voraussetzung

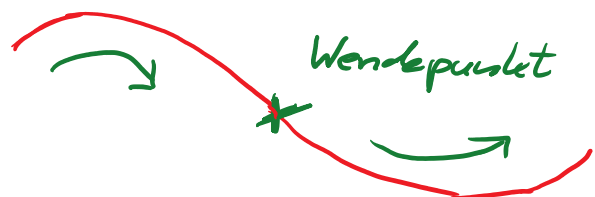
Sattelpunkte:

- ① $f'(x_0) = 0$
- ② $f''(x_0) = 0$
- ③ $f'''(x_0) \neq 0$

Sattelpunkt:
Wendepunkt mit
waagrecht Tangente

Wendepunkte: Punkte an denen sich die Krümmung von $f(x)$ ändert.

- ① $f''(x_0) = 0$
- ② $f'''(x_0) \neq 0$



Anwendungsbeispiele 1

Montag, 25. September 2017

Wo besitzen die Funktionen relative Extremwerte?

a) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

a) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}} - \frac{1 \cdot \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x}}{2(x+1)} - \frac{-\sqrt{1-x}}{2(1-x)} = \frac{-\sqrt{1-x} \cdot (1-x)}{2(x+1)(1-x)} - \frac{-\sqrt{1-x} \cdot (x+1)}{2(1-x)(x+1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x} \cdot (1-x) - \sqrt{1-x} \cdot (x+1)}{2(x+1)(1-x)} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$-\sqrt{1-x} \cdot (1-x) - \sqrt{1-x} \cdot (x+1) = 0$$

$$| + \sqrt{1-x} \cdot (x+1)$$

$$-\sqrt{1-x} \cdot (1-x) = \sqrt{1-x} \cdot (x+1)$$

$$| ^2$$

$$(1-x)(1-x) = (1-x)(x+1)$$

$$| : (1-x) ; : (x+1)$$

$$1-x = x+1 \quad | +x -1$$

$$x_1 \neq 1 ; x_2 \neq -1$$

$$2x = 0 ;$$

$$x_3 = 0$$

$$f'(x) = 0, \text{ wenn } x = 0$$

Vorzeichentabelle $f'(x)$



VZW +|-

→ $f(x)$ hat bei $x=0$ ein Maximum $\text{Max}(0|2)$

b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x}(1-x) = 0 \rightarrow x=1 \text{ einzige Lösung}$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) + e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(1-x+1) = -e^{-x}(2-x)$$

$$f''(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0 \rightarrow \text{bei } x=1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$f(1) = e^{-1} \quad \text{Max} \left(1 \mid \frac{1}{e} \right)$$

$$c) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

$$1 - \ln x = 0 \quad | + \ln x$$

$$\ln x = 1 \quad | e$$

$$x = e$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-3x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2 \ln e}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0 \rightarrow \text{Bei } x=e \text{ ist ein Maximum.}$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{Max} \left(e \mid \frac{1}{e} \right)$$

Anwendungsbeispiele 2

Montag, 25. September 2017

Zeigen Sie, dass die Funktion $V(r), r > 0$ an der Stelle $r=a$ ein Minimum besitzt ($a > 0, D > 0$):

$$V(r) = -D \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Anwendungsbeispiel 3

Montag, 25. September 2017

An den Graphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ wird im Punkt $A(2|y)$ eine Tangente angelegt.
Geben Sie die Geradengleichung der Tangenten an!

Kurvendiskussion

Montag, 25. September 2017

- 1 Definitionsmenge
- 2 Nullstellen
- 3 Schnittpunkte mit der y-Achse
- 4 Symmetrieverhalten
- 5 Verhalten im Unendlichen / Polstellen
- 6 Hochpunkte / Tiefpunkte
- 7 Wendepunkte / Sattelpunkte
- 8 Wertemenge
- 9 Funktionsgraph

$$f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-x) = \dots$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_0$$

$$f''(x_0) \text{ untersuchen}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x_0$$

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Kurvendiskussion 1

Montag, 25. September 2017

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1. Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

2. Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \rightarrow x(x-2)^2 = 0$$

$$N_1(0|0) \quad N_{2/3}(2|0)$$

3. y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$ $P(0|0)$

4. Symmetrie: $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) =$

$$= -x^3 - 4x^2 - 4x = -x(x^2 + 4x + 4) =$$

$$= -x(x+2)^2 \neq f(x) \quad \text{keine bekannte Symmetrie}$$

5. Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

6. Extremstellen (Hochpunkte, Tiefpunkte):

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} =$$
$$= 3(x-2)(x-\frac{2}{3}) \quad = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3} = \left\{ \frac{2}{3}, 2 \right\}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 2$$

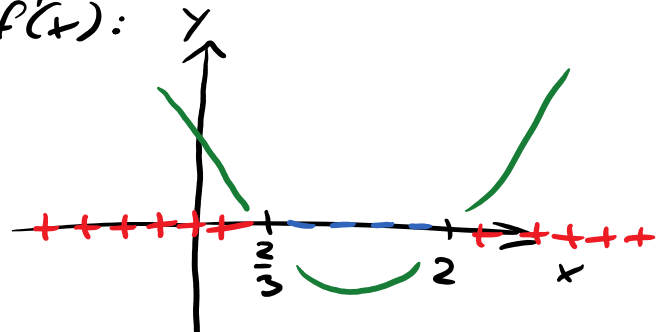
Vorzeichenabschätzung von $f'(x)$:

