Hochschule Kempten
Fakultät Maschinenbau

Vorbereitungskurs Mathematik für Studienanfänger

Prof. König

1. Grundrechenarten, Regeln

1.1 Zahlarten, Verknüpfungen

Die grundlegenden Objekte der Zahlenalgebra sind die natürlichen Zahlen. Sie bilden die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und werden benutzt als

- Kardinalzahlen: Sie dienen zum Zählen von Dingen und zur Angabe der Mächtigkeit einer Menge.
- Ordinalzahlen: Sie dienen zur Angabe einer Reihenfolge oder einer Ordnung.

Sprachlich drückt man das so aus:

- 25 Äpfel
- der 25. Platz beim Straßenrennen.

Bei der Verwendung als Kardinalzahlen kann man Verknüpfungen zwischen Zahlen herstellen durch Definition einer Addition:

$$2 + 3 = 5$$

und einer Multiplikation, die man als mehrfache Addition auffassen kann:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4-mal} = 4 \cdot 3 = 12$$

Will man allgemeine Gesetzmäßigkeiten formulieren, dann trennt man die Zahl von ihrem Wert und bezeichnet allgemein Zahlen mit Buchstaben.

Addition:	$a + b = c$
Multiplikation:	$a \cdot b = c$

Beide Operationen sind “kommutativ”, d.h. man darf die beiden Operanden vertauschen:

$$a + b = b + a = c \qquad a \cdot b = b \cdot a = c$$

Bei der Multiplikation nennt man a und b die Faktoren.

Es ist zweckmäßig, sog. Einselemente einzuführen:

Die Zahl, die eine andere Zahl bei einer Addition unverändert lässt, ist die Zahl 0 (Einselement der Addition):

$$a + 0 = a$$

Die Zahl, die eine andere Zahl bei der Multiplikation unverändert lässt, ist die Zahl 1 (Einselement der Multiplikation):

$$a \cdot 1 = a$$

Es ist also zweckmäßig, die null ebenfalls zu den natürlichen Zahlen hinzu zu nehmen, obwohl sie als Ordinalzahl keinen Sinn hat.

1.2 Umkehrung, inverse Operationen

Die Definition der Addition erlaubt folgende Umkehrung:

Welche Zahl muss man zu a addieren, damit sich c ergibt?

$$a + x = c$$

Den Vorgang nennt man Subtraktion und schreibt:

$$x = c - a$$

Falls a > c ist, kann man diese Subtraktion nicht mehr im Bereich der natürlichen Zahlen ausführen. Man führt eine neue Art von Zahlen ein, die negativen Zahlen:

$$-3; \quad -17; \quad -a$$

Das negative Zeichen „-„ ist hier kein Verknüpfungszeichen zwischen zwei Zahlen, sondern ein sog. einstelliger Vorzeichenoperator.
Natürliche Zahlen und negative Zahlen bilden die Menge der „ganzen Zahlen“ Z

Bei der Multiplikation lautet die Frage:

Welche Zahl ist mit a zu multiplizieren, damit sich c ergibt?

$$a \cdot x = c \quad \rightarrow \quad x = \frac{c}{a} \quad \text{oder} \quad x = c : a$$

Diese Operation heißt „Division“ und ist im Bereich der ganzen Zahlen nur durchführbar, wenn a ohne Rest in c enthalten ist. Um die Division unbeschränkt durchführen zu können, definiert man eine neue Menge von Zahlen, die gebrochen rationalen Zahlen Q. Eine gebrochen rationale Zahl besteht streng genommen aus zwei ganzen Zahlen, einer Zahl im Zähler und eine im Nenner eines Bruchs. Führt man die Division zahlenmäßig aus, entsteht eine endliche oder unendlich periodische gebrochene Zahl.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{3}{11} = 0,2727\overline{27}$$

Die ganzen Zahlen sind dabei in der Menge der gebrochen-rationalen Zahlen als Sonderfall enthalten. Sie haben den Nenner 1.

Ausnahme: eine Division durch null ist nicht erlaubt und lässt sich nicht widerspruchsfrei definieren! Man kann auch keine neue Zahlkategorie einführen, innerhalb der die Division durch null widerspruchsfrei möglich ist.

1.3 Addition und Multiplikation in einem Ausdruck, das distributive Gesetz

Besteht ein Ausdruck aus additiven und multiplikativen Verknüpfungen, dann entsteht die Frage, welche Operation Priorität vor der anderen hat.

In einem Ausdruck der Form:

$$a \cdot b + c$$

ist zunächst die Multiplikation, dann die Addition durchzuführen. Falls die Reihenfolge geändert werden soll, müssen Klammern gesetzt werden:

$$a \cdot (b + c)$$

Dabei gilt das distributive Gesetz. Obige Klammer kann „ausmultipliziert“ werden:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Besteht auch der erste Faktor aus einer Klammer:

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

dann kann man für die erste Klammer zunächst eine neue Variable einführen und die Multiplikation nach dem distributiven Gesetz ausführen:

$$u = (a + b)$$

$$u \cdot (c + d) = u \cdot c + u \cdot d$$

Ersetzt man u durch a+b, kann man wieder die Klammern ausmultiplizieren und man erhält:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (c + d) &= u \cdot c + u \cdot d \\ &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d\end{aligned}$$

Es ist also jede Zahl der ersten Klammer mit jeder Zahl der zweiten Klammer zu multiplizieren. Diese Regel kann man verallgemeinern für eine beliebige Anzahl von Zahlen in den beiden Klammern.

