Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

Statistik 2. Teil

Prof. Dr. Roland Jeske

13. Wahrscheinlichkeit

Unterschiedliche Begriffe:

- **Subjektive Wahrscheinlichkeit**
- **Frequentistische Wahrscheinlichkeit**
- **Theoretische Wahrscheinlichkeit (im Fokus dieser Vorlesung)**

13.1 Kombinatorik

Permutationen (ohne Wiederholung)
Es gibt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \tag{13.1}$$

Arten, n **unterschiedliche** Objekte in einer **Reihe** anzuordnen.

Beispiel 13.1 *Die erste Reihe eines Hörsaales umfasst 10 Sitzplätze. Wie viele Möglichkeiten gibt es für 10 Studierende, in dieser Reihe Platz zu nehmen?*

Lösung:
Es gibt $10! = 3.628.800$ Möglichkeiten. $\square$

13.1 Kombinatorik

Permutationen (mit Wiederholung)

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Beispiel 1.2 *Ein Kleinkind spielt mit seinen unterschiedlich farbigen Bauklötzen. Es besitzt jeweils untereinander nicht zu unterscheidende Bauklötze folgender Art: fünf rote, drei blaue und zwei gelbe Bauklötze.*
Wie viele unterschiedliche „Türme“ kann das Kleinkind bei Verwendung aller Bauklötze bauen?

$$\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2.520$$

13.1 Kombinatorik

Variationen (mit Wiederholung)
Es gibt

$$n^k$$

Arten, unter **Berücksichtigung der Reihenfolge** nacheinander k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln **mit** Zurücklegen zu ziehen.

Beispiel 13.4 *Wie viele unterschiedliche Ausgänge gibt es, wenn man mit einem Würfel dreimal hintereinander würfelt?*

Lösung:
Bei jedem einzelnen Würfelwurf gibt es 6 verschiedene Ausgänge, beim dreimaligen Würfeln erhält man damit

$$6^3 = 216 \text{ Möglichkeiten.}$$

13.1 Kombinatorik

Variationen (ohne Wiederholung)
Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}, \qquad k \leq n \tag{13.3}$$

Arten, unter **Berücksichtigung der Reihenfolge** nacheinander k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln **ohne** Zurücklegen zu ziehen.

Beispiel 13.5 *Bei einer Pferdewette kann man einen Tipp auf den Zieleinlauf der ersten drei Pferde abgeben.*
Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind möglich, wenn 20 Pferde am Start sind?

Lösung:

$$\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$$

$\square$

13.1 Kombinatorik

Kombinationen (ohne Wiederholung)
Werden aus einer Urne mit n Kugeln **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge und **ohne** Zurücklegen k Kugeln gezogen, so gibt es dafür

$$\binom{n}{k}, \qquad k \leq n$$

Möglichkeiten.

Beispiel 13.6 *Beim deutschen Zahlenlotto „6 aus 49“ werden jeweils am Mittwoch Abend sowie am Samstag Abend nacheinander sechs Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 49 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 49 beschriftet sind, gezogen. Die Teilnehmer an der Lotterie dürfen zuvor sechs Nummern auf einem Tippschein ankreuzen.*
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, sechs Zahlen aus den 49 Zahlen auszuwählen?

13.1 Kombinatorik

Kombinationen (mit Wiederholung)
Werden aus einer Urne mit n Kugeln **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge aber **mit** Zurücklegen k Kugeln gezogen, so gibt es dafür

$$\binom{n+k-1}{k} \tag{13.4}$$

Möglichkeiten.

Beispiel 13.7 *Wie viele unterschiedliche Ausgänge gibt es beim gleichzeitigen Werfen von zwei nicht unterscheidbaren Würfeln?*

13.1 Kombinatorik

Zusammenfassung Kombinatorik

Eine Übersicht über die Anzahl an Möglichkeiten, k Kugeln aus n Kugeln zu ziehen, gibt die nachfolgende Tabelle an:

	Ziehen	
	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen ($k \leq n$)
Reihenfolge wichtig	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Reihenfolge unwichtig	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

13.2 Zufallsexperiment

Bei einem Zufallsexperiment kennt man **mögliche Ausgänge:**

Beispiele:

- **Würfelwurf:** 1,2,3,4,5,6
- **Münzwurf:** Kopf, Zahl

Aber: vorab unbekannt, welcher Ausgang eintreten wird!

13.2 Ereignisse und Mengen

Ereignisse:
Elementarereignis (einzelnes Ereignis) ω
Zusammengesetzte Ereignisse A, B, C,…

Menge aller Elementarereignisse: Ω

Ereignisse werden mathematisch im Mengenkalkül dargestellt.

13.2 Ereignisse und Mengen

Beim einfachen Würfelwurf, d.h. die Ereignismenge lautet

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

betrachte man beispielhaft folgende Ereignisse:

$A_1 = \{1, 3, 5\}$	„Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt."
$A_2 = \{1, 2, 3\}$	„Es wird höchstens die Augenzahl 3 gewürfelt."
$A_3 = \{2, 4, 6\}$	„Es wird eine gerade Zahl gewürfelt."
$A_4 = \{2, 4\}$	„Es wird eine 2 oder eine 4 gewürfelt."

13.2 Ereignisse und Mengen

Symbol	Bezeichnung im Mengenkalkül	Bedeutung als Ereignis	Beispiel Würfelwurf
$A \cap B$	Schnittmenge	Sowohl Ereignis A als auch Ereignis B treten ein.	$A_1 \cap A_2 = \{1, 3\}$. D.h., es wird eine „1“ oder eine „3“ gewürfelt.
$A \cup B$	Vereinigungsmenge	Mindestens ein Ereignis A oder B tritt ein (oder auch beide Ereignisse treten ein)	$A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 5\}$. D.h., es wird eine der Zahlen 1,2,3 oder 5 geworfen.
$\emptyset$	Leere Menge	unmögliches Ereignis	$A_1 \cap A_3 = \emptyset$. D.h., es wird eine Zahl gewürfelt, die gleichzeitig gerade und ungerade ist. Es handelt sich um das unmögliche Ereignis.
Ω	Ereignismenge	sicheres Ereignis	$A_1 \cup A_3 = \Omega$. D.h., es wird eine Zahl gewürfelt, die gerade oder ungerade ist. Es handelt sich um das sichere Ereignis.

13.2 Ereignisse und Mengen

Symbol	Bezeichnung im Mengenkalkül	Bedeutung als Ereignis	Beispiel Würfelwurf
$A \setminus B$	Differenzmenge	A aber nicht B tritt ein	$A_2 \setminus A_3 = \{1, 3\}$. D.h., es wird eine Zahl kleiner gleich drei gewürfelt, die aber keine gerade Zahl ist.
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B	Wenn A eintritt, so tritt auch B ein	$A_4 \subset A_3$: Wenn eine der Zahlen 2 oder 4 gewürfelt wird, wird eine gerade Zahl gewürfelt.
$\overline{A}$	Komplementärmenge	Komplementärereignis, Gegenereignis: Das Gegenteil von Ereignis A tritt ein	$\overline{A}_1 = \{2, 4, 6\}$. Das Gegenteil davon, eine ungerade Zahl zu würfeln, besteht darin, eine gerade Zahl zu würfeln.

13.2 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ereignisse}}{\text{Anzahl möglicher Ereignisse}}$$

falls

- Alle Elementareignisse gleich wahrscheinlich sind.
- Die Anzahl der Elementarereignisse endlich ist.

13.2 Klassische Wahrscheinlichkeit

Kolmogoroff-Axiome

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$ (Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis)
- $P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$ falls A_i disjunkt.

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (Komplementärereignisses)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{13.5}$$

Beispiel 13.8 *(Geburtstagsparadoxon)*
Stellen Sie sich eine Gruppe von 30 zufällig ausgewählten Personen vor, etwa eine zufällig ausgewählte Gruppe von Studierenden in Ihrem Semester.
Ist es wahrscheinlicher, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben oder ist es wahrscheinlicher, dass alle an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben?

Lösung:
Man betrachte folgende Ereignisse:

A : 'Mindestens zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.'
$\overline{A}$: 'Alle Personen haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag.'

13.2 Klassische Wahrscheinlichkeit

Für das Gegenereignis erhält man daher:

$$P(\overline{A}) = \frac{\frac{365!}{(365-30)!}}{365^{30}} = 0,294.$$

Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit für A über die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis durch

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,706.$$

13.2 Klassische Wahrscheinlichkeit

n	$P(\overline{A})$	$P(A)$	n	$P(\overline{A})$	$P(A)$	n	$P(\overline{A})$	$P(A)$
2	0,997	0,003	25	0,431	0,569	48	0,039	0,961
3	0,992	0,008	26	0,402	0,598	49	0,034	0,966
4	0,984	0,016	27	0,373	0,627	50	0,030	0,970
5	0,973	0,027	28	0,346	0,654	51	0,026	0,974
6	0,960	0,040	29	0,319	0,681	52	0,022	0,978
7	0,944	0,056	30	0,294	0,706	53	0,019	0,981
8	0,926	0,074	31	0,270	0,730	54	0,016	0,984
9	0,905	0,095	32	0,247	0,753	55	0,014	0,986
10	0,883	0,117	33	0,225	0,775	56	0,012	0,988
11	0,859	0,141	34	0,205	0,795	57	0,010	0,990
12	0,833	0,167	35	0,186	0,814	58	0,008	0,992
13	0,806	0,194	36	0,168	0,832	59	0,007	0,993
14	0,777	0,223	37	0,151	0,849	60	0,006	0,994
15	0,747	0,253	38	0,136	0,864	61	0,005	0,995
16	0,716	0,284	39	0,122	0,878	62	0,004	0,996
17	0,685	0,315	40	0,109	0,891	63	0,003	0,997
18	0,653	0,347	41	0,097	0,903	64	0,003	0,997
19	0,621	0,379	42	0,086	0,914	65	0,002	0,998
20	0,589	0,411	43	0,076	0,924	66	0,002	0,998
21	0,556	0,444	44	0,067	0,933	67	0,002	0,998
22	0,524	0,476	45	0,059	0,941	68	0,001	0,999
23	0,493	0,507	46	0,052	0,948	69	0,001	0,999
24	0,462	0,538	47	0,045	0,955	70	0,001	0,999

13.2 Klassische Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{13.6}$$

de Morgan'sche Regeln

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) \tag{13.7}$$
$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \tag{13.8}$$

Beispiel 13.9 *Auf einer Studentenfeier, bei der als alkoholische Getränke Bier und Wein ausgeschenkt werden, sind 60% der Anwesenden Weintrinker und 70% Biertrinker. Außerdem trinkt jeder zweite Bier und Wein.*
Welcher Anteil trinkt keinen Alkohol?

Lösung:

Man betrachte folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} B &: \quad \text{„Ein zufällig ausgewählter Partybesucher trinkt Bier“,} \\ W &: \quad \text{„Ein zufällig ausgewählter Partybesucher trinkt Wein“.} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$P(B) = 0,7 \qquad P(W) = 0,6 \qquad P(B \cap W) = 0,5.$$

Aus Gleichung (13.6) folgt:

$$P(B \cup W) = 0,7 + 0,6 - 0,5 = 0,8.$$

Damit erhält man mit Gleichung (13.8) :

$$P(\overline{B} \cap \overline{W}) = P(\overline{B \cup W}) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

13.2 Klassische Wahrscheinlichkeit

Monotonie von Ereignissen

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B) \tag{13.10}$$

Wahrscheinlichkeit für die Differenz zweier Ereignisse

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{13.11}$$

Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses

$$P(\emptyset) = 0 \tag{13.12}$$

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{falls } P(B) > 0 \\ 0 & \text{falls } P(B) = 0 \end{cases} \qquad (13.13)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|\cdot)$ erfüllt die Kolmogoroff-Axiome, d.h.

$$\begin{aligned} &P(A|B) \geq 0 \\ &P(\Omega|B) = 1 \\ &P(\cup A_i|B) = \sum_i P(A_i|B) \text{ falls } A_i \text{ disjunkt} \end{aligned}$$

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit des bedingten Gegenereignisses (des bedingten Komplementärereignises)

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Aber!

$$P(A|B) \neq P(B|A).$$

Kolmogoroff-Axiome gelten für das erste Argument, nicht für das zweite!

$$P(A|\overline{B}) \neq 1 - P(A|B).$$

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Totale Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i) \tag{13.14}$$

mit (A_i) Zerlegung von Ω (d.h. $\bigcup_i A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$).

Bayes-Formel

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

mit (A_i) Zerlegung von Ω.

13.3 Bayes-Formel

Stellen Sie sich eine Quizshow vor, bei der Sie als Kandidat eines von drei Toren auswählen können. Vorab sei bekannt, dass sich hinter einem Tor ein attraktiver Hauptpreis befindet. Hinter den anderen beiden befindet sich als Trostpreis jeweils eine Ziege.

Sie wählen eines der Tore aus, sagen wir Tor 1. Indem der Moderator eines der anderen Tore öffnet – sagen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit Tor 3 – und ihnen eine Ziege zeigt, sagt er zu Ihnen: „Gut, dass Sie sich nicht für Tor 3 entschieden haben! Ich frage Sie nun: Wollen Sie bei der Wahl von Tor 1 bleiben oder wollen Sie zu Tor 2 wechseln?“

Wie werden Sie sich entscheiden, wenn bekannt ist, dass der informierte Moderator stets ein Tor mit Niete öffnet, um so die Spannung zu erhöhen?

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wichtige Anwendung: Medizinische Diagnostik mittels medizinischer Tests:

K	Patient ist erkrankt
$\overline{K}$	Patient ist nicht erkrankt, d.h. gesund
T	Der Test liefert ein positives Ergebnis
$\overline{T}$	Der Test liefert ein negatives Ergebnis

Prävalenz

Als Prävalenz bezeichnet man in der Medizin die Wahrscheinlichkeit, mit der eine bestimmte Krankheit in der Bevölkerung vorkommt:

$$\text{Prävalenz} = P(K)$$

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sensitivität

$$\text{Sensitivität} = P(T|K) = \frac{P(K \cap T)}{P(K)}$$

Die Sensitivität eines Tests gibt somit die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis an, falls die untersuchte Person tatsächlich erkrankt ist.