Bei $x_1 = \frac{2}{3}$: VZW $+|-$

→ Maximum

Bei $x_2 = 2$: VZW $-|+$

→ Minimum



$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} = \frac{8}{27} - \frac{48}{27} + \frac{72}{27} = \frac{32}{27}$$

$$\text{Max}\left(\frac{2}{3} \mid \frac{32}{27}\right)$$

$$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 0$$

$$\text{Min}(2 \mid 0)$$

7. Wendepunkte / Sattelpunkte: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0$$

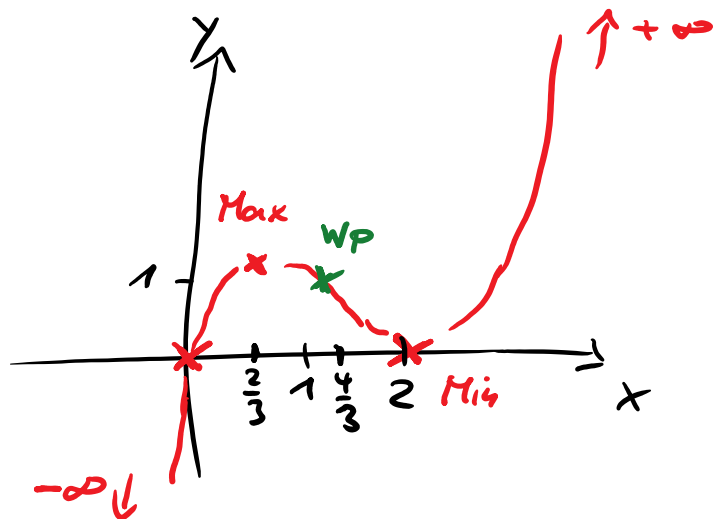
$\rightarrow x = \frac{4}{3}$ ist ein Wendepunkt

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{16}{3} = \frac{64}{27} - \frac{192}{27} + \frac{144}{27} = \frac{16}{27}$$

$$\rightarrow \text{WP}\left(\frac{4}{3} \mid \frac{16}{27}\right)$$

8. Wertemenge: $W = \mathbb{R}$

9. Funktionsgraph:



Kurvendiskussion 2

Montag, 25. September 2017

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = 2 \sin(x) + 1$.

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$.

① $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

② $f(x) > 0 \rightarrow -5x^2 + 5 = 0 \quad |(-5)$
 $x^2 - 1 = 0$
 $(x-1)(x+1) = 0$
 $x_1 = -1; x_2 = 1$

$N_1(-1|0); N_2(1|0)$

③ $f(0) = \text{?}$ existiert nicht

④ $f(-x) = \frac{-5(-x)^2+5}{(-x)^3} = \frac{-5x^2+5}{-x^3} = -\frac{-5x^2+5}{x^3} = -f(x)$

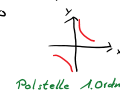
$\rightarrow f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(x-1)(x+1)}{x^3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$



⑥ $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$

$f'(x) = \frac{-10x \cdot x^3 - (-5x^2+5) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-10x^4 + 15x^4 - 15x^2}{x^6} = \frac{5x^4 - 15x^2}{x^6} = \frac{5x^2(x^2-3)}{x^6} = \frac{5(x^2-3)}{x^4} = 0$

$x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}$
 $f''(x) = \frac{5 \cdot [2 \cdot (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3})]}{x^5} = \frac{5 \cdot (-2\sqrt{3} + 6)}{x^5} = \frac{-10\sqrt{3} + 30}{x^5}$

$f''(-\sqrt{3}) = \frac{-10 \cdot (-\sqrt{3}) + 30}{(-\sqrt{3})^5} = \frac{10\sqrt{3} + 30}{-3\sqrt{3}} < 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \text{ ist ein Maximum}$

$f''(\sqrt{3}) = \frac{-10 \cdot (\sqrt{3}) + 30}{(\sqrt{3})^5} = \frac{-10\sqrt{3} + 30}{3\sqrt{3}} > 0 \rightarrow x_2 = \sqrt{3} \text{ ist ein Minimum}$

$f(\sqrt{3}) = \frac{-5 \cdot 3 + 5}{3\sqrt{3}} = -\frac{10}{3\sqrt{3}} \quad \text{Min} \left(\sqrt{3} \mid -\frac{10}{3\sqrt{3}} \right)$

Punktsymmetrie: $\text{Max}(-\sqrt{3} \mid \frac{10}{3\sqrt{3}})$

⑦ Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$f''(x) = \frac{-10(x^2-3)}{x^5} = 0 \rightarrow -10(x^2-3) = 0$
 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$
 $x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}$

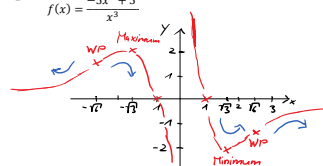
$f'''(x) = \frac{-10 \cdot 2x \cdot x^5 + 10(x^2-3) \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-20x^6 + 50x^4 - 300x^4}{x^{10}} = \frac{30x^4(x^2-10)}{x^{10}} = \frac{30(x^2-10)}{x^6}$

