3 Gleichungen

3.1 Einteilung der Gleichungen

Sollen zwei mathematische Terme einander gleich sein, nennt man den entstehenden Ausdruck eine Gleichung.

Ein Term ist dabei ein mathematischer Ausdruck, der eine Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Funktionsbezeichnungen (z.B. log, sin) mit Rechenzeichen enthält.

Eine Gleichung ist also eine Darstellung der Form:

$$T_1 = T_2$$

Man unterscheidet folgende Arten von Gleichungen:

- Identische Gleichungen
- Bestimmungsgleichungen
- Funktionsgleichungen

<u>Identische Gleichungen</u> bleiben gültig, für welche Werte man sie auch immer formuliert:

Beispiele:

Das distributive Gesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Die binomische Gleichung:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Das log. Gesetz:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

An Stelle des Gleichheitszeichens verwendet man oft auch das Identitätszeichen ≡

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c$$

gilt für jede Kombination der Werte von a, b und c.

Eine Bestimmungsgleichung ist eine Gleichung, in der Variable auftreten, deren Werte durch Umformung der Gleichung bestimmt werden sollen. Eine Bestimmungsgleichung ist also nur bestimmte Werte von Variablen gültig, den Lösungen oder Wurzeln der Gleichung.

Bestimmungsgleichungen sind:

$$x^2 + 4 \cdot x = 23$$

Lösungen: $x_1 = -2 + 3 \cdot \sqrt{3}$ $x_2 = -2 - 3 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{x + 2} - 4 = 4$ Lösung: x = 62

$$2 \cdot 2^x = 4^x - 1$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{\ln\left(1 - \sqrt{2}\right)}{\ln 2} \qquad x_2 = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 2}$$

Erste Lösung ist nicht gültig

Die Bestimmungsgleichungen lassen sich unterteilen in

- Algebraische Gleichungen: In diesen werden nur algebraische Verknüpfungen mit der oder den Variablen vorgenommen. Algebraische Verknüpfungen sind: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenz, Wurzel.
  Algebraische Gleichungen mit einer Variablen kann

man immer auf die Form eines Polynoms bringen:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

Man nennt eine solche Gleichung eine algebraische Gleichung n. Grades, wenn die höchste Potenz der Variablen gleich n ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat eine solche Gleichung genau n Lösungen, die allerdings auch komplex (d.h. von der Form a+j·b mit j = √-1) sein können.

- Transzendente Gleichungen. Dies sind Gleichungen, die auch die Operationen wie Logarithmieren oder Funktionen wie sin, tan, e^x usw. enthalten. Sie sind im allgemeinen nur näherungsweise zu lösen.

<u>Funktionsgleichungen:</u> Sie definieren eine Funktion, d.h. einen Zusammenhang zwischen Größen, der für einen größeren Bereich der Variablen gelten soll. Funktionen sind:

$$y = x^2 + 5 \cdot x - 17$$

$$y = \sqrt{x^2 - 2} + 4$$

$$y = \tan(2 \cdot x)$$

$$y = e^{-2 \cdot x + 1}$$

3.2 Lösen von Bestimmungsgleichungen

Um eine Bestimmungsgleichung zu lösen, verwendet man folgendes Lösungsprinzip:

Durch zulässige Rechenoperationen wird eine Bestimmungsgleichung so umgeformt, dass die Variable auf einer Seite der Gleichung isoliert wird.

Dabei gilt das Grundgesetz für das Umformen von Gleichungen:

Eine Gleichung geht in eine Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit gleichen Zahlen die gleichen Rechenoperationen ausführt.

Unbeschränkt mögliche Umformungen sind die sog. Äquivalenzumformungen:

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man

- Auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl addiert oder subtrahiert.
- Auf beiden Seiten mit der selben Zahl multipliziert oder dividiert. Ausgeschlossen bei der Division ist die Zahl 0.
- Beide Seiten der Gleichung integriert oder differenziert.

Es gibt gültige Operationen, die zulässig sind, bei deren Anwendung zusätzliche Lösungen auftreten können. Dies sind:

- Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einem Ausdruck, der auch null werden kann, können zusätzliche Lösungen entstehen
- Erhebt man beide Seiten einer Gleichung zur selben Potenz, d.h. quadriert beide Seiten der Gleichung, können ebenfall ungültige Lösungen entstehen, da eventuell negative Ausdrücke ein positives Vorzeichen erhalten können.
- Logarithmiert man beiden Seiten einer Gleichung zur gleichen Basis, kann es sein, dass negative

Ausdrücke logarithmiert werden, wobei der Logarithmus einer negativen Zahl im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist.

