EQC - Lösungen 3

Aufgabe1:

$$|\mathrm{xy}>= \alpha_x\alpha_y|00> +\alpha_x\beta_y|01> +\beta_x\alpha_y|10> +\beta_x\beta_y|11>$$

$$C(|\mathrm{xy}>) = 2\cdot\left|\left(\alpha_x\alpha_y\cdot\beta_x\beta_y\right) - \left(\alpha_x\beta_y\cdot\beta_x\alpha_y\right)\right|$$

$$|x> = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C(|\mathrm{x}>) = 2\cdot\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0\right) - \left(0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = 0$$

$$|y> = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$C(|\mathrm{y}>) = 2\cdot\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0\cdot 0)\right| = 1$$

Aufgabe 2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $H \otimes I$

$$H \otimes I = \begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & k \\ k & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

- $I \otimes H$

$$I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

- $H \otimes H$

$$H \otimes H = \begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \\ k^2 & k^2 & -k^2 & -k^2 \\ k^2 & -k^2 & -k^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

- $I \otimes \sigma_x$

$$I \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\sigma_x \otimes I$

$$\sigma_x \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\sigma_x \otimes \sigma_x$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei:

$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

- Wieviele Funktionen f gibt es?

x	0	1
f_1	0	0
f_2	0	1
f_3	1	0
f_4	1	1

- Gebe diese Funktionen an

$f_1(x) = 0$
$f_2(x) = x$
$f_3(x) = \neg x$
$f_4(x) = 1$

- Berechne für $U_f: |\mathrm{xy}> \rightarrow |\mathrm{x}, \mathrm{y} \oplus \mathrm{f}(x)>$:

$U_f|00>$ $U_f|01>$ $U_f|10>$ $U_f|11>$

x/y	0	1
$f_1(x)$	0	0
0	0	1
1	0	1

x/y	0	1
$f_2(x)$	0	1
0	0	1
1	1	0

x/y	0	1
$f_3(x)$	1	0
0	1	0
1	0	1

x/y	0	1
$f_4(x)$	1	1
0	1	1
1	0	0

- Gebe die Transformationsmatrizen der einzelnen Abbildungen an

$f_1(x) = 0$:

$$U_{f_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$U_{f_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$f_2(x) = x$:

$$U_{f_2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad U_{f_2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$U_{f_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$f_3(x) = \neg x$:

$$U_{f_3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$U_{f_3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$f_4(x) = 1$:

$$U_{f_4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad U_{f_4}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad U_{f_4}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$U_{f_4}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

- Zeige dass diese Matrizen unitär sind

$$U_{f_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad U_{f_1}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad U_{f_1}\cdot U_{f_1}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$U_{f_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad U_{f_2}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad U_{f_2}\cdot U_{f_2}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$U_{f_3}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad U_{f_3}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad U_{f_3}\cdot U_{f_3}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$U_{f_4}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad U_{f_4}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad U_{f_4}\cdot U_{f_4}{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A=\begin{pmatrix}k^2&k^2&k^2&k^2\\k^2&-k^2&k^2&-k^2\\k^2&k^2&-k^2&-k^2\\k^2&-k^2&-k^2&k^2\end{pmatrix}$$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Q = A \cdot CNOT \ \cdot A$:

$$B = \ A \cdot CNOT \ \ = \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \\ k^2 & k^2 & -k^2 & -k^2 \\ k^2 & -k^2 & -k^2 & k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \ \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & -k^2 & -k^2 & k^2 \\ k^2 & k^2 & -k^2 & -k^2 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \ B \ \cdot A = \ \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & -k^2 & -k^2 & k^2 \\ k^2 & k^2 & -k^2 & -k^2 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \\ k^2 & k^2 & -k^2 & -k^2 \\ k^2 & -k^2 & -k^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

$$l = \ k^4 = \frac{1}{4}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4l \\ 0 & 0 & 4l & 0 \\ 0 & 4l & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|x> = |0> \ \otimes \ |1> = \ \binom{1}{0} \otimes \binom{0}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01>$$

$|y> = Q \ |x> \ :$

$$|y> = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11>$$