$f'''(-\sqrt{3}) = f'''(\sqrt{3}) \neq 0 \quad f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$

$f'(\sqrt{3}) = \frac{-5 \cdot 3 + 5}{3\sqrt{3}} = -\frac{10}{3\sqrt{3}} \rightarrow W_{\text{P}} \left(\sqrt{3} \mid -\frac{10}{3\sqrt{3}} \right)$

$f'(-\sqrt{3}) = \frac{10}{3\sqrt{3}} \rightarrow W_{\text{P}} \left(-\sqrt{3} \mid \frac{10}{3\sqrt{3}} \right)$

⑧ $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$



Kurvendiskussion 4

Dienstag, 26. September 2017

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion von $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2}$.

① $9-x^2 \geq 0$

Vorzeichentabelle:

$(3-x)(3+x) \geq 0$

$(3-x)$

$(3+x)$

$D = [-3; 3]$

$(3-x)(3+x)$

② $f(x) = 0$

$\frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2} = 0 \quad | -\sqrt{9-x^2}$

$\frac{1}{2}x = -\sqrt{9-x^2} \quad | \cdot 2$

$\frac{1}{4}x^2 = 9-x^2 \quad | +x^2$

$\frac{5}{4}x^2 = 9 \quad | \cdot \frac{4}{5}$

$x^2 = \frac{36}{5} \quad | \sqrt{\quad}$

$x_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}} ; \quad x_2 = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad N\left(-\frac{6}{\sqrt{5}} | 0\right)$

$x_1 \approx -2,7 ; \quad x_2 \approx 2,7$

③ $f(0) = 3$

$P(0|3)$

④ $f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \sqrt{9-(-x)^2} = -\frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2} \neq f(x)$
keine bekannte Symmetrie

⑤ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = \frac{3}{2}$

⑥

$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{1}{2}x + (9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} - x \cdot (9-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = 0$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \quad | \cdot 2\sqrt{9-x^2}$

$\sqrt{9-x^2} = 2x \quad |^2$

$9-x^2 = 4x^2 \quad | +x^2$

$9 = 5x^2 \quad | :5$

$x^2 = \frac{9}{5} \quad | \sqrt{\quad}$

$\left(x_1 = -\frac{3}{\sqrt{5}} \approx -1,3\right) \quad x_2 = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,3$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= - \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x)}{9-x^2} \\
 &= - \frac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \\
 &= - \frac{\frac{9}{\sqrt{9-x^2}}}{(9-x^2)^1} = - \frac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

$f''\left(\pm \frac{3}{\sqrt{5}}\right) < 0 \rightarrow \text{Bei } x_1 \text{ und } x_2 \text{ sind Maxima.}$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{36}{5}}$$

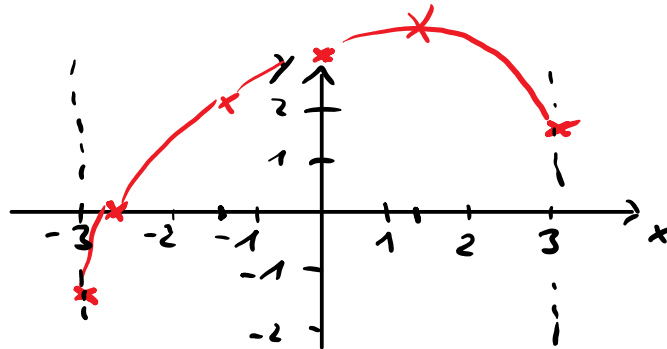
$$f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{5}} + \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{15}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Max}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \mid \frac{15}{2\sqrt{5}}\right)$$

⑦ $f''(x) \neq 0 \rightarrow \text{keine WP}$

⑧



Extremwertaufgaben

Montag, 2. Oktober 2017

Integration als Umkehrung der Differentiation

Mittwoch, 27. September 2017

Differentialrechnung : $f(x) \rightarrow f'(x)$ „ableiten“

Beispiel: $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$

Integralrechnung : $f(x) \rightarrow F(x)$ „auf-/hochleiten“

Beispiel: $f(x) = x^2 \rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

Zentrale Frage: Welche Funktion $F(x)$ ergibt abgeleitet die Grundfunktion $f(x)$?

$F(x)$ heißt Stammfunktion zu $f(x)$.

Beispiele:

$f(x)$	$F(x)$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$
x^3	$\frac{1}{4}x^4 + C$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos(x) + C$
$\cos x$	$\sin(x) + C$
e^x	$e^x + C$

C : Integrationskonstante (beliebige, konstante Zahl)

Schreibweise: $F(x) = \int f(x) dx$

Integral über die Funktion $f(x)$.