Führt man solche Operationen durch, muss man sich durch Einsetzen der ermittelten Lösungen in die ursprüngliche Gleichung davon überzeugen, dass man eine gültige Lösung ermittelt hat.

Beispiele für die Lösung mit Hilfe von algebraischen Umformungen:

a.

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+2} \quad \Big| \cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+2)$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$2\cdot(x-1)\cdot(x+2)-x\cdot(x+2)=x\cdot(x-1)$$

$$2\cdot x^2+2\cdot x-4-x^2-2\cdot x=x^2-x \quad \Big| -x^2+x$$

$$x-4=0$$

$$x=4$$

b.

$$\sqrt{x^2+\sqrt{3}}-\sqrt{x^2-\sqrt{3}}=\sqrt{3} \quad \Big|^2$$

$$x^2+\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{x^4-3}+x^2-\sqrt{3}=3$$

$$2 \cdot x^2 - 3 = 2 \cdot \sqrt{x^4 - 3} \quad \Big|^2$$

$$4 \cdot x^4 - 12 \cdot x^2 + 9 = 4 \cdot x^4 - 12$$

$$12 \cdot x^2 = 21$$

L

$$x^2 - \frac{7}{4} = 0 \qquad x_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Beide Lösungen sind gültig

c.

$$4^x + 4^{x+1} = 4^{2 \cdot x + 1} - 4$$

$$4^x \cdot (1 + 4) = 4^{2 \cdot x} \cdot 4 - 4$$

$$4 \cdot 4^{2 \cdot x} - 5 \cdot 4^x - 4 = 0$$

$$4^x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{8}$$

$$x = \frac{\ln \frac{5 + \sqrt{89}}{8}}{\ln 4} = 0{,}4257$$

Das negative Vorzeichen vor der Wurzel liefert keinen reellen Wert

3.3 Polynome und algebraische Gleichungen n. Grades

3.3.1 Gleichungen 1. und zweiten Grades

Wie bereits erwähnt, führen Gleichungen, die nur algebraische Operationen enthalten, auf Polynome. Algebraische Operationen sind Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen.

Ein Polynom hat die Form:

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Ein Polynom n. Grades enthält als höchste Potenz x^n, wobei die Exponenten natürliche Zahlen sind. Setzt man das Polynom gleich null, dann entsteht eine Gleichung n. Grades.

Einfach zu lösen sind nur Gleichungen ersten und zweiten Grades. Es existieren Lösungsformeln für Gleichungen bis 5. Grades. Sucht man Lösungen für Gleichungen höherer Grade, dann ist man auf Näherungsverfahren angewiesen. Bei praktischen Problemen werden auch Gleichungen ab dritten Grades mit Näherungsverfahren gelöst.

Für diese Gleichungen gilt der Fundamentalsatz der Algebra:

Eine Gleichung n. Grades hat genau n Lösungen. Diese können mehrfach auftreten und können auch komplex sein.

Kennt man eine Lösung einer Gleichung n. Grades, dann kann man die Gleichung auch in der Form darstellen:

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) =$$

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot \left(x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0\right) = 0$$

Damit kann man den Polynomgrad um eins reduzieren und erhält eine Gleichung n-1. Grades, die ebenfalls wieder null gesetzt wird. Mit allen Lösungen erhält man schließlich die Darstellung:

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_x) = 0$$

Man nennt dies die Zerlegung des Polynoms in Line-arfaktoren

Die Lösung einer Gleichung 1. Grades ist einfach:

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad \left(x + \frac{a_0}{a_1} \right) = 0 \qquad x = -\frac{a_0}{a_1}$$

Eine Gleichung 2. Grades führt man üblicherweise auf ein Binom der Form

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

zurück.

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad \Big| : a_2$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

Mit Hilfe der sog. quadratischen Ergänzung erhält man:

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot x + \left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2 \cdot a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right) \cdot \left(x + \frac{a_1}{2 \cdot a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)$$
$$= 0$$

Ein Produkt von zwei Faktoren ist dann null, wenn einer der Faktoren null ist. Somit ergeben sich die beiden Lösungen:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2 \cdot a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$
$$x_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

Formt man die beiden rechten Seiten noch etwas um, dann erhält man die Lösungen in der bekannten Form:

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2 \cdot a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0}}{2 \cdot a_2}$$

Eine vereinfachte Formel ergibt sich, wenn man die Gleichung vor der Lösung mit dem ersten Koeffizienten a_2 dividiert. Die Gleichung hat dann die Form:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

mit der Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und das Polynom erhält die Form:

$$\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) = 0$$

Multipliziert man diese Formel wieder aus, erhält man eine bequeme Kontrolle über die Richtigkeit der Lösung:

$$x^2 - \left(x_1 + x_2\right) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

In den beiden Koeffizienten p und q stecken also die beiden Lösungen in der Form:

$$p = -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$q = x_1 \cdot x_2$$

Diese Beziehung nennt man den Wurzelsatz von Vieta (nach Francois Viète, franz. Mathematiker).