Spezifität

$$\text{Spezifität} = P(\overline{T}|\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{K})}$$

Die Spezifität eines Tests gibt damit die Wahrscheinlichkeit für ein negatives Testergebnis an, falls die untersuchte Person nicht erkrankt ist.

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel 13.11 *Man betrachte einen Test, der eine Sensitivität von 98% und eine Spezifität von 99% hat. Macht es Sinn, eine Reihenuntersuchung durch zu führen, falls die Krankheit eine Prävalenz von* $\frac{1}{10.000}$ *besitzt?*
Berechnen Sie dazu den prädiktiven Wert eines positiven Testergebnisses.

Lösung: siehe Vorlesung

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Zurück zum Ziegenproblem:

Was ist der Grund für das vermeintlich eigentümliche Ergebnis?

-> Der Moderator kann nicht **unabhängig** vom tatsächlichen Standort des Hauptpreises eine Tür öffnen!

13.3 Unabhängigkeit von Ereignissen

Merke:

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad P(A|B) = P(A)$$

D.h., wenn das eigentlich interessierende Ereignis unabhängig von der Bedingung ist, hat die Bedingung keinen Einfluss!

Allgemein nennt man

$P(A)$ a-priori-Wahrscheinlichkeit (bevor man Kenntnis über das Eintreten von B hat)

$P(A|B)$ a-posteriori-Wahrscheinlichkeit (nachdem man Kenntnis über das Eintreten von B hat).

14 Zufallsvariablen

Bislang:
Beschreibung kompliziert (Ereignisalgebra)
Zudem: Häufig ähnliche Strukturen:

- Bei der Qualitätskontrolle zieht man eine Stichprobe, um den Anteil der defekten Einheiten zu ermitteln.
- In der Wahlforschung erhebt man den Anteil der Wähler, die eine bestimmte Partei wählen, mittels einer Stichprobe.
- Beim Werfen eines fairen Würfels interessiert man sich für die Anzahl der Sechsen, die beim 10-maligen Werfen eintritt.

14 Zufallsvariablen

$\Rightarrow$ **Bei allen drei Beispielen gibt es zwei Ausgänge („Gut“ und „Schlecht“ bzw. „Erfolg“ und „kein Erfolg“)**
Warum sollte man das jedes Mal erneut modellieren?

Lösung: Zufallsvariablen X mit **speziellen Verteilungen**.

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & A \to x \end{aligned}$$

14 Zufallsvariablen

Beispiel 2.1 *Die Zufallsvariable X zähle die Augenzahl beim Werfen eines fairen Würfels.*
Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Zufallsexperiment.

Lösung:
Es gilt:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \ldots = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

14 Zufallsvariablen

Beispiel *Die Zufallsvariable X zähle die Anzahl der Sechsen beim einmaligen Werfen eines fairen Würfels.*
Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Zufallsexperiment.

Lösung:
Im vorliegenden Fall gilt:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{falls eine 6 geworfen wird} \\ 0 & \text{falls keine 6 geworfen wird} \end{cases}$$

Damit erhält man

$$P(X=1) = \frac{1}{6}, \qquad P(X=0) = \frac{5}{6}$$

Beispiel 14.3 *Von einer Kapitalanlage über 100€ sei bekannt, dass sie mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit eine Rendite von 5€ und mit Wahrscheinlichkeit von jeweils einem Viertel einen Verlust von 1€ bzw. einen Gewinn von 8€ erziele.*

Bezeichnet man mit der Zufallsvariablen X den Gewinn in €, so ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X wie folgt gegeben:

$$P(X=-1)=0,25, \qquad P(X=5)=0,5, \qquad P(X=8)=0,25.$$

14 Zufallsvariablen

Alternativ wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion häufig auch in folgender Darstellung angegeben:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 0,25 & x_i = -1 \\ 0,5 & x_i = 5 \\ 0,25 & x_i = 8 \end{cases}$$

Beispiel 14.4

$$P(X = x_i) = \frac{10!}{(10 - x_i)!x_i!} 0,5^{10}, \qquad x_i = 0, 1, \ldots, 10.$$

Alternativ müsste man die elf unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auflisten:

x_i	$P(X = x_i)$	x_i	$P(X = x_i)$	x_i	$P(X = x_i)$	x_i	$P(X = x_i)$
0	0,0010	3	0,1172	6	0,2051	9	0,0098
1	0,0098	4	0,2051	7	0,1172	10	0,0010
2	0,0439	5	0,2461	8	0,0439		

14.1 Diskrete Zufallsvariablen

Träger einer diskreten Zufallsvariablen

$$D_X = \{x_i | P(X = x_i) > 0\}$$

Es interessieren nur die **Ausgänge mit positiver Wahrscheinlichkeit!**

Beispiel Würfelwurf:

P(X=7)=P(X=-27)=P(X=3,14)=0 !!!

14.1 Diskrete Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsfunktion (auch: diskrete Dichte)
Angabe aller

$$P(X = x_i) \qquad \text{mit } x_i \in D_X$$

Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsfunktion

- $P(X = x_i) \geq 0$
- $P(X = x_i) \leq 1$
- $\sum\limits_{x_i \in D_X} P(X = x_i) = 1$

14.1 Diskrete Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \in D_X, x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- F ist monoton steigend.
- F ist rechtsseitig stetig, d.h. für $h > 0$ gilt: $\lim_{h \to 0} F(a+h) = F(a)$.

14.1 Diskrete Zufallsvariablen

Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen
Eine diskrete Zufallsvariable kann durch Angabe ihrer **Wahrscheinlichkeitsfunktion** oder ihrer **Verteilungsfunktion** hinreichend beschrieben werden.

Vielfach wird die Beschreibung über die Wahrscheinlichkeitsfunktion erfolgen, da die Verteilungsfunktionen mitunter schwierig darzustellen sind.

14.2 Stetige Zufallsvariablen

Beispiel:

Interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass ein(e) sozialversicherungspflichtig Beschäftigte(r) jährlich genau

65.423,67€

verdient?

-> **Nein**, wohl eher die Wahrscheinlichkeit, dass

$P(65.000 < X \leq 70.000)$

14.2 Stetige Zufallsvariablen

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Dichte
Wenn sich die Wahrscheinlichkeit einer stetigen Zufallsvariable schreiben lässt als

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx,$$

so heißt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Dichte (auch: Dichtefunktion, stetige Dichte).

14.2 Stetige Zufallsvariablen

Eigenschaften einer Dichte

- $f(x) \geq 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Träger einer stetigen Zufallsvariablen

$$D_X = \{x | f(x) > 0\}$$

Symmetrische Verteilung

$$X \text{ symmetrisch um } c \quad \Leftrightarrow \quad f(c - x) = f(x + c)$$

14.2 Stetige Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- F ist monoton steigend.
- F ist stetig, d.h. $\lim_{h \to 0} F(a+h) = F(a)$.

14.2 Stetige Zufallsvariablen

Umrechnung Dichte $\leftrightarrow$ Verteilungsfunktion

Die Dichte erhält man, indem man die Verteilungsfunktion ableitet (differenziert):

$$f(x) = F'(x) \tag{14.2}$$

Die Verteilungsfunktion erhält man aus der Dichte durch Integration:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{14.3}$$

14.2 Stetige Zufallsvariablen

Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen
Eine stetige Zufallsvariable kann durch Angabe ihrer **Dichte** oder ihrer **Verteilungsfunktion** hinreichend beschrieben werden.

Auch im stetigen Fall wird man sich vielfach bei der Beschreibung einer Verteilung auf die Angabe der zugehörigen Dichte zurückziehen. Vielfach sind die Verteilungsfunktionen schwer oder gar nicht explizit anzugeben.

14.3 Momente

Aus deskriptiver Statistik: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$

Jetzt: Wahrscheinlichkeiten statt Häufigkeiten:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

$$E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i P(X = x_i)$$

falls $E(|X|) < \infty$.

Die Bedingung $E(|X|) < \infty$ wird in dieser Vorlesung außer Acht gelassen!

(Führt aber bei bestimmten Anwendungen durchaus zu Problemen, siehe Buch)

14.3 Momente

Beispiel:
Wie lautet der Erwartungswert beim Werfen eines fairen Würfels?

Lösung: siehe Vorlesung

Erwartungswert einer transformierten diskreten Zufallsvariablen

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in D_X} g(x_i) P(X = x_i)$$

falls $E(|g(X)|) < \infty$.

14.3 Momente

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

falls $E(|X|) < \infty$.

Erwartungswert einer linear transformierten Zufallsvariablen

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

14.3 Momente

Varianz

$$Var(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Verschiebungsformel für die Varianz

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \qquad (14.7)$$

14.3 Momente

Beispiel: Wie lautet die Varianz beim Werfen eines fairen Würfels?

Lösung: Vorlesung

14.3 Momente

k-tes zentriertes Moment

$$\mu_k(X) = E\left[(X - E(X))^k\right]$$

k-tes nichtzentriertes Moment

$$m_k(X) = E\left[X^k\right]$$

14.3 Momente

Schiefe einer linearen transformierten Zufallsvariablen

$$\gamma_1(a + bX) = \text{sign}(b)\gamma_1(X) \tag{14.9}$$

Wölbung und Exzess

$$\begin{aligned}
\gamma_2(X) &= \frac{\mu_4(X)}{\mu_2(X)^2} = \frac{E\left[(X - E(X))^4\right]}{(Var(X))^2} \\
\gamma_2^*(X) &= \frac{\mu_4(X)}{\mu_2(X)^2} - 3 = \frac{E\left[(X - E(X))^4\right]}{(Var(X))^2} - 3
\end{aligned}$$

14.3 Momente

Abschließendes Fazit:

- **Momente werden bei der Betrachtung spezieller Verteilungsmodelle wichtig sein.**
- **Die Berechnung von theoretischen Momenten ist in den praktisch interessierenden Fällen jedoch kompliziert (keine Klausuraufgabe).**

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Gemeinsame Zufallsexperimente
z.B. Münz- und Würfelwurf gleichzeitig…

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier diskreter Zufallsvariablen

$$P(X = x, Y = y)$$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Gemeinsame Zufallsexperimente

z.B. Münz- und Würfelwurf gleichzeitig…

Beispiel 15.1 *Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsvariablen X und Y sei wie folgt gegeben:*

$P(X = x, Y = y)$		$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$
x	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Gemeinsame Dichte(-funktion) zweier stetiger Zufallsvariablen

$$f_{X,Y}(x, y)$$

Gemeinsame Verteilungsfunktion zweier Zufallsvariablen

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Randwahrscheinlichkeiten

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_{y_j \in D_Y} P(X = x, Y = y) \\
P(Y = y) &= \sum_{x_i \in D_X} P(X = x, Y = y)
\end{aligned}
$$

Randdichten

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{D_Y} f_{XY}(x, y) dy \\
f_Y(y) &= \int_{D_X} f_{XY}(x, y) dx
\end{aligned}
$$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

X, Y **sind (stochastisch) unabhängig**

$\Leftrightarrow$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) * F_Y(y)$ **für** $x \in D_X, y \in D_Y$
(im diskreten und stetigen Fall)

$\Leftrightarrow$ $P(X = x, Y = y) = P(X = x) * P(Y = y)$ **für** $x \in D_X, y \in D_Y$
(im diskreten Fall)

$\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y)$ **für** $x \in D_X, y \in D_Y$ **(im stetigen Fall)**

Kovarianz zweier Zufallsvariablen

$$\sigma_{xy} = Cov(X,Y) = E\left((X - E(X)(Y - E(Y)\right) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$$

Korrelation zweier Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \varrho_{XY} &= Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \\ &= \frac{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}\sqrt{E(Y^2) - [E(Y)]^2}} \in [0;1] \end{aligned}$$

Falls $\varrho_{XY} = Corr(X,Y) = 0$ gilt, so nennt man die Zufallsvariablen X und Y **unkorreliert**.

Unkorrelierte Zufallsvariablen

$$X, Y \text{ unkorreliert} \quad \Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = 0 \tag{15.8}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \tag{15.9}$$

Unabhängigkeit und Unkorreliertheit zweier Zufallsvariablen

Aus der Unabhängigkeit folgt die Unkorreliertheit:

$$X, Y \text{ unabhängig} \quad \Rightarrow \quad X, Y \text{ unkorreliert} \tag{15.10}$$

Achtung! Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht!** Dazu betrachte man folgendes Beispiel:

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel *Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsvariablen X und Y sei wie folgt gegeben:*

$P(X=x, Y=y)$		$y=-1$	$y=0$	$y=1$
x	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Für $E(X \cdot Y)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=-1}^{1} \sum_{y=-1}^{1} xyP(X = x; Y = y) \\
&= (-1)\cdot(-1)\frac{1}{8} + (-1)\cdot 0\frac{1}{8} + (-1)\cdot 1\frac{1}{8} + 0\cdot(-1)\frac{1}{8} \\
&\quad +(-1)\cdot 1\frac{1}{8}1\cdot(-1)\frac{1}{8} + 1\cdot 0\frac{1}{8} + 1\cdot 1\frac{1}{8} \\
&= 0
\end{aligned}$$

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

$$E(X) \;=\; \sum_{x=-1}^{1} xP(X = x) = -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$

$$E(Y) \;=\; \sum_{y=-1}^{1} yP(Y \quad\quad -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0$$

Damit erhält man für die Kovarianz:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

Damit sind die Zufallsvariablen X und Y unkorreliert.

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zur Abhängigkeit muss **für alle** $x \in D_X$ und $y \in D_Y$ gelten:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \tag{15.11}$$

Dazu betrachte man etwa

$$P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = P(X = -1)P(Y = -1)$$

Damit gibt es eine Wahrscheinlichkeit $P(X = x, Y = y)$ für die Gleichung (15.11) **nicht** gilt. Da diese aber für alle $x \in D_X, y \in D_Y$ gelten muss, ist damit bereits gezeigt, dass X und Y **abhängig** sind.