Beispiel: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Rechenregeln: I $\int K \cdot f(x) dx = K \cdot \int f(x) dx$ K : konstante Zahl

Beispiel: $\int 3x dx = 3 \cdot \int x dx = 3 \cdot (\frac{1}{2}x^2 + C)$

II $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

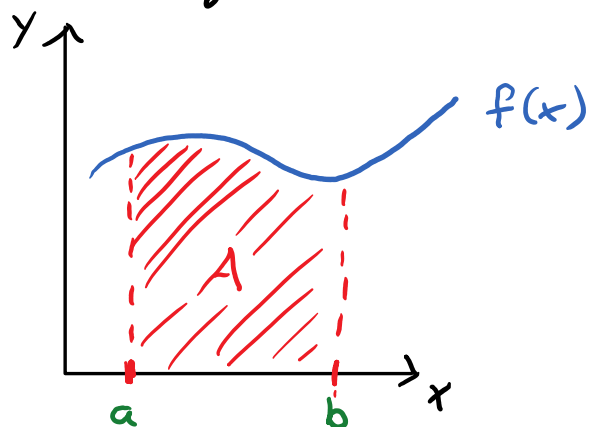
Beispiel: $\int x^2 \pm x \, dx = \int x^2 \, dx \pm \int x \, dx$

Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

Mittwoch, 27. September 2017

Geometrische Bedeutung, Schreibweise für das bestimmte Integral

Geometrische Bedeutung des Integrals:



$$\int f(x) dx$$

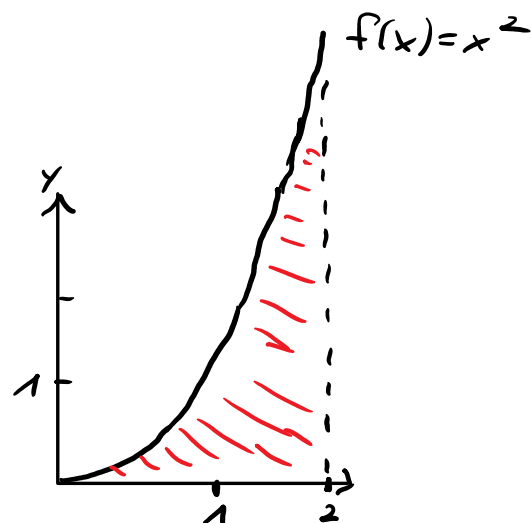
$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

a: Untere Integrationsgrenze

b: Obere Integrationsgrenze

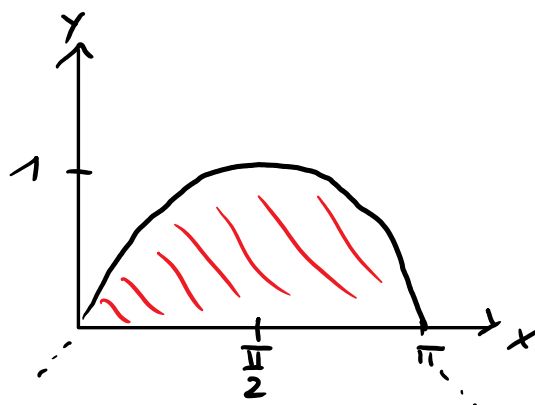
Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



Beispiel: $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= \left[-\cos x \right]_0^\pi \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) - (-1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$



$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

„unbestimmtes Integral“

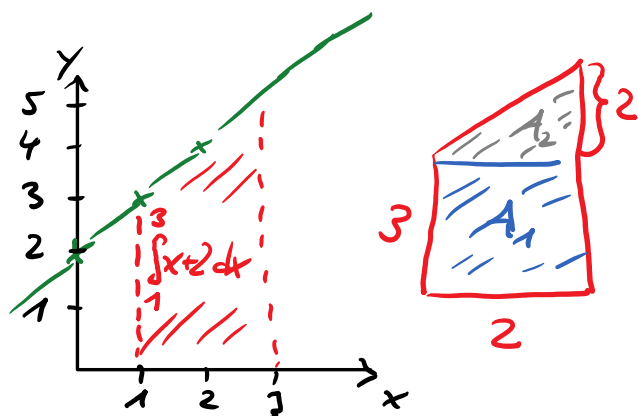
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

„bestimmtes Integral“

Beispiele: $\int_1^3 x+2 dx$

$$A = A_1 + A_2 = 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \underline{8}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 x+2 dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2} - 2 = \underline{8} \end{aligned}$$

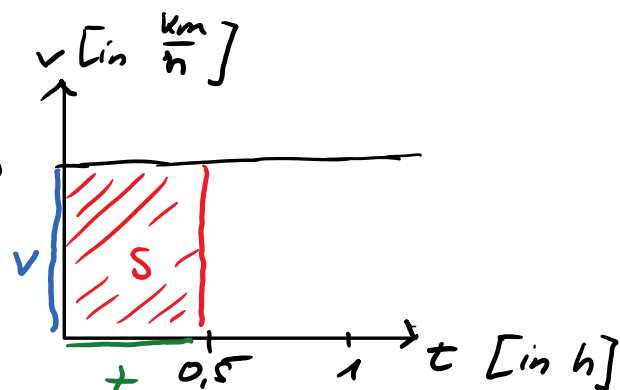


Beispiel: $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

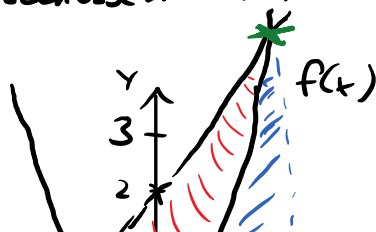
Welche Strecke s legt der Körper in $t_0 = \frac{1}{2} \text{ h}$ zurück?