Beispiel:

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung 2. Grades:

$$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 16 = 0 \quad \Big|: 2$$

$$x^2 - 4 \cdot x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$x_1 + x_2 = 4 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4 - 12 = -8 = q$$

Bemerkung: Die Tatsache, dass in den Lösungsformeln beide Vorzeichen + und – auftreten, soll nicht zu der Meinung führen, dass vor Quadratwurzeln generell beide Vorzeichen gültig sind oder gesetzt werden müssen.

3.3.2 Algebraische Gleichungen höherer Grade

Wie schon erwähnt, kennt man nur von Gleichungen 3. Grades (Cardanische Formeln) bis 5. Grades (sind sehr kompliziert) formelmäßige Lösungen.

Bei den Gleichungen 3. Grades mit reellen Koeffizienten erhält man entweder eine reelle Lösung und zwei komplexe Lösungen oder drei reelle Lösungen.

Kennt man die Lösungen, dann kann man wieder das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 =$$

$$a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

Dividiert man die Gleichung zunächst durch a_3, dann erhält man die „Normalform“

$$x^3 + r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$$

Ausmultiplizieren der Linearform ergibt:

$$\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right) =$$

$$x^3 - x^2 \cdot \left(x_1 + x_2 + x_3\right) + x \cdot \left(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\right) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Damit erhält man den Wurzelsatz von Vieta für eine Gleichung dritten Grades:

$$r = -\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$

$$s = \left(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\right)$$

$$t = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich manchmal Lösungen erraten und man kann die Gleichung dritten Grades durch eine Polynomdivision auf eine Gleichung zweiten Grades reduzieren.

Beispiel: $x^3 - 6 \cdot x^2 - x + 6 = 0$

Entsprechend $t = 6$ sind mögliche ganzzahlige Lösungen: $x = \pm 1$; $x = \pm 2$; $x = \pm 3$; $x = \pm 6$;

Probeweise Einsetzen von $x = 1$ ergibt, dass dies eine Lösung ist.

Durch Polynomdivision kann man den Linearfaktor

(x-1)

abspalten und den Grad des Polynoms auf 2 reduzieren.

Polynomdivision: Sie wird genau so wie das Dividieren von Zahlen durchgeführt

$$564:12 = 5\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 : 1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

da der Divisor zwei Zehnerpotenzen enthält, werden zunächst die ersten beiden Zehnerpotenzen des Dividenden dividiert:

566 : 12 = 47 Rest 2 = 47 + 2/12
<u>48</u>
86
2

Nach der ersten Division benutzt man die nächste Zehnerstelle zur Division.

Anwendung auf Polynom:

$x^3 - 6\cdot x^2 - x + 6 \ : \ x-1 = x^2 - 5\cdot x - 6$
$\underline{x^3 - \ \ x^2}$
$0 \ - 5\cdot x^2 - x$
$\underline{\ \ \ - 5\cdot x^2 + 5\cdot x}$
$-6\cdot x + 6$
$\underline{-6\cdot x + 6}$
$0 \quad 0$

Der Rest ist null, die Division geht auf, x – 1 ist somit Teiler des Polynoms.

Damit lautet das Polynom nach Abspaltung der Lösung:

$$\left(x-1\right)\cdot\left(x^2 - 5\cdot x - 6\right)$$

Weitere Lösungen sind x = -1 und x = 6, somit lautet die vollständige Zerlegung:

$$\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x-6\right) = 0$$

Der Wurzelsatz von Vieta lässt sich auf allgemeine Polynome n. Grades erweitern:

Lautet die Polynomgleichung:

$$x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 = 0$$

dann ist

$$b_{n-1} = -\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \right)$$

die negative Summe der Lösungen

$$\begin{aligned} b_{n-2} = {} & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \ldots + \\ & + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5 + \ldots \\ & + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n \end{aligned}$$

Dies ist die Summe aller möglichen Produkte zweier Lösungen.

$$\begin{aligned} b_{n-3} = -(& x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + \ldots \\ & + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + \ldots \\ & + x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 + \ldots \\ & \ldots \\ & + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n) \end{aligned}$$

Dies ist die negative Summe aller möglichen Produkte jeweils dreier Lösungen.