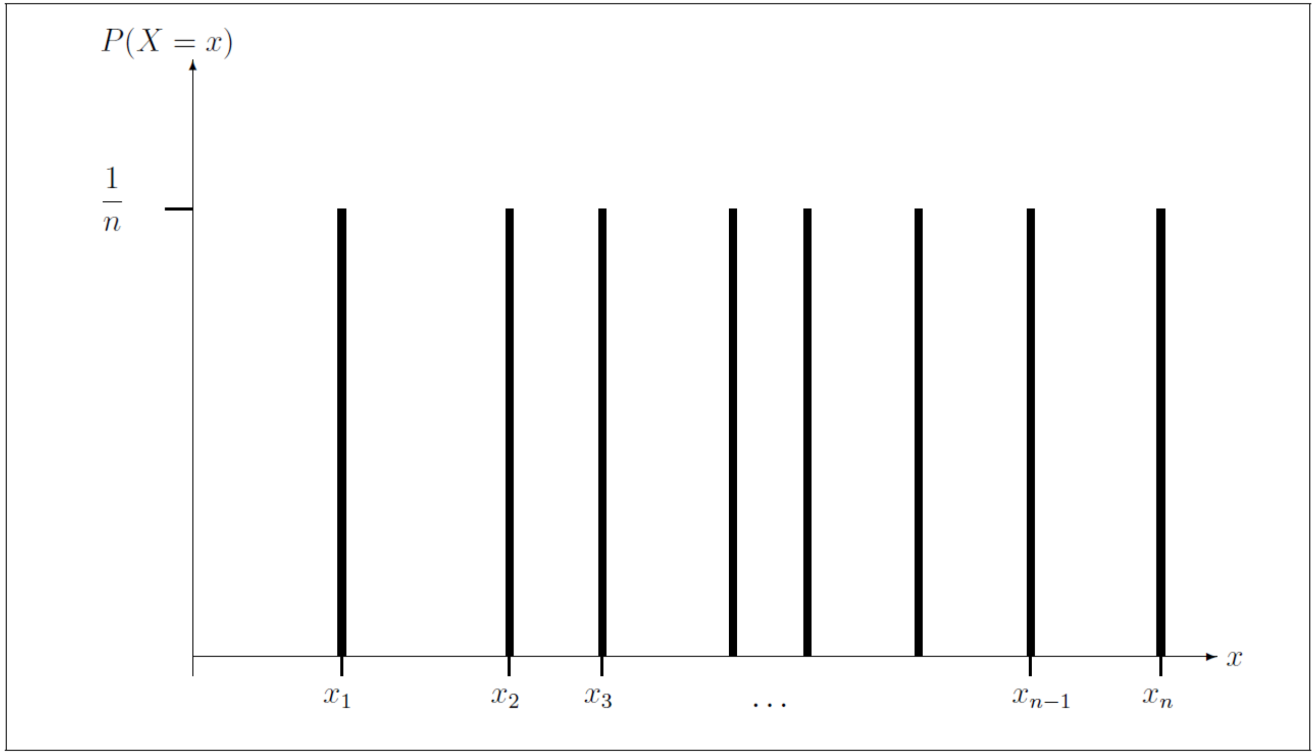
15 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Diese Erkenntnis ist nicht neu (siehe Deskriptive Statistik!):

Unkorreliertheit bedeutet: „kein linearer Zusammenhang“! Die Abhängigkeit kann durchaus eine andere sein (quadratisch,…)

(Häufiger Fehler in der statistischen Anwendung!)

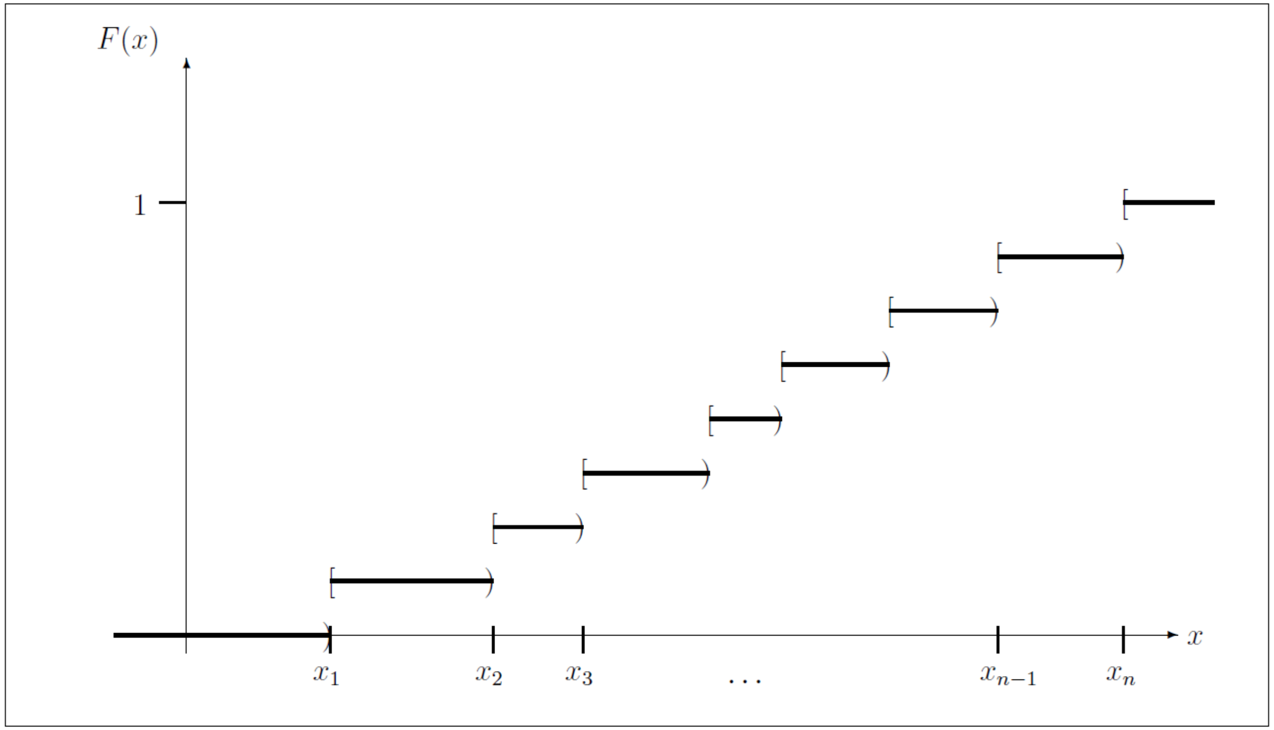
16.1 Diskrete Gleichverteilung



Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Gleichverteilung

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \dots, n$$

16.1 Diskrete Gleichverteilung



Verteilungsfunktion der diskreten Gleichverteilung

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty;x]}(x_i)$$

16.1 Diskrete Gleichverteilung

Momente der diskreten Gleichverteilung

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$\gamma_1(X) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}\right)^3}$$

$$\gamma_2(X) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right)^2}$$

16.1 Diskrete Gleichverteilung

D.h.:

Deskriptive Statistik entspricht aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung einer Gleichverteilungsannahme!!!

(Wenn ich keine weiteren Erkenntnisse habe, nehme ich einfach an, dass jede Beobachtung die gleiche Wahrscheinlichkeit hatte, einzutreten…)

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

16. Binomialverteilung

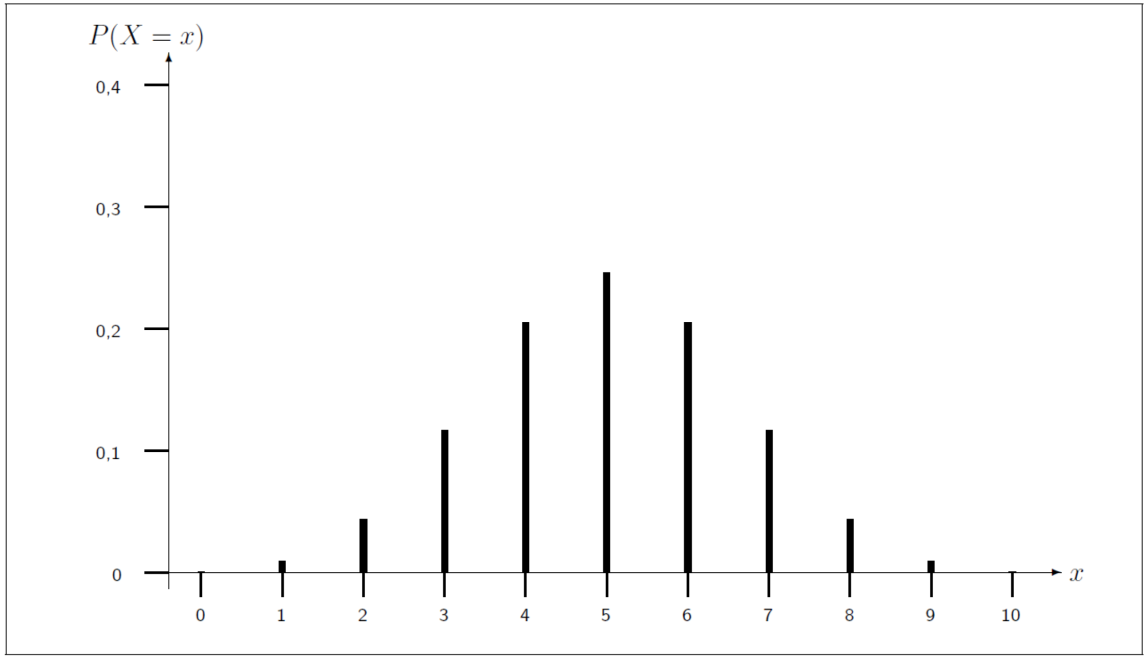
Urnenmodell:

Anteil p weiße Kugeln
(Anteil 1-p schwarze Kugeln)

n-maliges Ziehen **mit** Zurücklegen

-> Wie groß ist Wahrscheinlichkeit genau x weiße Kugeln zu ziehen?

16. Binomialverteilung



Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n, \qquad p \in [0; 1].$$

Kurzschreibweise: $X \sim Bin(n, p)$

16. Binomialverteilung

Beispiel 16.3 *Landwirt Peer Lars Huhn betreibt eine Geflügelzucht. Eine seiner Hennen – liebevoll „Lady Gacker“ genannt, legt mit Wahrscheinlichkeit 0,7 pro Tag ein Ei.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lady Gacker

a) innerhalb der nächsten vier Tage mindestens ein Ei legt?

b) in der nächsten Woche mindestens 5 Eier legt?

16. Binomialverteilung

Momente der Binomialverteilung

$$
\begin{aligned}
E(X) &= np \\
Var(X) &= np(1-p) \\
\gamma_1(X) &= \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}} \\
\gamma_2^*(X) &= \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}
\end{aligned}
$$

16. Hypergeometrische Verteilung

Urnenmodell:

N Kugeln insgesamt,
davon T weiß (N-T schwarz)
(anfänglicher) Anteil weißer Kugeln: $p=T/N$

n-maliges Ziehen **ohne** Zurücklegen

-> Wie groß ist Wahrscheinlichkeit genau x weiße Kugeln zu ziehen?

16 Hypergeometrische Verteilung

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Hypergeometrischen Verteilung

$$P(X=x) = \frac{\binom{T}{x}\binom{N-T}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = \max\{0, T-N+n\}, \ldots, \min\{T, n\},$$

$$n \leq N, T \leq N.$$

Kurzschreibweise: $X \sim Hyp(N, T, n)$.

16 Hypergeometrische Verteilung

Beispiel 16.4 *(Deutsches Zahlenlotto „6 aus 49“)*
Beim deutschen Lotto werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dabei ist es unerheblich, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden, da auf dem Tippschein lediglich die Zahlen, nicht aber deren Reihenfolge vermerkt wird.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, genau x Richtige zu tippen, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Lösung: siehe Vorlesung.

16 Hypergeometrische Verteilung

Momente der Hypergeometrischen Verteilung

$$E(X) = n\frac{T}{N}$$

$$Var(X) = n\frac{T}{N}\left(1-\frac{T}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

$$\gamma_1(X) = \frac{(N-2T)(N-2n)\sqrt{N-1}}{(N-2)\sqrt{nT(N-T)(N-n)}}$$

$$\gamma_2^*(X) = \frac{1}{nT(N-T)(N-n)(N-2)(N-3)} \cdot \{(N-1)N^2[N(N+1)-6T(N-T)-6n(N-n)] + 6nT(N-T)(N-n)(5N-6)\}$$

16 Hypergeometrische Verteilung

Vergleich Bininomial-Verteilung <-> Hypergeometrische-Verteilung:

- Erwartungswerte gleich
- Varianzen fast identisch bis auf folgenden Faktor:

Endlichkeitskorrekturfaktor

$$\frac{N-n}{N-1} \in [0, 1) \tag{16.1}$$

16 Hypergeometrische Verteilung

Approximation der Hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung

Die Approximation gilt als zulässig, falls

$$\frac{n}{N} \leq 0,05,$$

d.h., der **Auswahlsatz** sollte höchstens 5% betragen.