$$s = v \cdot t = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ km}$$

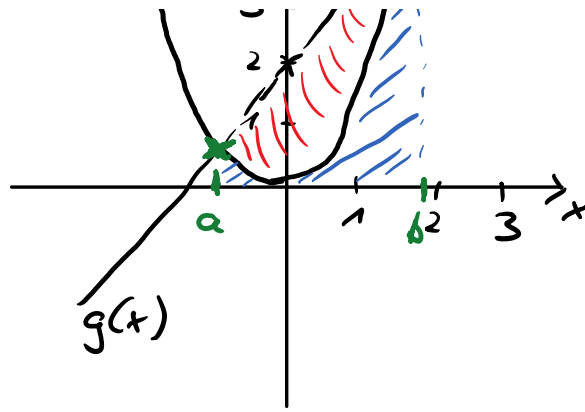
$$s = \int_0^{t_0} v(t) dt = \int_0^{t_0} 60 dt = [60t]_0^{t_0} = 60 \cdot t_0$$



Beispiel: Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den Funktionen $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = 4x + 2$ eingeschlossen wird!



$$A = A_{\text{red}} + A_{\text{blue}} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



$$A = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

eingeschlossene Fläche
zwischen 2 Graphen

Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$

$$2x^2 = 4x + 2 \quad | -4x - 2$$

$$2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$2(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$a = 1 - \sqrt{2} \quad ; \quad b = 1 + \sqrt{2}$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} 4x + 2 \, dx - \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} 2x^2 \, dx$$

$$= \left[2x^2 + 2x \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} - \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \left[2 \cdot (1+\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (1+\sqrt{2}) \right] - \left[2 \cdot (1-\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (1-\sqrt{2}) \right] \\ - \left[\frac{2}{3} \cdot (1+\sqrt{2})^3 - \frac{2}{3} \cdot (1-\sqrt{2})^3 \right] = \dots$$

Berechnung bestimmter Integrale

Mittwoch, 27. September 2017

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) + C$$

$$\int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) + C$$

$$\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} \cdot e^{nx} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{\frac{m}{n}+1} \cdot x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{1}{\frac{m+n}{n}} \cdot x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$$

kompliziertere Integrale, z.B. $\int \tan x dx =$

→ Formelsammlung, Integrationsregeln

Übungsaufgaben

Mittwoch, 27. September 2017



Die Integralfunktion

Mittwoch, 27. September 2017

Uneigentliche Integrale

Mittwoch, 27. September 2017

Optional: Integrationsmethode Substitution

Samstag, 16. September 2017 22:08

Optional: Integrationsmethode Partielle Integration

Samstag, 16. September 2017 22:08

Optional: Integrationsmethode Integration durch Substitution

Samstag, 16. September 2017 22:08

Übungsaufgaben

Samstag, 16. September 2017

22:09

Definition einer komplexen Zahl

Samstag, 16. September 2017 21:37

Komplexe oder Gaußsche Zahlenebene

Samstag, 16. September 2017

22:12

Grundbegriffe

Samstag, 16. September 2017

22:12

Betrag einer komplexen Zahl, konjugiert komplexe Zahl

Darstellungsformen komplexer Zahlen

Samstag, 16. September 2017 22:13

Kartesische Form, Trigonometrische Form, Exponentialform

Umrechnen zwischen den Darstellungsformen

Samstag, 16. September 2017 22:15

Komplexe Rechnung: Grundrechenarte mit komplexen Zahlen

Samstag, 16. September 2017 22:15

Grenzwert einer Funktion

Samstag, 16. September 2017 21:25

Schreibweisen

Stetigkeit einer Funktion

Samstag, 16. September 2017 21:27

Unstetigkeiten (Lücken, Pole, Sprünge)

Samstag, 16. September 2017

21:28

Unstetigkeiten bei Ganzrationalen Funktionen

Samstag, 16. September 2017 21:28

Kleiner Zwischentest

Montag, 18. September 2017

Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

1. Binomische Formeln

Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a) $\frac{2x^2 - 12xy + 18y^2}{4y^2 - 4x^2} =$

b) $\frac{48a^2 - 75b^2}{9a - 15b} =$

2. Gleichungen

Welche reellen Lösung besitzen die folgenden Gleichungen?

a) $x^5 - 3x^3 + x = 0$

b) $t^2 - 13t + 36 = 0$ (Satz von Vieta anwenden)

3. Funktionen

Welche Nullstellen und welches Symmetrieverhalten hat die Funktion

$$f(x) = x(x-2)(x+2) = x^3 - 4x$$

4. Potenzgesetze und Wurzeln

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich!

a) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{9-3}} =$

b) $\sqrt[3]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{49}} =$

c) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} =$

5. Logarithmus

a) Berechnen Sie:

$\log_2 32 =$	$\log_2 0,25 =$	$\log_2 \sqrt[3]{2} =$
---------------	-----------------	------------------------

$\log_5 625 =$	$\log_3 \frac{1}{27} =$	$\log_3 \sqrt[5]{9} =$
----------------	-------------------------	------------------------

b) $\log \frac{x^2}{y^5} \sqrt[3]{\frac{a^6 x}{3b^3}} =$

Zwischentest

Dienstag, 26. September 2017

Lösen Sie folgende Aufgaben!

1. Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y=6$.

- Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.
- Wo liegt der Scheitelpunkt der Parabel?

$$\begin{aligned} \text{Ia) } I \quad f(1) &= 0 & a+b+c &= 0 & 9a+9b+54 &= 0 \\ II \quad f(3) &= 0 & 9a+3b+c &= 0 \\ III \quad f(0) &= 6 & c &= 6 \end{aligned}$$

$$I-II \quad 6b+48 \Rightarrow b=-8 \quad \text{in } I \quad a-8b+c=0 \quad a=2$$

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$\text{alternativ: } f(x) = a(x-1)(x-3)$$

$$\text{mit } f(0)=6: 6 = a \cdot (-1) \cdot (-3) \rightarrow a=2$$

$$f(x) = 2(x-1)(x-3)$$

$$\begin{aligned} 1b) \quad f(x) &= 2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x + 1.5) \\ &= 2[(x-2)^2 - 1] = 2(x-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$2a) \quad G(t) = G_0 \cdot p^t = 1000 \cdot 1.05^t$$

$$1200 = 1000 \cdot 1.05^t \quad | :1000$$

$$1.2 = 1.05^t \quad | \log \Rightarrow t = \log_{1.05} 1.2 = \frac{\log 1.2}{\log 1.05} = \dots$$

$$2000 = 1000 \cdot 1.05^t \quad | :1000$$

$$2 = 1.05^t \quad \rightarrow t = \log_{1.05} 2 = \frac{\log 2}{\log 1.05} = \dots$$

$$2b) \quad t=0: 1g$$

$$t=15 \text{ min: } 0.5g$$

$$t=30 \text{ min: } 0.25g$$

$$t=x \text{ min:}$$

$$\begin{aligned} 1g & \cdot \frac{1}{2} \\ 1g & \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 1g & \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \end{aligned}$$

$$m(t) = 1g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}, \text{ wenn } t \text{ in min}$$

$$m(t=75 \text{ min}) = 1g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}g$$

$$0.1g = 1g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$$

$$0.1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$$

$$0.1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{15}} \rightarrow -\frac{t}{15} = \log_2(0.1)$$

$$t = -15 \log_2(0.1) = -15 \cdot \frac{\log 0.1}{\log 2} = \dots$$

3. Gebrochenrationale Funktionen

Gegeben ist die gebrochenrationale

$$\text{Funktion } f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 18}{x^3 - 4x}$$

- Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
- Wie verhält sich die Funktion in der Umgebung der Definitionslücken? Um welche Art von Definitionslücke handelt es sich jeweils?
- Schätzen Sie den groben Verlauf des Funktionsgraphen in einer Skizze ab (für $x > 0$).

$$3a) \quad x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$$

$$3b) \quad 3x^2 + 15x + 18 = 3(x^2 + 5x + 6) = 3(x+2)(x+3) = 0$$

$$(x_1 = -2); x_2 = -3 \quad N(-3|0)$$

$$3c) \quad f(x) = \frac{3(x+2)(x+3)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+3)}{x(x-2)}$$

$x = -2$ ist stetig habbare Definitionslücke

$x = 0, x = 2$: Polstellen 1. Ordnung

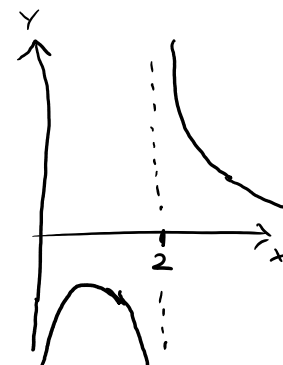
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3(x+3)}{x(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x+3)}{x(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$



4. Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$I \quad x + y + z = 7$$

$$II \quad 3x - 2y + z = 3$$

$$III \quad 8x - y - 2z = -2$$

$$4) \text{ II} - \text{I} \quad 2x - 3y = -4 \quad (A)$$

$$\text{III} + 2 \cdot \text{II} \quad 10x + y = 12 \quad (B)$$

$$A + 3 \cdot B \quad 32x = 32 \rightarrow x = 1 \quad \text{in B}$$

$$10 \cdot x + y = 12 \rightarrow y = 2 \quad \text{in I}$$

$$1 + 2 + z = 7 \rightarrow z = 4$$

5. Vektoren

- a) Wie muss der Wert x gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Welcher Vektor steht auf den Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ senkrecht?

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|1)$ und $B(5|3|1)$ und der Vektor $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Koordinaten hat der Punkt C und wie weit liegt er von A entfernt?