Die anderen Koeffizienten setzen sich ebenfalls zusammen aus der Summe der Produkte von Lösungen bis:

$$\begin{aligned} b_1 = \left(-1\right)^{n-1} \cdot (& x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-1} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-2} \cdot x_n + \\ & + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-3} \cdot x_{n-1} \cdot x_n + \ldots) \end{aligned}$$

$$b_0 = \left(-1\right)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Beispiel:

Eine Gleichung 4. Grades hat die Lösungen:

x = 1;   x = -1;   x = -2;   x = 3;

Wie lautet die Gleichung?

Lösung:

$$b_0 = (-1)^4 \cdot ((-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 3) = 6$$

$$b_1 = (-1)^3 \cdot (1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3) = 1$$

$$b_2 = (-1)^2 \cdot (1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 3) = -7$$

$$b_3 = (-1)^1 \cdot (1 - 1 - 2 + 3) = -1$$

Damit lautet die Gleichung:

$$x^4 - x^3 - 7 \cdot x^2 + x + 6 = 0$$

2. Beispiel:

Von der Gleichung 5. Grades

$$2 \cdot x^5 - 8 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 + 80 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 72 = 0$$

sind zwei Lösungen bekannt: $x = \pm 3$

Wie lauten die übrigen Lösungen?

Lösung: $x = \pm 1; \quad x = 4$

3.3.3 Auf algebraische Gleichungen rückführbare Gleichungen

Enthält eine Gleichung nur Brüche und Wurzeln, dann kann man die Gleichung auf eine Polynomgleichung zurückführen. Das Beseitigen der Brüche geschieht dadurch, dass man die gesamte Gleichung mit einem passend gewählten Nenner multipliziert. Zum Beseitigen der Wurzeln muss man diese auf einer Seite isolieren, um sie durch Bilden einer Potenz zu beseitigen. Dies muss oft mehrfach geschehen. Außerdem ist zu beachten, dass z.B. das Quadrieren keine sog. Äquivalenzoperation ist; es können zusätzliche Lösungen dadurch entstehen, dass beim Quadrieren negative Vorzeichen in positive Vorzeichen umgewandelt werden.

Beispiele:

1.

$$\frac{x-4}{x-8} = \frac{x+4}{x-4} + 1 \quad \Big| \cdot (x-8)\cdot(x-4)$$

$$(x-4)^2 = (x+4)\cdot(x-8) + (x-8)\cdot(x-4)$$

$$x^2 - 8\cdot x + 16 = x^2 - 4\cdot x - 32 + x^2 - 12\cdot x + 32$$

$$x^2 - 8\cdot x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+16} = 4 \pm 4\cdot\sqrt{2}$$

2.

$$\sqrt{x+2+\sqrt{2\cdot x+7}} = 4 \quad \Big|^2$$

$$x+2+\sqrt{2\cdot x+7} = 16$$

$$\sqrt{2\cdot x+7} = 14 - x$$

$$2\cdot x + 7 = 196 - 28\cdot x + x^2$$

$$x^2 - 30\cdot x + 189 = 0$$

$$x_{12} = 15 \pm \sqrt{225-189} = 15 \pm 6$$

$x_1 = 21$ ungültige Lösung

$\mathrm{x}_2 = 9$ gültige Lösung

3.

$$\sqrt[3]{x^4} - 4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 12$$

Substitution: $\sqrt[3]{x^2} = u$

$$u^2 - 4 \cdot u - 12 = 0$$

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4$$

$$u_1 = 6 = \sqrt[3]{x^2} \qquad x = \sqrt{u_1^3} = 6 \cdot \sqrt{6}$$

gültige Lösung

$$u_2 = -2 = \sqrt[3]{x^2} \qquad x = \sqrt{u_2^3} = \sqrt{-8}$$

keine gültige Lösung im Bereich der reellen Zahlen.

3.4 Transzendente Gleichungen

Transzendente Gleichungen enthalten Logarithmen oder die gesuchte Größe im Exponenten von Zahlen. Außerdem gehören zu den transzendenten Gleichungen auch solche, die trigonometrische Funktionen enthalten. Die Lösung, falls möglich, erfolgt dadurch, dass die Logarithmen oder die Exponentialausdrücke auf einer Seite der Gleichung isoliert werden und anschließend delogarithmiert oder in den Exponenten einer geeigneten Basis gesetzt wird.