16 Geometrische Verteilung

Urnenmodell **mit** Zurücklegen:

Gesucht ist die Anzahl der Versuche, bis zum **ersten Mal Erfolg** eintritt…

Wahrscheinlichkeitsfunktion der geometrischen Verteilung

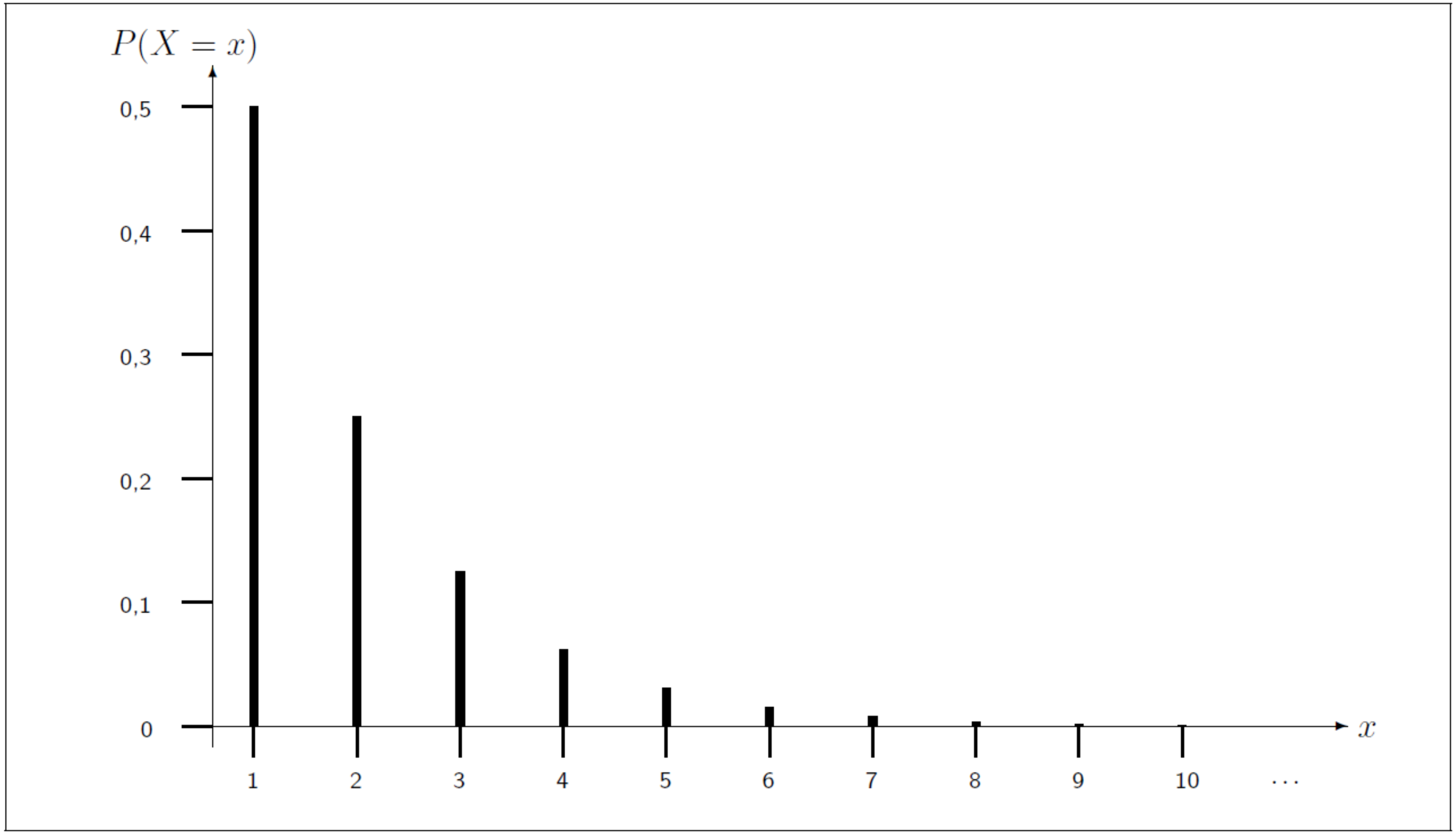
$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \qquad x = 1, 2, \ldots \qquad p \in [0; 1].$$

Kurzschreibweise: $X \sim G(p)$.

Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung

$$F(x) = 1 - (1-p)^{x_i}, \qquad x \in [\lfloor x_i \rfloor; \lceil x_i \rceil), \quad x_i = 1, 2, \ldots \qquad p \in [0; 1].$$

16 Geometrische Verteilung



16 Geometrische Verteilung

Beispiel 16.5 *Landwirt Peer L. Huhn (vgl. Beispiel 16.3) wartet auf das nächste Ei seiner Lieblingshenne Lady Gacker.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) bis zum dritten Tag warten muss, um ein Ei von Lady Gacker zu erhalten?

b) mindestens bis zum vierten Tag warten muss, um ein Ei von Lady Gacker zu erhalten?

Lösung:
Mit $p = 0,7$ gilt für die Zufallsvariable X, die die Wartezeit bis zum ersten Ei zählt: $X \sim G(0,7)$. Damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \quad P(X = 3) &= 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,063, \\
\text{b)} \quad P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left[1 - (1 - 0,7)^3\right] \\
&= 0,3^3 = 0,027.
\end{aligned}
$$

16 Geometrische Verteilung

Momente der geometrischen Verteilung

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{p} \\
Var(X) &= \frac{1-p}{p^2} \\
\gamma_1(X) &= \frac{2-p}{\sqrt{1-p}} \\
\gamma_2(X) &= 6 + \frac{p^2}{1-p}
\end{aligned}
$$

16 Geometrische Verteilung

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung

$$P(X \leq x + h | X > x) = P(X \leq h)$$

siehe Vorlesung

16 Geometrische Verteilung

Anwendungen:

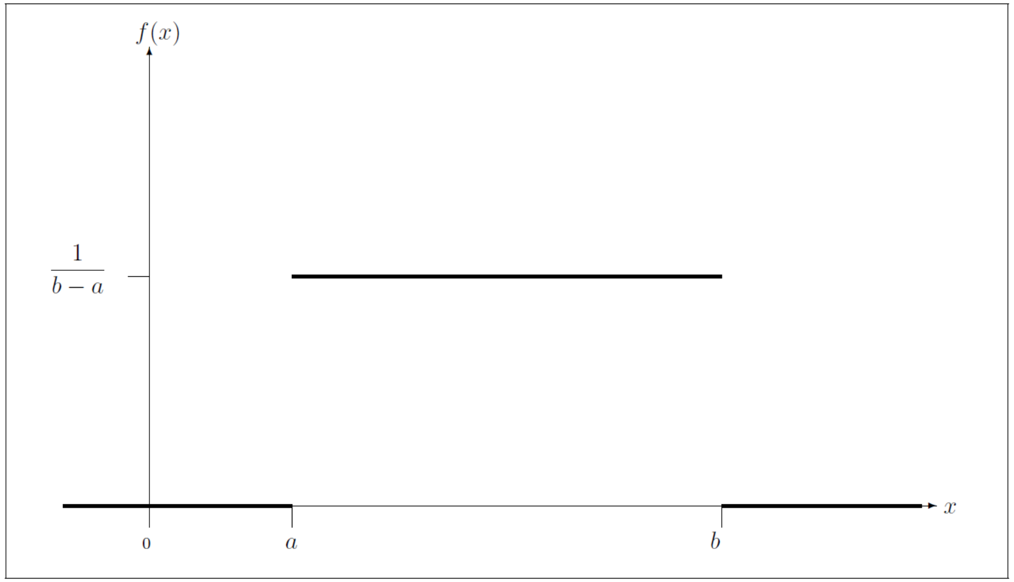
- Lebensdauern
- Verweildauern
- Eintritt von Schadensfällen

Aber! Beachte Gedächtnislosigkeit!

17 Spezielle stetige Verteilungen

- Stetige Gleichverteilung
- Exponentialverteilung
- Paretoverteilung
- Normalverteilung, Standardnormalverteilung
- Prüfverteilungen

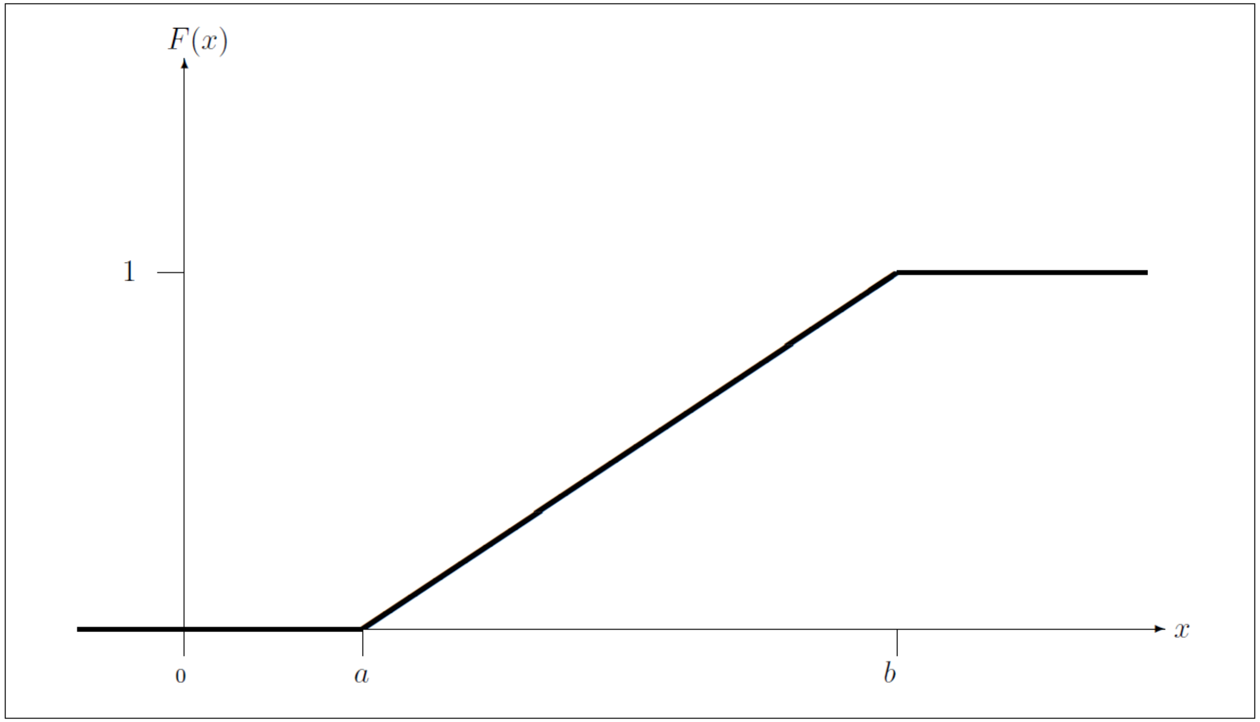
17 Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)



$$X \sim R[a; b]$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

17 Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a;b] \\ 1 & x > b \end{cases} \qquad a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

17 Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

Momente der Rechtecksverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \\ \gamma_1(X) &= 0 \\ \gamma_2^*(X) &= -1,2. \end{aligned}$$

17 Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

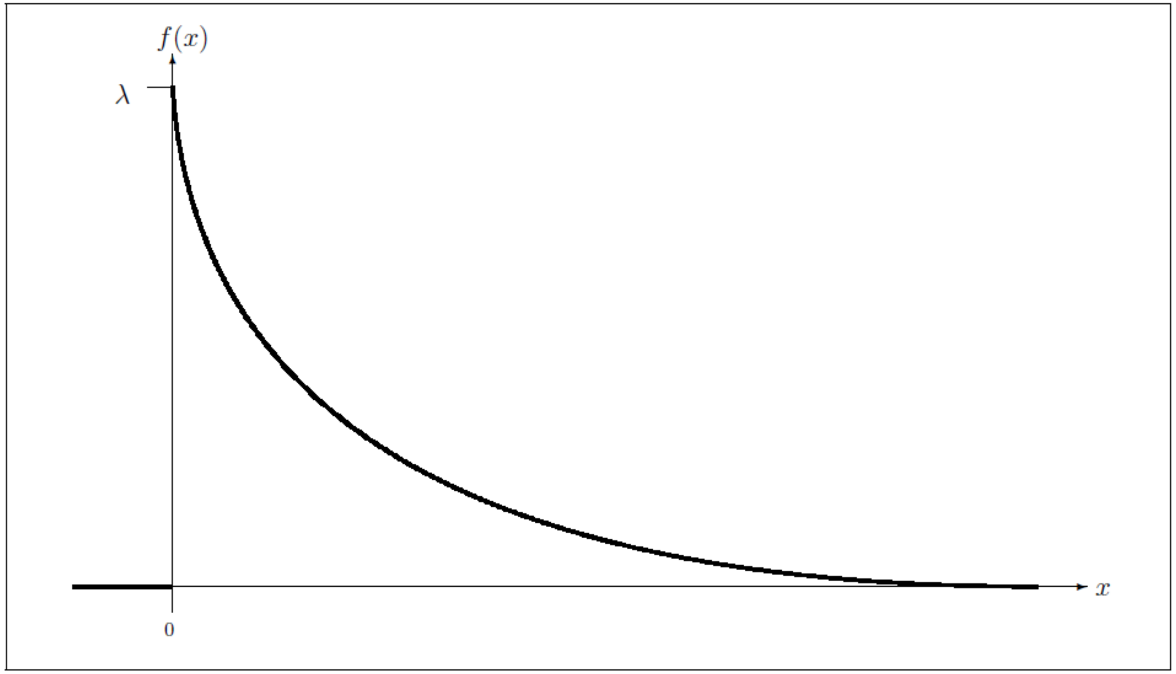
Beispiel 17.1 *Eine Buslinie fährt im 12-Minuten-Takt. Jemand geht zufällig ohne Kenntnis des konkreten Fahrplans zur Haltestelle.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrgast

a) höchstens 5 Minuten warten muss?

b) zwischen 3 und 6 Minuten warten muss?

c) mindestens 8 Minuten warten muss?