6. Differentialrechnung

- a) Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$$

- b) Berechnen Sie alle Nullstellen, lokale Maxima, Minima und Wendepunkte der Funktion $f(x) = \sin 2x$ im Intervall $x \in [0; \pi]$!

$$5a) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$-2 + 2 + x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0 \rightarrow x \text{ ist beliebig}$$

$$5b) \vec{e} = \vec{c} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5c) \uparrow$$



$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C(6|13|1)$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 13-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ [LE]}$$

$$6a) f'(x) = 6x \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) = 3x(2\sin x + x \cdot \cos x)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2-1}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$$

$$6b) f(x) = \sin 2x$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$2x = k \cdot \pi \rightarrow x = \frac{k}{2} \cdot \pi$$

$$N_1(0|0), N_2(\frac{\pi}{2}|0), N_3(\pi|0), N_4(\frac{3\pi}{2}|0), N_5(2\pi|0)$$

$$N_6(\frac{5\pi}{2}|0), N_7(3\pi|0), N_8(\frac{7\pi}{2}|0), N_9(4\pi|0)$$

$$\text{Extrempunkte: } f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 0 \rightarrow \cos(2x) = 0$$

$$1. \quad 2x = \frac{\pi}{2}, 2. \quad 2x = \frac{3\pi}{2}, 3. \quad 2x = \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot [-\sin(2x)] \cdot 2 = -4\sin(2x)$$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = -4\sin(\frac{\pi}{2}) = -4 < 0 \quad \text{Bei } x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ ist ein Maximum}$$

$$f''(\frac{3\pi}{4}) = -4\sin(\frac{3\pi}{2}) = 4 > 0 \quad \text{Bei } x_2 = \frac{3\pi}{4} \text{ ist ein Minimum}$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow \text{Max}(\frac{\pi}{4}|1)$$

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \rightarrow \text{Min}(\frac{3\pi}{4}|-1)$$

$$\text{Aufgabe: } \frac{3-2x}{5x+2} \leq 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$$

$$1. \text{ Fall: } 5x+2 > 0$$

$$x > -\frac{2}{5}$$

$$3-2x \leq 5x+2 \quad | +2x-2$$

$$2. \text{ Fall: } 5x+2 < 0$$

$$x < -\frac{2}{5}$$

$$3-2x \geq 5x+2 \quad | +2x-2$$

$$\begin{aligned} 3-2x &\leq 5x+2 & | +2x-2 \\ 1 &\leq 7x & | :7 \\ x &\geq \frac{1}{7} \\ \mathbb{L}_1 &= \left[\frac{1}{7}; \infty \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-2x &\geq 5x+2 & | +2x-2 \\ 1 &\geq 7x \\ x &\leq \frac{1}{7} \\ \mathbb{L}_2 &=]-\infty; -\frac{2}{5}] \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; -\frac{2}{5}] \cup \left[\frac{1}{7}; \infty \right[$$

Aufgabe: $|x-1| \geq x^2-5$

1. Fall: $x-1 \geq 0$

$$(x \geq 1)$$

$$x-1 \geq x^2-5 \quad | -x+1$$

$$x^2-x-4 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \dots$$

2. Fall: $x-1 < 0$

$$(x < 1)$$

$$-(x-1) \geq x^2-5$$

$$-x+1 \geq x^2-5 \quad | +x-1$$

$$x^2+x-6 \leq 0$$

$$x_{1/2} = \dots$$

Übungsaufgaben zum Basismathetest

Mittwoch, 27. September 2017

1. Gleichungssysteme

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem!

$$\begin{array}{l} I \quad x + y + z = 6 \\ II \quad 3x + 2y + z = 10 \\ III \quad 5x - 3y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I - I & 2x + y & = 4 \quad (A) \\ III & 5x - 3y & = -1 \end{array}$$

$$3A + III \quad 11x = 11 \rightarrow x = 1 \quad \text{in } A \quad 2 + y = 4 \rightarrow y = 2 \quad \text{in } I$$

$$1 + 2 + z = 6 \rightarrow z = 3$$

2. Proportionen

10 Reinigungsfachkräfte können ein Hochhaus mit 80 Stockwerken in 20 Tagen reinigen. Nach 10 Tagen sind 2 Reinigungskräfte für den Rest des Auftrags nicht mehr verfügbar. Um wie viele Tage verzögert sich der Auftrag?

Stockwerke pro Tag pro 10 RK: 4

Stockwerk pro Tag pro 1 RK: 0,4

Nach 10 Tagen geschafft: 40, übrig: 40

Stockwerke pro Tag pro 8 RK: $8 \cdot 0,4 = 3,2$

Resttage: $40 : 3,2 = 12,5 \rightarrow 2,5 \text{ Tage Verzögerung}$

3. Arithmetik

Vereinfachen Sie folgenden Terme!

$$\frac{8(b^2 - a^2)}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{32a}{4b + 4a} =$$

$$5 + \frac{a^x - 3a^{2x}}{a^x} = 5 + \frac{a^x(1 - 3a^x)}{a^x} = 6 - 3a^x = 3(2 - a^x)$$

Lösen Sie folgende Gleichung!

$$\frac{\sin^2 a}{1 + \cos a} = 1 \rightarrow \frac{1 - \cos^2 a}{1 + \cos a} = 1 \quad \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)} = 1$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

