Lösung: $x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 2}{n-1}$

3.5 Ungleichungen

Ungleichungen sind Aussageformen, bei denen an Stelle des Gleichheitszeichens eines der Relationszeichen

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq, \quad \neq$$

steht.

Beispiel: $x^2 - 4 < 2$

Eine solche Aussageform liefert für x nicht einen bestimmten Wert oder bestimmte Werte, sondern einen Bereich für x, in dem diese Relation gültig ist.

Um diesen Bereich zu bestimmen, benutzt man ähnliche Gesetzmäßigkeiten wie bei Gleichungen:

Eine Ungleichung geht in eine äquivalente Ungleichung über,

1. wenn man zu beiden Seiten der Ungleichung den gleichen Term addiert oder subtrahiert,
2. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen *positiven* Term multipliziert oder dividiert,
3. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen Exponenten potenziert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv
4. wenn man beide Seiten zur gleichen Basis logarithmiert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv.

Die Einschränkungen sind notwendig, da ähnlich wie bei Gleichungen, durch Anwendung bestimmter Rechenoperationen falsche Lösungen entstehen können:

- multipliziert man in der Relation

$$x - 2 < 0 \quad x < 2$$

  beide Seiten mit einer negativen Zahl, z.B. mit -1, entsteht $\quad -x < -2$

  Setzt man jetzt für x einen Wert ein, z.B. x = 0, dann ist die Aussage zunächst richtig, nach dem Multiplizieren wird sie falsch. Das bedeutet:

  Die Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Term kehrt die Relation um, d.h.

  aus $\quad x < 2$

  wird $\quad -x > -2$.

  Falls mit einem Term multipliziert wird, der noch die Variable enthält, weiß man zunächst nicht, ob dieser Term positiv oder negativ ist. Man hat dann eine Fallunterscheidung zu machen.

- Das gleiche gilt, falls potenziert oder logarithmiert wird. Beim Potenzieren muss die Basis positiv sein, damit keine unerlaubte Operation ausgeführt wird. In jedem Fall ist das Ergebnis auf seine Gültigkeit hin zu überprüfen.

Beispiele:

1. $$\frac{2}{x-1} \geq 20$$

   mit x ≠1:

$$2 \geq 20 \cdot (x-1)$$

$$2 \geq 20 \cdot x - 20 \,|\, +20$$

$$22 \geq 20 \cdot x \,|\, :20 \qquad x \leq 1{,}1$$

Lösung: $1{,}1 \geq x > 1$

Die Lösung ist ein Intervall:

Ist eine Intervallgrenze Teil der Lösung, spricht man von einem geschlossenen Intervall, gilt die Aussage ohne die Grenze, spricht man von einem offenen Intervall. Im vorliegenden Fall ist das Intervall bei x = 1 offen, die andere Grenze ist Bestandteil der Lösung.

2. $$\frac{1}{2^n} < 10^{-4} \,|\, \cdot 10^4 \cdot 2^n$$

$$10^4 < 2^n \,|\, \lg$$

$$4 < n \cdot \lg 2$$

$$n > \frac{4}{\lg 2} \qquad n > 13{,}3 \quad n \geq 14$$

Die Lösung $n \geq 14$ gilt, wenn n ganzzahlig sein soll.

3. $$-\sqrt{x+4} > -3 \,|\, \cdot(-1)$$

$$\sqrt{x+4} < 3 \,|^2$$

$$x+4 < 9 \qquad x < 5$$