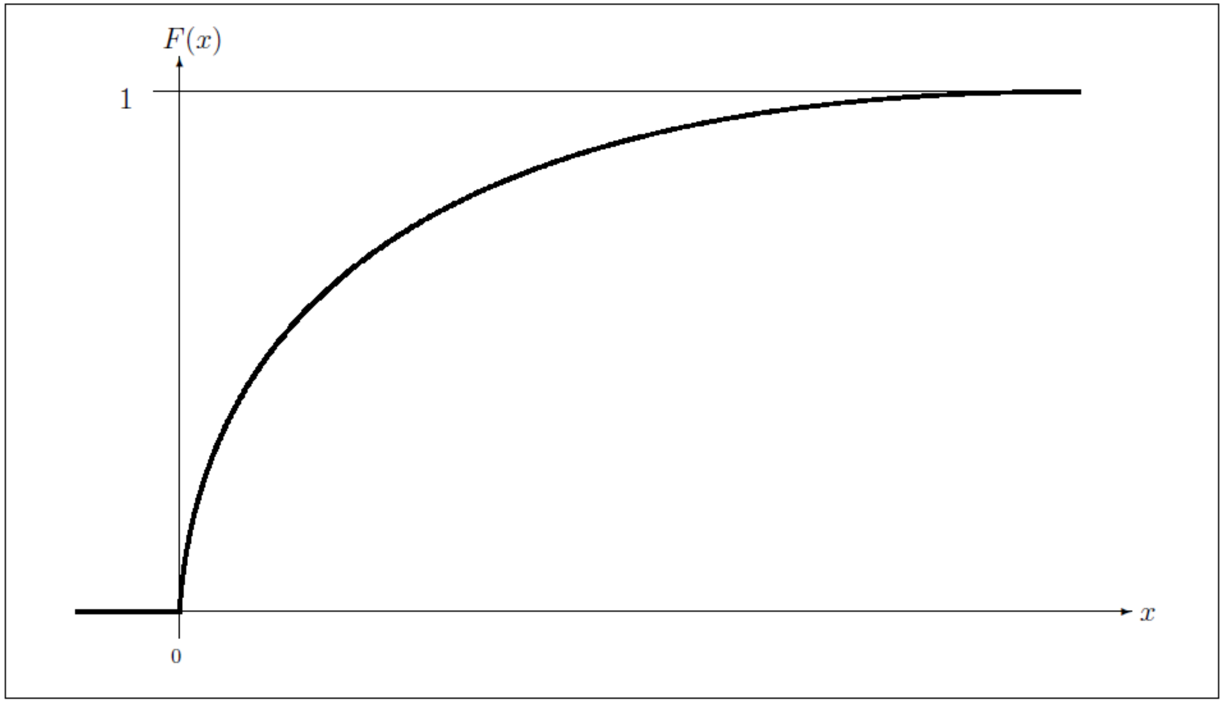
17 Exponentialverteilung



Dichte der Exponentialverteilung

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

17 Exponentialverteilung



Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

$$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) 1_{(0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

17 Exponentialverteilung

Beispiel 17.2 *Die Lebensdauer (in Stunden Brenndauer) einer bestimmten Sorte von Energiesparlampen sei approximativ exponentialverteilt mit* $\lambda = \frac{1}{2000}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Energiesparlampe

a) höchstens 4.000 Stunden,

b) zwischen 2.000 und 5.000 Stunden

beträgt?

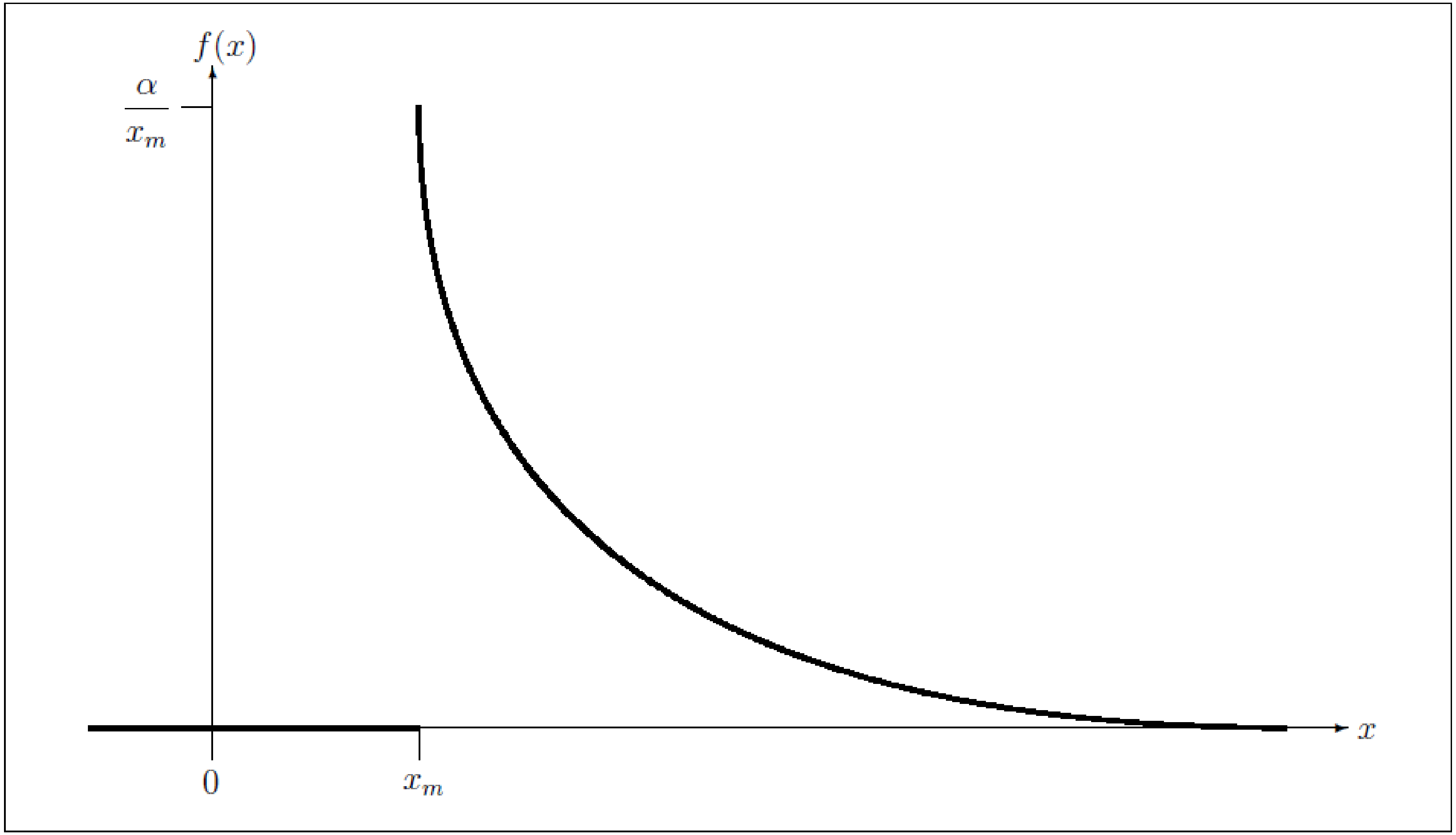
17 Paretoverteilung

Dichte der Pareto-Verteilung

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_m}\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha+1} 1_{[x_m;\infty)}(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{\alpha}{x_m}\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kurz: $X \sim Par(\alpha, x_m)$.

17 Paretoverteilung



17 Paretoverteilung

Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung

$$F(x) = \left[1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha}\right] 1_{[x_{\alpha};\infty)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_m}{x}\right)^{\alpha} & x \geq x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Quantil der Pareto-Verteilung

$$x_p = \frac{x_m}{\sqrt[\alpha]{1-p}} \tag{17.2}$$

Bemerkung: Da α die übliche Bezeichnung für den Parameter der Pareto-Verteilung ist, wird der Anteil für das Quantil in diesem Fall mit p bezeichnet.

17 Paretoverteilung

Beispiel 17.3 *Das monatliche Nettoeinkommen (in €) einer Volkswirtschaft sei* $Par(1,3;800)$*-verteilt.*

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Erwerbstätiger monatlich mindestens 2.000€ verdient?

b) Welcher Anteil der Einkommensbezieher verdient monatlich zwischen 2.000 und 3.000€?

c) Welches monatliche Einkommen wird von 10% der Einkommensbezieher nicht überschritten?

d) Welches monatliche Einkommen wird von lediglich 5% der Einkommensbezieher überschritten?

17 Paretoverteilung

Momente der Pareto-Verteilung

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_m \qquad \text{für } \alpha > 1$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} x_m^2 \qquad \text{für } \alpha > 2$$

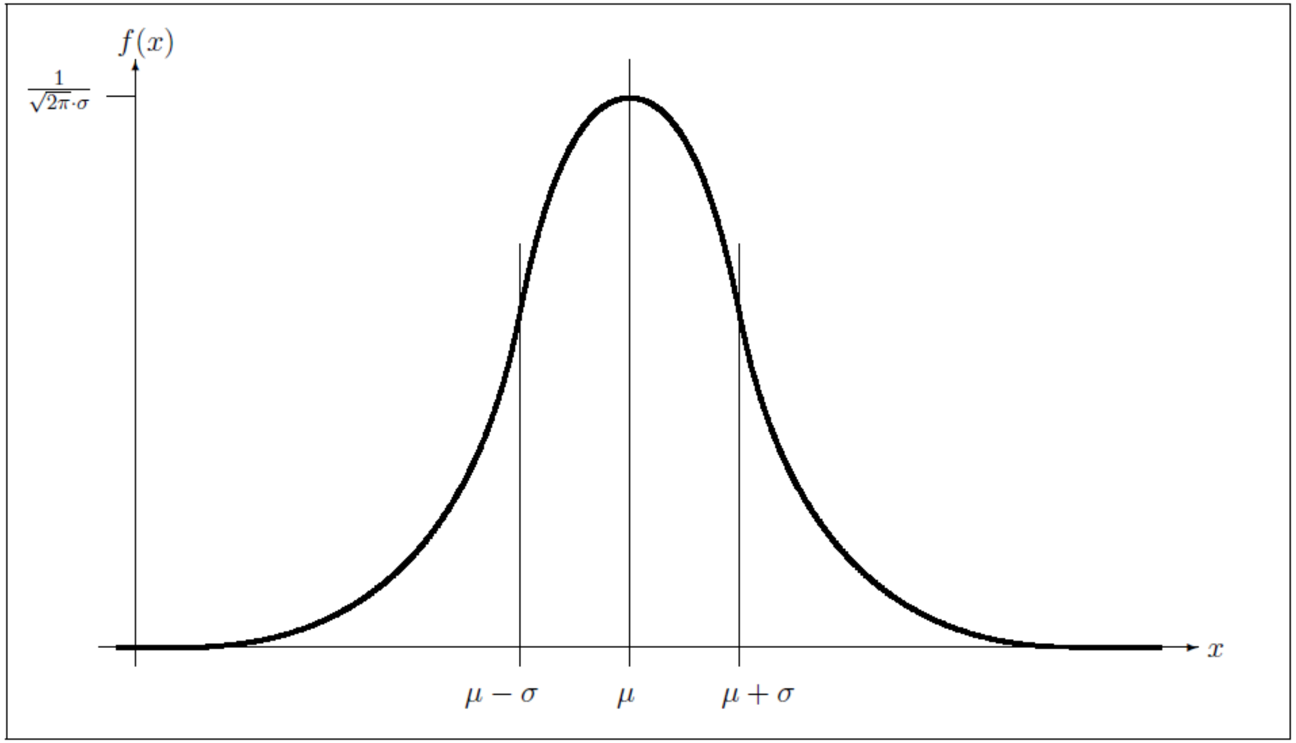
$$\gamma_1(X) = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \qquad \text{für } \alpha > 3$$

$$\gamma_2^*(X) = \frac{6(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)} \qquad \text{für } \alpha > 4$$

Modus und Median der Pareto-Verteilung

$$\begin{aligned} x_M &= x_m \\ \tilde{x} &= \sqrt[\alpha]{2}\, x_m \end{aligned}$$

17 Normalverteilung



Dichte der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

17 Normalverteilung

Eigenschaften der Normalverteilungsdichte

- Die Dichte der Normalverteilung nimmt ihr Maximum bei $x = \mu$ an.
- Die Wendepunkte der Normalverteilungsdichte liegen bei $x = \sigma - \mu$ und $x = \sigma + \mu$.
- Die Normalverteilung ist symmetrisch um μ.