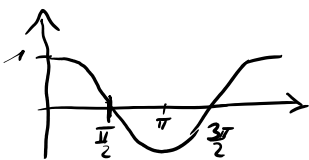
$$1 - \cos a = 1$$

$$\cos a = 0$$

$$= \arccos(0)$$

$$a_1 = \frac{\pi}{2}; a_2 = \frac{3\pi}{2}; a_3 = \frac{5\pi}{2}; \dots$$

$$(a_n = n \cdot \pi - \frac{1}{2} \pi)$$



$$\frac{8(b-a)(b+a)}{(a-b)^2} + \frac{32a}{4(a+b)} = \frac{-8(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} + \frac{8a}{(a+b)} =$$

$$\frac{-8(a+b) \cdot (a+b)}{(a-b) \cdot (a+b)} + \frac{8a \cdot (a-b)}{(a+b) \cdot (a-b)} = \frac{-8(a^2 + 2ab + b^2) + 8a(a-b)}{(a-b)(a+b)} =$$

$$\frac{-8a^2 - 16ab - 8b^2 + 8a^2 - 8ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{-24ab - 8b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{-8b(3a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

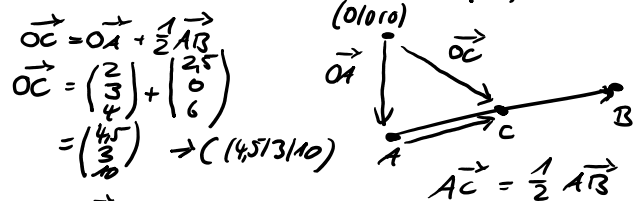
4. Vektoren

Welchen Abstand im Raum haben die Punkte A(2|3|4) und B(7|3|16)?

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 3-3 \\ 16-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \quad |\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2} = 13$$

Normieren Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die Länge 1!

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5, \quad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Welche Koordinaten hat der Punkt, der die Strecke [AB] halbiert?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Geben Sie einen beliebigen Vektor an, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht!

5. Ungleichungen

Lösen Sie die Ungleichung

$$x - 5 < \frac{6}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

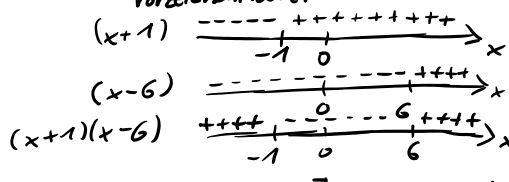
1. Fall: $x > 0$

$$x^2 - 5x < 6$$

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$(x+1)(x-6) < 0$$

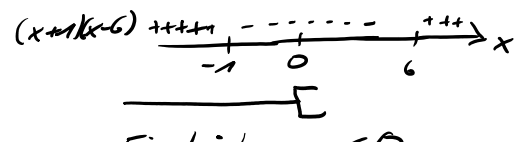
Vorzeichenstabelle:

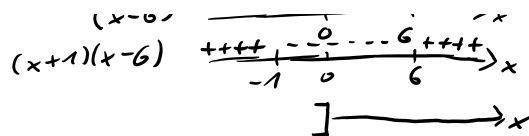


2. Fall: $x < 0$

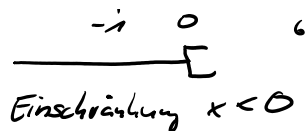
:

$$(x+1)(x-6) > 0$$





$$\mathbb{L}_1 =]0; 6[$$



$$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -1[$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; -1[\cup]0; 6[$$

6. Funktionen

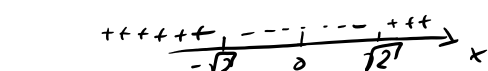
Skizzieren Sie den Verlauf folgender Funktionen! Berechnen Sie dazu ggf. Definitionsbereiche, Nullstellen, Grenzwerte und Extrempunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2)}$

b) Definitionsbereich: $x^2 - 2 \geq 0$
 $x^2 \geq 2$ $\sqrt{\quad}$
 $|x| \geq \sqrt{2}$



$$D = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$$

Nullstellen: $x^2 - 2 = 0$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}$$

$$N_1(-\sqrt{2} | 0) \quad N_2(\sqrt{2} | 0)$$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x$$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2)} = \frac{1}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}$

Definitionsbereich: $x^2 - 2 = 0$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \sqrt{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

keine Nullstellen

Grenzwerte:

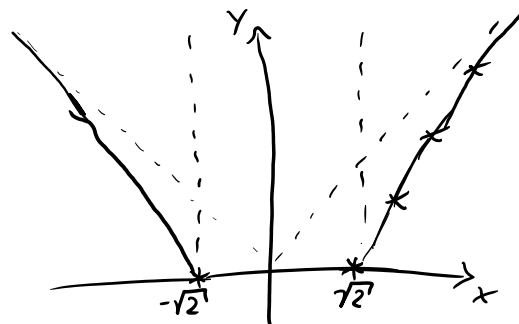
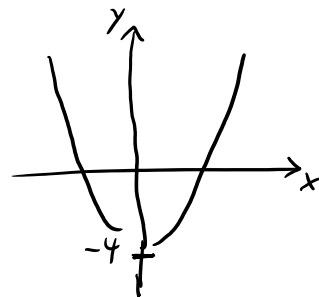
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$$

a)



Wertetabelle:

x	2	3	4
f(x)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{14}$