Beispiele:

1. $\quad 2 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 2{,}5$

$$5^x \cdot \left(\frac{2}{5} + 3 \cdot 5\right) = \frac{5}{2}$$

$$5^x = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{77} = \frac{25}{154}$$

$$x \cdot \ln 5 = \ln \frac{25}{154} \qquad x = \frac{\ln 25 - \ln 154}{\ln 5} = -1{,}13$$

2.

$$\log_3\left(x^2 - 4\right) - \log_9\left(x^2 + 4\right) = 0{,}5$$

$$\log_3\left(x^2 - 4\right) - \frac{\log_3\left(x^2 + 4\right)}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3\left(x^2 - 4\right) - \frac{1}{2}\log_3\left(x^2 + 4\right) = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$x^4 - 8 \cdot x^2 + 16 = 3 \cdot x^2 + 12$$

$$x^4 - 11 \cdot x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 4} = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$$

3.

$$\frac{e^{(n+1)\cdot x}}{e^{(n-1)\cdot x}} = 2 \cdot e^{2 \cdot n \cdot x}$$

Lösung: $x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 2}{n-1}$

3.5 Ungleichungen

Ungleichungen sind Aussageformen, bei denen an Stelle des Gleichheitszeichens eines der Relationszeichen

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq, \quad \neq$$

steht.

Beispiel: $x^2 - 4 < 2$

Eine solche Aussageform liefert für x nicht einen bestimmten Wert oder bestimmte Werte, sondern einen Bereich für x, in dem diese Relation gültig ist.

Um diesen Bereich zu bestimmen, benutzt man ähnliche Gesetzmäßigkeiten wie bei Gleichungen:

Eine Ungleichung geht in eine äquivalente Ungleichung über,

1. wenn man zu beiden Seiten der Ungleichung den gleichen Term addiert oder subtrahiert,
2. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen *positiven* Term multipliziert oder dividiert,
3. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen Exponenten potenziert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv
4. wenn man beide Seiten zur gleichen Basis logarithmiert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv.

Die Einschränkungen sind notwendig, da ähnlich wie bei Gleichungen, durch Anwendung bestimmter Rechenoperationen falsche Lösungen entstehen können:

- multipliziert man in der Relation

  $$x - 2 < 0 \quad x < 2$$

  beide Seiten mit einer negativen Zahl, z.B. mit -1, entsteht $-x < -2$

  Setzt man jetzt für x einen Wert ein, z.B. x = 0, dann ist die Aussage zunächst richtig, nach dem Multiplizieren wird sie falsch. Das bedeutet:

  Die Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Term kehrt die Relation um, d.h.

  aus $x < 2$

  wird $-x > -2$.

  Falls mit einem Term multipliziert wird, der noch die Variable enthält, weiß man zunächst nicht, ob dieser Term positiv oder negativ ist. Man hat dann eine Fallunterscheidung zu machen.

- Das gleiche gilt, falls potenziert oder logarithmiert wird. Beim Potenzieren muss die Basis positiv sein, damit keine unerlaubte Operation ausgeführt wird. In jedem Fall ist das Ergebnis auf seine Gültigkeit hin zu überprüfen.

Beispiele:

1. $$\frac{2}{x-1} \geq 20$$

   mit x ≠1:

$$2 \geq 20 \cdot (x-1)$$

$$2 \geq 20 \cdot x - 20 \,\big|\, +20$$

$$22 \geq 20 \cdot x \,\big|\, :20 \qquad x \leq 1{,}1$$

Lösung: $1{,}1 \geq x > 1$

Die Lösung ist ein Intervall:

Ist eine Intervallgrenze Teil der Lösung, spricht man von einem geschlossenen Intervall, gilt die Aussage ohne die Grenze, spricht man von einem offenen Intervall. Im vorliegenden Fall ist das Intervall bei x = 1 offen, die andere Grenze ist Bestandteil der Lösung.

2.

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-4} \,\Big|\, \cdot 10^4 \cdot 2^n$$

$$10^4 < 2^n \,\big|\, \lg$$

$$4 < n \cdot \lg 2$$

$$n > \frac{4}{\lg 2} \qquad n > 13{,}3 \quad n \geq 14$$

Die Lösung $n \geq 14$ gilt, wenn n ganzzahlig sein soll.

3.

$$-\sqrt{x+4} > -3 \,\big|\, \cdot(-1)$$

$$\sqrt{x+4} < 3 \,\big|^2$$

$$x + 4 < 9 \qquad x < 5$$