Momente der Normalverteilung

$$\begin{aligned}
E(X) &= \mu \\
Var(X) &= \sigma^2 \\
\gamma_1(X) &= 0 \\
\gamma_2(X) &= 3 \\
\gamma_2^*(X) &= 0
\end{aligned}$$

17 Normalverteilung

Median der Normalverteilung

$$\tilde{x} = \mu$$

Faltungsstabilität der Normalverteilung

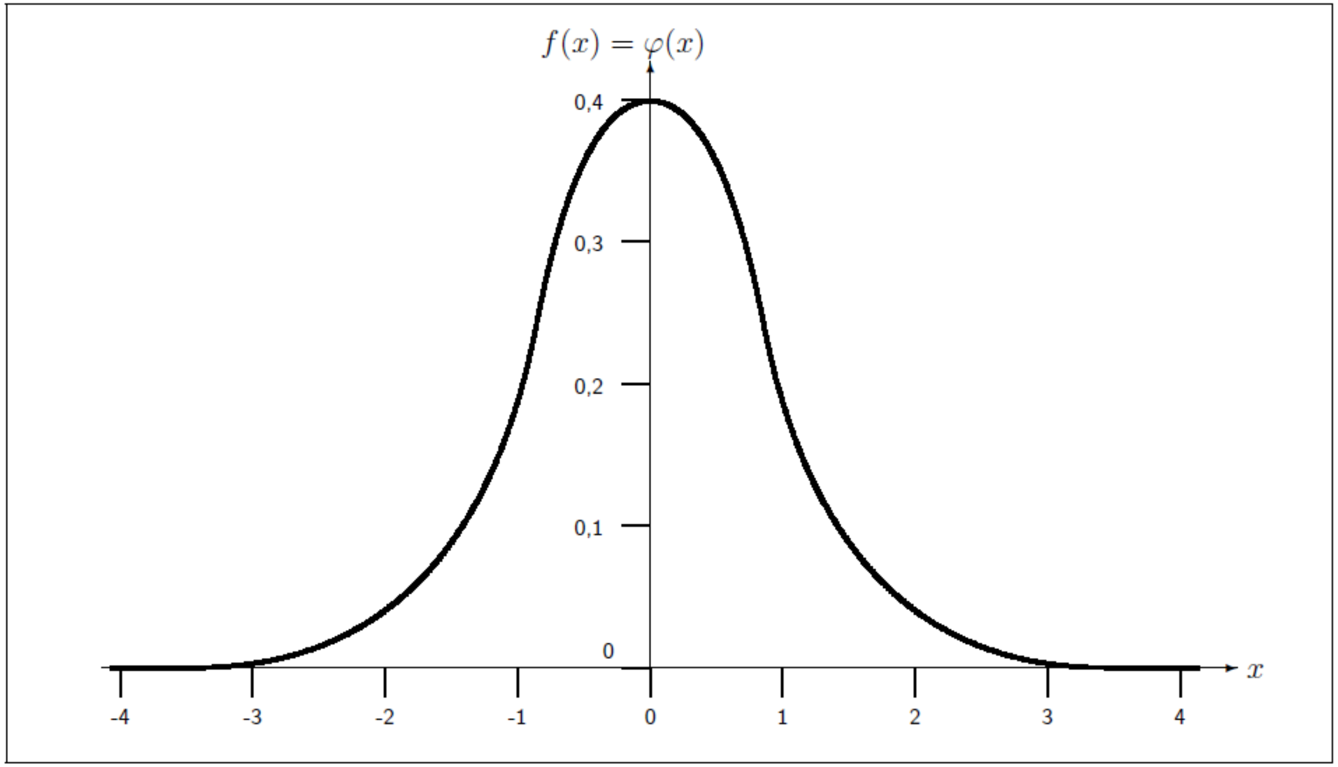
Für $X_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ und $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Speziell für $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu; \sigma^2)$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu; n\sigma^2\right)$$

17 Standardnormalverteilung



Dichte der Standardnormalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Kurzschreibweise: $X \sim N(0, 1)$.

17 Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Vertafelung im Anhang B.3

B.3 Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

17 Standardnormalverteilung

Quantil der Standardnormalverteilung

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$$

Ausgewählte Quantile der Standardnormalverteilung

α						
90,00%	95,00%	97,50%	99,00%	99,50%	99,90%	99,95%
1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905

Die Vertafelung weiterer Quantile befindet sich im Anhang B.4.

17 Standardnormalverteilung

Symmetrie der Standardnormalverteilung

Aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung gilt:

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \tag{17.3}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{17.4}$$

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha} \tag{17.5}$$

Momente der Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \\ Var(X) &= 1 \\ \gamma_1(X) &= 0 \\ \gamma_2(X) &= 3 \\ \gamma_2^*(X) &= 0 \end{aligned}$$

17 Standardnormalverteilung

Umrechnung Normalverteilung $\leftrightarrow$ Standardnormalverteilung
Für $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ und $Z \sim N(0; 1)$ gilt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{„\textbf{Standardisierung}“}$$

und

$$X = \sigma Z + \mu$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsvariablen über die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
Für $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ gilt:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \tag{17.6}$$

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \tag{17.7}$$

17 Standardnormalverteilung

Beispiel 17.4 *Das Gewicht X (in g) einer Tafel Schokolade sei wie folgt (approximativ) normalverteilt: $X \sim N(100, 5^2)$.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig der Produktion entnommene Tafel

a) höchstens 110g,

b) mindestens 104g,

c) höchstens 98g,

d) zwischen 94g und 103g

17 Standardnormalverteilung

Überdeckungswahrscheinlichkeiten zentraler Schwankungsintervalle

$$P(|X-\mu| \leq k \cdot \sigma) = 2\Phi(k) - 1 \qquad k > 0$$

Für die Wahl von $k = 1, 2, 3$ erhält man folgende Überdeckungswahrscheinlichkeiten für die jeweiligen $k\sigma$–Bereiche:

Ein-sigma-Bereich:	$P(\|X-\mu\| \leq 1 \cdot \sigma) = 0,6827$
Zwei-sigma-Bereich:	$P(\|X-\mu\| \leq 2 \cdot \sigma) = 0,9545$
Drei-sigma-Bereich:	$P(\|X-\mu\| \leq 3 \cdot \sigma) = 0,9973$

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

17 Standardnormalverteilung

Berechnung von Quantilen normalverteilter Zufallsvariablen über die Quantile der Standardnormalverteilung

Für das α–Quantil x_α einer Zufallsvariablen $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ gilt:

$$x_\alpha = \mu + \sigma z_\alpha \qquad (17.8)$$

Beispiel 17.5 *(vgl. Beispiel 17.4)*

Welches Füllgewicht wird von 90% der produzierten Tafeln nicht überschritten?

b) Welches Füllgewicht wird lediglich von 5% der Produktion überschritten?
c) Welches Füllgewicht wird von 5% nicht überschritten?

Lösung: siehe Vorlesung

17 Prüfverteilungen

Anwendung von Prüfverteilungen:

- Verteilung von Schätzern (Kap. 19)
- Konfidenzintervalle (Kap. 20)
- Tests (Kap. 21)

Die Darstellung der Prüfverteilungen ist im Regelfall sehr komplex. Benötigt werden ausschließlich deren **Quantile**, die vertafelt sind.

Verteilungsform der Prüfverteilungen:

- t-Verteilung: **symmetrisch** aber **leptokurtisch** (spitz verteilt)
- Chiquadrat-Verteilung: (sehr) **rechtsschief**
- F-Verteilung: (sehr) **rechtsschief**

17 Normalverteilung als Grenzverteilung

Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$. Sei zudem

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}.$$

Dann gilt für die Verteilungsfunktion von Z:

$$\lim_{n \to \infty} F_Z(x) = \Phi(x).$$

17 Normalverteilung als Grenzverteilung

Approximation der Binomialverteilung durch die Standardnormalverteilung

$X \sim Bin(n, p)$. Falls $np(1-p) \geq 9$, so gilt:

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

und

$$P(X = x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x - np - 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

17 Normalverteilung als Grenzverteilung

Beispiel 17.8 *(Macht der Minderheiten)*
Ein Land mit 100 Mio. Wählern kann sich zwischen zwei Präsidentschaftskandidaten A und B entscheiden. Die Wahl gewonnen hat, wer mehr als die Hälfte der Wählerstimmen auf sich vereinigt hat. Die meisten Wähler sind mit beiden Kandidaten gleich zufrieden (oder unzufrieden) und entscheiden sich eher kurzfristig und durch Zufall (etwa durch Werfen einer fairen Münze), welchem Kandidaten sie ihre Stimme geben. Lediglich eine kleine Gruppe von 10.000 Lobbyisten weiß Kandidat A ganz sicher hinter sich.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat A die Wahl gewinnt?

18 Stichproben

Einfache Zufallsstichprobe

Eine einfache Zufallsstichprobe (auch: SRS für **S**imple **R**andom **S**ampling) zeichnet sich dadurch aus, dass alle Zufallsvariablen **u**nabhängig und **i**dentisch **v**erteilt sind, man schreibt kurz:

$$X_1, \ldots, X_n \text{ u.i.v. .}$$

Reine Zufallsauswahl

Eine reine Zufallsauswahl zeichnet sich dadurch aus, dass alle Stichproben vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N die gleiche Ziehungswahrscheinlichkeit haben.

18 Stichproben

Praktisch gesprochen:

- **Einfache Zufallsstichprobe:** Es wird **mit Zurücklegen** gezogen
- **Reine Zufallsauswahl:** Es wird **ohne Zurücklegen** gezogen

Die einfache Zufallsstichprobe ist leichter zu handhaben als reine Zufallsauswahl, daher Konzentration auf diesen Fall!

18 Stichprobenfunktionen

Stichprobensumme

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Stichprobenmittel

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Stichprobenvarianz

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Stichprobenstandardabweichung

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

18 Stichproben

Vorteil von einfachen Zufallsstichproben:
Ohne jegliche konkrete Verteilungsannahme gilt:

Erwartungswert des Stichprobenmittels
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$E(\overline{X}) = \mu. \tag{18.1}$$

Varianz des Stichprobenmittels
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

18 Stichproben

Wurzel-n-Gesetz (Standardabweichung des Stichprobenmittels)
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{18.2}$$

Erwartungswert der Stichprobenvarianz
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$E(S^2) = \sigma^2. \tag{18.3}$$

Varianz der Stichprobenvarianz
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$Var(S^2) = \frac{1}{n}\gamma_2(X_i) + \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

18 Stichproben

Verteilung der Gauß-Statistik, Standardisierung
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu, \sigma^2)$.
Dann gilt für die sogenannte Gauß-Statistik Z:

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1). \tag{18.4}$$

$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu, \sigma^2)$.
Dann gilt:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Verteilung der t-Statistik, Studentisierung
$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu, \sigma^2)$.
Dann gilt für die sogenannte t-Statistik t:

$$t = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}.$$

18 Stichproben

Erwartungswert des Stichprobenmittels
$X_1, \dots, X_n$ reine Zufallsauswahl mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$E(\overline{X}) = \mu.$$

Varianz des Stichprobenmittels
$X_1, \dots, X_n$ reine Zufallsauswahl mit $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gilt:

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}.$$

18 Stichproben

Dilemma:

- In deskriptiver Statistik wurden Mittelwert, Varianz als simple, ausreißerempfindliche Maße dargestellt, „intelligentere Maße“ waren robuster.
- In induktiver Statistik: Verteilung von Median IQR, etc. nicht nur komplizierter, sie verlangen auch Kenntnis der zugrunde liegenden Verteilung!

Konsequenz für die Praxis:

- Beim Wunsch nach Wahrscheinlichkeitsaussagen verwende nur einfache Maße und klammere Ausreißerproblematik aus.
- Bei Ausreißerproblematik: Verzichte auf Wahrscheinlichkeitsaussagen und verwende intelligentere Maßzahlen aus deskriptiver Statistik (oder engagiere Statistik-Profi)

19 Schätzer

Was ist ein Schätzer?
-> Stichprobenfunktion (siehe Kapitel 18)

Offene Fragen:

- Wie erhalte ich Schätzer?
- Welche Eigenschaften von Schätzern sind sinnvoll?

19 Konstruktion von Schätzern

Im Wesentlichen folgende Methoden:

- **Momentenschätzer**
- **Maximum-Likelihood-Schätzung**
- **(speziell im Regressionsmodell:) Kleinstquadrateschätzung (KQ-Schätzung)**

Herleitung meist kompliziert, Ergebnis vielfach alte Bekannte (Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz oder Funktionen derselben)

19 Eigenschaften von Schätzern

Erwartungstreue (Unverzerrtheit)
Ein Schätzer

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$$

heißt **erwartungstreu** (oder **unverzerrt**) für den Parameter θ, falls gilt:

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Bias (Verzerrung)
Der Bias (oder die Verzerrung) eines Schätzers ist gegeben durch

$$Bias(\hat{\theta}, \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

19 Eigenschaften von Schätzern

Asymptotische Erwartungstreue (Unverzerrtheit)
Ein Schätzer

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$$

heißt **asymptotisch erwartungstreu** (oder **asymptotisch unverzerrt**) für den Parameter θ, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta.$$

MSE (Mean Squared Error)
Der MSE eines Schätzers $\hat{\theta}$ ist gegeben durch

$$MSE(\hat{\theta}, \theta) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) = Var(\hat{\theta}) + \left[Bias(\hat{\theta}, \theta)\right]^2. \tag{19.1}$$

19 Eigenschaften von Schätzern

Effizienz (Wirksamkeit) verzerrter Schätzer
Ein Schätzer $\hat{\theta}_1$ heißt effizienter (wirksamer) als ein Schätzer $\hat{\theta}_2$, falls gilt:

$$MSE(\hat{\theta}_1, \theta) < MSE(\hat{\theta}_2, \theta).$$

Effizienz (Wirksamkeit) unverzerrter Schätzer
Ein unverzerrter Schätzer $\hat{\theta}_1$ heißt effizienter (wirksamer) als ein unverzerrter Schätzer $\hat{\theta}_2$, falls gilt:

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2).$$

MSE-Konsistenz (Konsistenz im quadratischen Mittel)
Ein Schätzer $\hat{\theta}$ heißt MSE-konsistent (konsistent im quadratischen Mittel), wenn gilt:

$$\lim_{n \to \infty} MSE(\hat{\theta}, \theta) = 0.$$

19 Eigenschaften von Schätzern

Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz besitzen in vielen Verteilungsklassen gute Eigenschaften wie

- Erwartungstreue
- Konsistenz
- Asymptotische Normalverteilung

20 Konfidenzintervalle

Problem bei Schätzern:
Eher unwahrscheinlich, dass konkreter Schätzwert exakt angenommen wird.

Idee nun:
Angabe eines Bereiches, in dem mit hoher Wahrscheinlichkeit (95%, 99%,…) der unbekannte Wert liegt.

20 Konfidenzintervalle

Rezept zur Konstruktion von Konfidenzintervallen

- Suche eine Stichprobenfunktion $T(\theta, X_1, \ldots, X_n)$, die vom unbekannten Parameter θ, aber keinem weiteren unbekannten Parametern abhängt, und deren Verteilung mit den Quantilen x_α bekannt ist.
- Löse für ein symmetrisches Konfidenzintervall die Gleichung

$$x_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(\theta, X_1, \ldots, X_n) \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

nach θ auf.
Für ein einseitiges Konfidenzintervall wird eine der beiden Gleichungen

$$T(\theta, X_1, \ldots, X_n) \leq x_{1-\alpha}$$

oder

$$x_\alpha \leq T(\theta, X_1, \ldots, X_n)$$

nach θ aufgelöst.

20 Gängige Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall für μ

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu; \sigma^2)$

$$\sigma^2 \text{ bekannt:} \quad \left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{20.4}$$

$$\sigma^2 \text{ unbekannt:} \quad \left[\overline{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] \tag{20.5}$$

Im Fall $n \geq 40$ kann auch bei unbekanntem σ^2 approximativ das Konfidenzintervall (20.4) für μ verwendet werden.

20 Gängige Konfidenzintervalle

Beispiel 20.1 *Das Füllgewicht eines 100ml-Flakons wird als normalverteilt betrachtet.*
Im Zuge der Qualitätsprüfung wurde eine Stichprobe vom Umfang 10 gezogen, die bei exaktem Nachmessen folgende Inhaltsmengen ergab:

$$100,2 \quad 98,7 \quad 101,2 \quad 99,4 \quad 99,8 \quad 102,5 \quad 100,6 \quad 100,1 \quad 102,8 \quad 99,7$$

Berechnen Sie ein 99%-Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht.

20 Gängige Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall für σ^2

$$\text{Voraussetzungen:} \quad X_1, \ldots, X_n \text{ u.i.v. } N(\mu; \sigma^2)$$

$$\mu \text{ bekannt:} \quad \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}} \right] \tag{20.6}$$

$$\mu \text{ unbekannt:} \quad \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \right] \tag{20.7}$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Beispiel 20.2 *Ein Börsenanalyst hat die jährlichen Renditen (in €) einer Aktie erhoben:*

$$7{,}5 \quad -10{,}6 \quad 27{,}8 \quad 12{,}4 \quad -7{,}1 \quad 5{,}9 \quad 4{,}3 \quad 14{,}2$$

Der Analyst betrachtet die Streuung als Risikomaß und möchte ein 95%-Konfidenzintervall für die Varianz bzw. die Standardabweichung berechnen.

Lösung: siehe Vorlesung

20 Gängige Konfidenzintervalle

Mindeststichprobenumfang bei Vorgabe des absoluten Fehlers

$$n_{min} = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} S}{\Delta}\right)^2 = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Delta}\right)^2 S^2$$

Mindeststichprobenumfang bei Vorgabe des relativen Fehlers

$$n_{min} = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\delta}\right)^2 V^2$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Beispiel 20.3 *Im Zuge einer Stichprobenerhebung soll ein Wert mit einer Präzision von 1% bei einer maximalen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5% ermittelt werden. Eine Vorstichprobe ergab einen Mittelwert von 128,78 bei einer Stichprobenvarianz von 64,75.*
Wie groß muss der Stichprobenumfang in der eigentlichen Erhebung mindestens gewählt werden, um die vorgegebene Präzision einzuhalten?

Lösung: siehe Vorlesung

20 Gängige Konfidenzintervalle

Exaktes Konfidenzintervall für den Anteil einer Binomialverteilung p

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $Bin(1;p)$

$$\left[\frac{n\overline{X}F_u}{n(1-\overline{X})+1+n\overline{X}F_u};\frac{n\overline{X}+1}{n\overline{X}+1+n(1-\overline{X})F_o}\right] \tag{20.8}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_u &= F_{2n\overline{X},2n(1-\overline{X});\frac{\alpha}{2}} \\ F_o &= F_{2n(1-\overline{X}),2n\overline{X}+2;\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Approximatives Konfidenzintervall (nach Wilson) für den Anteil einer Binomialverteilung p

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $Bin(1;p)$

$$\left[\frac{\overline{X} + \frac{z^2}{2n} - z\delta}{1 + \frac{z^2}{n}}; \frac{\overline{X} + \frac{z^2}{2n} + z\delta}{1 + \frac{z^2}{n}}\right] \tag{20.9}$$

wobei

$$\begin{aligned} z &= z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ \delta &= \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \frac{z^2}{4n^2}} \end{aligned}$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Approximatives Konfidenzintervall (einfache Approximation) für den Anteil einer Binomialverteilung p

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $Bin(1; p)$

$n\overline{X} \geq 50$

$$\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}; \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right] \tag{20.10}$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Beispiel 20.5 *Das Zweite Deutsche Fernsehen (ZDF) lässt regelmäßig das Wahlverhalten der Deutschen erheben. Im sogenannten „Politbarometer" werden diese Ergebnisse regelmäßig veröffentlicht. Zur Erhebung im Juli 2014 vermerkt das ZDF:*

> *„Die Umfrage zum Politbarometer wurde wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 15. bis 17. Juli 2014 bei 1.273 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von 10 Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte."*

Rechnen Sie die Angaben zur Genauigkeit mit den Ihnen bekannten Formeln nach. Eine Wahrscheinlichkeitsaussage macht das ZDF nicht. Man betrachte daher die gängigen Werte von $\alpha = 0,05$ *bzw.* $\alpha = 0,01$ *für die Fehlerwahrscheinlichkeiten.*

Hochschule Kempten University of Applied Sciences
Fakultät Betriebswirtschaft

20 Gängige Konfidenzintervalle

Mindeststichprobenumfang bei Kenntnis von $\overline{X}$

$$n_{min} = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Delta}\right)^2 \overline{X}(1 - \overline{X})$$

Mindeststichprobenumfang bei Unkenntnis von $\overline{X}$

$$n_{min} = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\Delta}\right)^2$$

20 Gängige Konfidenzintervalle

Beispiel 20.6 *In einer Umfrage soll der Anteil eines dichotomen Merkmals ermittelt werden. Der unbekannte Anteil soll mit einer Abweichung von maximal 2 Prozentpunkten bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% geschätzt werden. Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden,*

a) wenn keine weiteren Informationen vorliegen?

b) wenn bekannt ist, dass der gesuchte Anteil maximal 30% beträgt?

Lösung: siehe Vorlesung

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

21.1 Statistische Tests

Entscheidung zwischen zwei Aussagen:

Nullhypothese

versus (vs.)

Alternativhypothese (kurz. Alternative)

Aussagen schließen sich aus:
-> Nur eine Aussage kann richtig sein

21.1 Statistische Tests

Unterschiedliche Tests:

- **Parametertests** (Aussagen über Parameter)
- **Anpassungstests** (Aussagen über Verteilung)
- **Homogenitätstests** (Aussagen über Gleichheit/Ungleichheit zweier Stichproben)
- **Unabhängigkeitstests** (Aussage über (Un)abhängigkeit zweier Merkmale)

21.1 Statistische Tests

Prinzipiell kann man richtige oder falsche Entscheidungen treffen:

	H_0 nicht ablehnen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	richtige Entscheidung	Fehler 1. Art
H_0 falsch	Fehler 2. Art	richtige Entscheidung

Wünschenswert: Beide Fehler möglichst klein…

Problem:
Wird – bei sonst gleichen Bedingungen – ein Fehler kleiner, vergrößert sich der andere.

Ausweg:
Vielfach haben nicht beide Fehler die gleiche Bedeutung. Man begrenzt einen Fehler, und zwar den Fehler 1. Art und nimmt in Kauf, dass der andere groß werden kann.

21.1 Statistische Tests

Die Vorgabe des Fehlers erster Art nennt man Signifikanzniveau:

Signifikanzniveau
Ein Niveau-α-Test liegt vor, wenn gilt:

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = P(H_0 \text{ ablehnen}|H_0 \text{wahr}) = \alpha$$

In diesem Fall heißt α auch **Signifikanzniveau** des Testproblems H_0 versus H_1.

21.1 Statistische Tests

Konsequenz (1):
Die Aussage, die man zeigen will, steckt man in die Alternative!
Denn:
Indem man sich für die Alternative entscheidet, begeht man einen Fehler mit maximaler Wahrscheinlichkeit von α (Signifikanzniveau)

Konsequenz (2):
Man kann die Nullhypothese nie annehmen
Denn:
Indem man sich für die Nullhypothese entscheidet, würde man den Fehler 2. Art begehen, dessen Wahrscheinlichkeit sehr hoch sein kann.

21.1 Statistische Tests

Fazit:

- **Entweder wird die Nullhypothese zum Niveau α abgelehnt (man begeht einen Fehler von maximal α)**

Oder:

- **Man kann ähnlich wie vor Gericht („aus Mangel an Beweisen“) die Nullhypothese nicht ablehnen (aber nie annehmen!!!).**

21.2 Parametertests

Fall 1: Zweiseitiger Test

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Fall 2: Einseitiger Test

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

Fall 3: Einseitiger Test

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

21.2 Parametertests

Einfacher Gauß-Test

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu; \sigma^2)$

Teststatistik: $Z = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$

H_0	vs.	H_1	Ablehnbereich
$\mu = \mu_0$		$\mu \neq \mu_0$	$\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$Z < z_\alpha$
$\mu \leq \mu_0$		$\mu > \mu_0$	$Z > z_{1-\alpha}$

Die Quantile der Standardnormalverteilung z_α sind in Tabelle B.4 vertafelt.

21.2 Parametertests

Einfacher t–Test

Voraussetzungen: $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. $N(\mu; \sigma^2)$

Teststatistik: $t = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}$

H_0	vs. H_1	Ablehnbereich
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t \rvert > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t < t_{n-1;\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t > t_{n-1;1-\alpha}$

Die Quantile der t-Verteilung $t_{n;\alpha}$ sind in Tabelle B.5 vertafelt.
Für $n \geq 40$ kann der t-Test durch den Gauß-Test approximiert werden.

21.2 Parametertests

Beispiel:

Testen Sie zum Niveau 5%

$$H_0: \;\mu = 500 \qquad \text{vs.} \qquad H_0: \;\mu \neq 500,$$

wenn eine Zufallsstichprobe die exakt nachgemessenen Füllmengen (in ml) von

$$\begin{array}{ccccc} 494,9 & 500,3 & 501,5 & 496,9 & 499,7 \\ 502,1 & 496,5 & 498,8 & 501,7 & 500,6 \end{array}$$

ergab.

21.2 Parametertests

χ^2–Test auf Varianz

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $N(\mu; \sigma^2)$

Teststatistik: $$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2}$$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ oder $\chi^2 > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{n-1;\alpha}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$

Die Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{n;\alpha}$ sind in Tabelle B.6 vertafelt.

21.2 Parametertests

Beispiel 21.2 *Der Hersteller einer Abfüllmaschine garantiert eine maximale Streuung von 2g. Der Kunde führt einen Abnahmetest durch, indem er 21 Füllmengen erhebt:*

250,3	247,6	255,1	249,5	250,1	251,3	252,4
248,9	253,7	249,2	246,6	250,9	253,8	251,2
248,6	247,0	251,4	251,0	247,5	248,0	249,7

Kann der Kunde dem Hersteller zum Niveau 5% eine größere Streuung nachweisen?

Hochschule Kempten University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

21.2 Parametertests

Binomialtest

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $Bin(1, p)$

Teststatistik: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$X > c_o$ oder $X < c_u$ wobei $P(c_u < X < c_o) \geq 1 - \alpha$
$p \geq p_0$	$p < p_0$	$X < c_u$ wobei $P(X < c_u) \geq \alpha$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	$X > c_o$ wobei $P(X > c_o) \geq \alpha$

Die kritischen Werte werden dabei etwa über die vertafelte Verteilungsfunktion der Binomialverteilung (vgl. Tabelle B.1) ermittelt.

21.2 Parametertests

Approximativer Binomialtest

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $Bin(1,p)$, $np_0(1-p_0) \geq 9$

Wähle einer der nachfolgenden Teststatistiken:

Teststatistik (ohne Stetigkeitskorrektur): $$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Teststatistik (mit Stetigkeitskorrektur): $$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0 + 0,5}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$p \geq p_0$	$p < p_0$	$Z < z_\alpha$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	$Z > z_{1-\alpha}$

Die Quantile der Standardnormalverteilung z_α sind in Tabelle B.4 vertafelt.

21.2 Parametertests

Doppelter Gauß-Test

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_{n_1}$ u.i.v. $N(\mu_1; \sigma_1^2)$

$Y_1, \ldots, X_{n_2}$ u.i.v. $N(\mu_2; \sigma_2^2)$

Teststatistik: $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

H_0 vs.	H_1	Ablehnbereich
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert Z \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$Z < z_\alpha$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$Z > z_{1-\alpha}$

21.2 Parametertests

Doppelter t–Test

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_{n_1}$ u.i.v. $N(\mu_1; \sigma^2)$
$Y_1, \ldots, X_{n_2}$ u.i.v. $N(\mu_2; \sigma^2)$

Teststatistik:
$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\|t\| > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t < t_{n_1+n_2-2;\alpha}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$t > t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$

21.2 Parametertests

Beispiel 21.4 *Prof. J. aus K. im A. hat den Eindruck, dass die Studierenden des Studienganges „Gesundheitswirtschaft“ der Anfängerjahrgänge 2011 und 2012 ein sehr unterschiedliches Leistungsprofil gezeigt haben. Als Bewertungsgrundlage verwendet er die erreichten Punktzahlen in den Statistik-1-Klausuren der beiden Jahrgänge, die als approximativ normalverteilt angesehen werden können. Er hat folgende Werte ermittelt:*

	Jahrgang 2011	*Jahrgang 2012*
Klausurteilnehmer	*57*	*62*
Durchschn. erreichte Punktzahl	*47,4*	*61,9*
Stichprobenstandardabweichung	*23,9*	*23,9*

a) Testen Sie zum Niveau 1%, ob ein signifikanter Unterschied zwischen beiden Jahrgängen besteht.

b) Testen Sie zum Niveau 1%, ob der Jahrgang 2012 signifikant besser ist als der Jahrgang 2011.

21.2 Parametertests

(Fishers) F-Test

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_{n_1}$ u.i.v. $N(\mu_1; \sigma^2)$
$Y_1, \ldots, X_{n_2}$ u.i.v. $N(\mu_2; \sigma_2^2)$

Teststatistik: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$ oder $F > F_{n_1-1;n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F < F_{n_1-1;n_2-1;\alpha}$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F > F_{n_1-1;n_2-1;1-\alpha}$

21.2 Parametertests

Beispiel 21.5 *Für die Produktion eines Werkstückes stehen zwei Verfahren zur Verfügung, bei denen in einfachen Zufallsstichproben die Stichprobenvarianzen ermittelt wurden:*

Verfahren	*Stichprobenumfang*	*Stichprobenvarianz*
1	*10*	*108*
2	*12*	*48*

Sind die Varianzen in den beiden Stichproben signifikant zum Niveau 5% verschieden?

21.3 Verbundene Tests

Test auf Korrelation

Voraussetzungen: $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ u.i.v. $N(\mu_1; \mu_2; \sigma_1^2; \sigma_2^2; \varrho)$
Teststatistik: $R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$\varrho = 0$	$\varrho \neq 0$	$\left\| \sqrt{n-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \right\| > t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\varrho \geq 0$	$\varrho < 0$	$\sqrt{n-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} < t_{n-2;\alpha}$
$\varrho \leq 0$	$\varrho > 0$	$\sqrt{n-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} > t_{n-2;1-\alpha}$

21.3 Verbundene Tests

Kontingenztest (χ^2-Unabhängigkeitstest)

Voraussetzungen: $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ u.i.v. $N(\mu_1; \mu_2; \sigma_1^2; \sigma_2^2; \varrho)$

Ferner sind die Daten in Form einer Kontingenztabelle gegeben:

	b_1	b_2	$\ldots$	b_ℓ	
a_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	$n_{1\ell}$	$n_{1\bullet}$
a_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	$n_{2\ell}$	$n_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k	n_{k1}	n_{k2}	$\cdots$	$n_{k\ell}$	$n_{k\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$\cdots$	$n_{\bullet\ell}$	n

21.3 Verbundene Tests

Ergänzend wird die Kontingenztabelle mit den erwarteten Häufigkeiten $\hat{n}_{ij}$ berechnet, wobei

$$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} \qquad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, \ell$$

Achtung! Der Test weist nur gute Eigenschaften auf, wenn gesichert ist, dass

$$\hat{n}_{ij} \geq 5 \quad \text{für } \textbf{alle } i = 1, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, \ell$$

$$\text{Teststatistik:} \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$	$F_{XY}(x,y) \neq F_X(x) \cdot F_Y(y)$	$\chi^2 > \chi^2_{(k-1)(\ell-1);1-\alpha}$

Die Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{n;\alpha}$ sind in Tabelle B.6 vertafelt.

21.3 Verbundene Tests

Beispiel 8.3 *Eine Erhebung zum Rauchverhalten unter 200 Studierenden ergab folgende Verteilung:*

	Raucher	*Nichtraucher*	
weiblich	*30*	*70*	*100*
männlich	*50*	*50*	*100*
	80	*120*	*200*

Besteht eine zum Niveau 1% signifikante Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen?

21.4 Homogenitätstests

χ^2-Homogenitätstest

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_{n_1}$ u.i.v. mit Verteilungsfunktion $F_1(x)$,
$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ u.i.v. mit Verteilungsfunktion $F_2(x)$,

Zur Berechnung der Teststatistik sind zuvor folgende Schritte notwendig:

1. Daten liegen entweder bereits klassiert vor oder werden wie folgt klassiert:

Klasse	1	2	...	k	$\sum$
Population 1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1k}	$n_1 = \sum_{j=1}^{k} n_{1j}$
Population 2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2k}	$n_2 = \sum_{j=1}^{k} n_{2j}$

2. Berechne $\widehat{p}_j = \dfrac{n_{1j} + n_{2j}}{n_1 + n_2}, \quad j = 1, \ldots, k.$

21.4 Homogenitätstests

3. Berechne $\widehat{n}_{ij} = \widehat{p}_j n_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, k.$

Achtung! Der χ^2-Homogenitätstest erfordert: $\widehat{n}_{ij} \geq 5$ für alle $i = 1, \ldots, k$

Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - \widehat{n}_{ij})^2}{\widehat{n}_{ij}}$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$F_1(x) = F_2(x)$	$F_1(x) \neq F_2(x)$	$\chi^2 > \chi^2_{k-1;1-\alpha}$

Die Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{n;\alpha}$ sind in Tabelle B.6 vertafelt.

21.4 Homogenitätstests

Beispiel 21.8 *Die wöchentlichen Auslastungen (in %) der Notaufnahmen zweier Krankenhäuser sind wie folgt gegeben:*

Krankenhaus 1:

19 , 17 , 89 , 87 , 78 , 37 , 19 , 77 , 85 , 18 , 81 , 34 , 81 , 82 , 54 , 20 , 17 , 83 , 81 , 16 , 81 , 82 , 18 , 29 , 84 , 87 , 38 , 51 , 83 , 32 , 35 , 81 , 59 , 27 , 85 , 33 .

Krankenhaus 2:

48 , 9 , 41 , 57 , 50 , 55 , 40 , 39 , 72 , 2 , 51 , 21 , 97 , 24 , 79 , 78 , 78 , 75 , 79 , 58 , 5 , 58 , 57 , 79 , 12 , 79 , 57 , 78 , 76 .

Können Sie signifikante Unterschiede in der Auslastung der beiden Krankenhäuser feststellen? Führen Sie dazu einen Homogenitätstest durch, indem Sie die Auslastungsklassen wie folgt wählen:

$$[0;20),\qquad [20;40),\qquad [40;60),\qquad [60;80),\qquad [80;100].$$

Testen Sie zum Niveau 5%.

21.5 Anpassungstest

χ^2-Anpassungstest (bei konkreter Verteilung)

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit Verteilungsfunktion $F(x)$.

Auszuführende Schritte zur Berechnung der Teststatistik:

1. Falls die Klassen nicht bereits vorgegeben sind: bilde k Klassen $K_1, \ldots, K_k$.
2. Zähle n_i = Anzahl der Beobachtungen in Klasse K_i für $i = 1, \ldots, n$.
3. Berechne $p_i = P(X \in K_i | F(x) = F_0(x))$
4. Berechne $\hat{n}_i = np_i$.

21.5 Anpassungstest

Achtung! Der χ^2-Anpassungstest erfordert: $\hat{n}_i \geq 5$ für alle $i = 1, \ldots, k$

Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$F(x) = F_0(x)$	$F(x) \neq F_0(x)$	$\chi^2 > \chi^2_{k-1;1-\alpha}$

Die Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{n;\alpha}$ sind in Tabelle B.6 vertafelt.

21.5 Anpassungstest

Beispiel 21.10 *Eine einfache Zufallsstichprobe ergab folgende Wartezeiten (in Sekunden) an einem Fahrkartenautomaten:*

$$36,\ 29,\ 71,\ 49,\ 30,\ 107,\ 19,\ 19,\ 12,\ 20,\ 158,\ 26,\ 10,\ 15,\ 134$$

Es wird behauptet, dass die Wartezeit an dem Automaten $Exp(0,02)$ *verteilt sei. Können Sie die Behauptung zum Niveau 5% widerlegen?*

Lösung: siehe Vorlesung

21.5 Anpassungstest

χ^2-Anpassungstest (bei Verteilungsklassen)

Voraussetzungen: $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit Verteilungsfunktion $F(x)$.

$\mathcal{F} = \{F(x) | F(x) = F_{\theta_1,\ldots,\theta_r}(x)\}$

Die Parameter $\theta_1, \ldots, \theta_r$ sind unbekannt.

Auszuführende Schritte zur Berechnung der Teststatistik:

1. Falls die Klassen nicht bereits vorgegeben sind: bilde k Klassen $K_1, \ldots, K_k$.
2. Zähle n_i = Anzahl der Beobachtungen in Klasse K_i für $i = 1, \ldots, n$.
3. Schätze die unbekannten Parameter $\theta_1, \ldots, \theta_r$ durch adäquate Schätzer $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_r$.
4. Berechne $p_i = P(X \in K_i | F(x) = F_{\widehat{\theta}_1,\ldots,\widehat{\theta}_r}(x))$
5. Berechne $\widehat{n}_i = np_i$.

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

21.5 Anpassungstest

Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \widehat{n}_i)^2}{\widehat{n}_i}$

H_0 vs. H_1		Ablehnbereich
$F(x) \in \mathcal{F}$	$F(x) \notin \mathcal{F}$	$\chi^2 > \chi^2_{k-r-1;1-\alpha}$

Die Quantile der χ^2-Verteilung $\chi^2_{n;\alpha}$ sind vertafelt.

Beispiel: siehe etwa Buch

Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

21.5 Anpassungstest

Anpassungstest werden in ihrer Anwendung häufig überstrapaziert…

Denn: Die konkrete Verteilung steht in der Nullhypothese. Damit können sie nur destruktiv genutzt werden, d.h., um nachzuweisen, dass eine bestimmte Verteilung nicht vorliegt.
Viele Praktiker meinen, mit einer nicht abgelehnten Nullhypothese hätten sie eine bestimmte Verteilung (z.B. Normalverteilung) „bewiesen“…
Das ist falsch! Eben genauso falsch wie eine „angenommene“ Nullhypothese beim Parametertest!

21.6 Tests am Computer

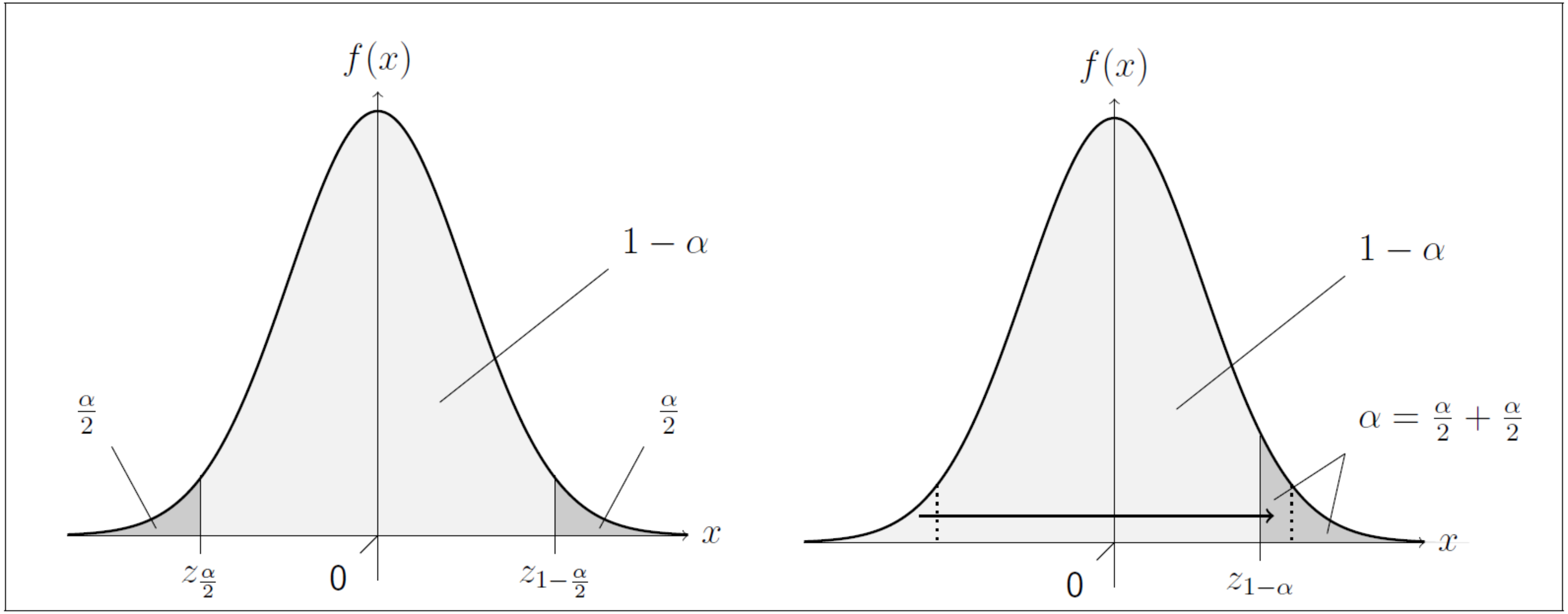
p-Wert

Der p-Wert (auch engl.: p-value) ist das Signifikanzniveau, zu dem die Nullhypothese bei Vorliegen der aktuellen Stichprobe gerade noch abgelehnt werden kann.

Der p-Wert wird bei Parametertests im Regelfall für den zweiseitigen Test ausgegeben.

21.6 Tests am Computer

Umrechnung auf die einseitigen Tests ist aber möglich!



Hochschule Kempten
University of Applied Sciences

Fakultät Betriebswirtschaft

21.6 Tests am Computer

Umrechnung auf die einseitigen Tests ist aber möglich!

Umrechnung der p-Werte bei Gauß- und t-Test

Aus dem p-Wert p_2 des zweiseitigen Tests

$$H_0 : \mu = 0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq 0$$

ermittelt man wie folgt p-Werte einseitiger Tests:

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{positive} \\ \text{negative} \end{array} \right\}$ Werte der Teststatistiken Z bzw. t ist der p-Wert p_1 des Tests $\left\{ \begin{array}{lll} H_0 : \mu \leq 0 & \text{vs.} & H_1 : \mu > 0 \\ H_0 : \mu \geq 0 & \text{vs.} & H_1 : \mu < 0 \end{array} \right\}$ gegeben durch $p_1 = \dfrac{p_2}{2}$.

Umrechnung auf die einseitigen Tests ist aber möglich!

Beispiel 21.15 *Für sechs Merkmale wurde jeweils der zweiseitige t-Test*

$$H_0 : \mu = 0 \qquad vs. \qquad H_1 : \mu \neq 0$$

durchgeführt und die Ergebnisse in nachfolgender Tabelle angegeben:

Merkmal	Anzahl Beobachtungen	t-Statistik	p-Wert
1	57	3,4683	0,0010
2	56	2,7917	0,0072
3	57	2,0385	0,0461
4	57	1,5962	0,1160
5	57	-2,2475	0,0285
6	57	-1,7619	0,0834

Welche Schlüsse lassen sich auf die Tests

$$I \qquad H_0 : \mu \leq 0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > 0$$

bzw.

$$II \qquad H_0 : \mu \geq 0 \quad vs. \quad H_1 : \mu < 0$$

ziehen?