Sind negative Zahlen bei der Multiplikation beteiligt, gelten folgende Regeln:

$$(+a)\cdot(+b)=a\cdot b$$
$$(-a)\cdot(+b)=-a\cdot b$$
$$(+a)\cdot(-b)=-a\cdot b$$
$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$$

Während man sich die ersten drei Gesetze an Hand praktischer Beispiele leicht überlegen kann, ist die vierte Regel nicht ganz selbstverständlich:

Es gilt z.B $4+(-4)=0$

Multipliziert man beide Seiten mit -4:

$$4+(-4)=0 \;\Big|\cdot(-4)$$
$$(-4)\cdot 4+(-4)\cdot(-4)=0$$
$$-4\cdot 4+(-4)\cdot(-4)=0 \;\Big|+(4\cdot 4)$$
$$(-4)\cdot(-4)=4\cdot 4$$

Damit ist die vierte Regel zumindest an Hand der drei anderen plausibel.
Mit obigen Regeln kann man auch Klammern ausmultiplizieren, wenn negative Zahlen in den Klammern enthalten sind:

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot(c-d)&=\big(a+(-b)\big)\cdot\big(c+(-d)\big)\\&=a\cdot c-a\cdot d-b\cdot c+b\cdot d\end{aligned}$$

Außerdem kann man den Fall behandeln, dass ein negatives Vorzeichen vor einer Klammer steht. Dieses kann man ansehen, als stünde vor der Klammer der Faktor -1:

$$-(a-b)=(-1)\cdot(a-b)=-a+b$$

Ein negatives Vorzeichen vor einer Klammer kehrt also alle Vorzeichen in der Klammer um.

Sonderfälle:

Enthalten beide Klammern die gleichen Variablen, dann entstehen die sog. Binomischen Formeln:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

1.4 Rechnen mit Brüchen

<u>Erweitern und Kürzen von Brüchen</u>

Regel:

Der Wert eines Bruchs bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert oder durch den gleichen Faktor dividiert.

Die Brüche:

$$\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{15}{21}=\frac{-10}{-14}=\frac{(-2)\cdot 5}{(-2)\cdot 7}$$

sind also gleich. Dies führt auf die Regel:

Gleiche Faktoren in Zähler und Nenner eines Bruchs dürfen gekürzt werden.

Im Übrigen gelten die gleichen Vorzeichenregeln wie bei der Multiplikation:

$$(+a):(+b)=+\frac{a}{b}$$

$$(-a):(+b)=-\frac{a}{b}$$

$$(+a):(-b)=-\frac{a}{b}$$

$$(-a):(-b)=+\frac{a}{b}$$

Ein negatives Vorzeichen vor dem Bruch kann man also entweder dem Zähler oder dem Nenner zuordnen.

<u>Addieren und Subtrahieren:</u>

Beim Addieren und Subtrahieren sind wieder Prioritätsregeln zu beachten:

$$\frac{7}{3}+\frac{11}{6}=7:3+11:6$$

Auch hier gilt, dass die Division als Umkehrung der Multiplikation Vorrang vor der Addition und Subtraktion hat. Es ist also nicht richtig, so zu rechnen:

$$7:(3+11):6$$

Man kann den allgemeinen Grundsatz aufstellen:

Punktrechnung kommt vor Strichrechnung

Will man die beiden Brüche zu einem Bruch zusammenfassen, muss man die beiden Brüche so erweitern, dass die Nenner beider Brüche gleich sind:

$$\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{11}{6}=\frac{25}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}+\frac{m\cdot b}{n\cdot b}=\frac{a\cdot n+m\cdot b}{b\cdot n}$$

Multiplizieren und Dividieren:

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Dies ist gerechtfertigt, weil die beiden Operationen Multiplizieren und Dividieren die gleiche Priorität haben und es deshalb gleichgültig ist, wie die Reihenfolge der Operationen gewählt wird.

Zwei Brüche werden miteinander dividiert, indem der erste Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs (Divisor) multipliziert wird:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

<u>Beispiele:</u>

Folgende Ausdrücke sollen vereinfacht werden:

1. $\left\{3\cdot a-\left[4\cdot b-2\cdot a-\left(3\cdot b-6\cdot a\right)-8\cdot b\right]+3\cdot b\right\}$

   Ergebnis: $-a+10\cdot b$

2. $3{,}6\cdot x-\left\{7{,}2\cdot x-9{,}0\cdot y-\left[6{,}6\cdot x+4{,}3\cdot z\right]+3{,}3\cdot z\right\}$

   Ergebnis: $3\cdot x+9\cdot y+z$

3. $3\cdot x\cdot\left(4\cdot y-2\cdot z\right)-3\cdot y\cdot\left(-2\cdot x+3\cdot z\right)+3\cdot z\cdot\left(3\cdot x-4\cdot y\right)$

   Ergebnis: $3\cdot\left(6\cdot x\cdot y+x\cdot z-7\cdot y\cdot z\right)$

   Die folgenden Ausdrücke sollen in Faktoren zerlegt werden:

4. $a\cdot x\cdot n\cdot d-a\cdot x\cdot n\cdot c+a\cdot b\cdot n\cdot d-a\cdot b\cdot n\cdot c$

   Ergebnis: $a\cdot n\cdot\left(d-c\right)\cdot\left(x+b\right)$

5. $2\cdot a\cdot x+a\cdot y+a\cdot z-2\cdot b\cdot x-b\cdot y-b\cdot z$

Ergebnis: $(a-b)\cdot(2\cdot x+y+z)$

Fassen Sie folgende Brüche zusammen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich:

6. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{13}{18}$ Ergebnis: $\frac{1}{18}$

7. $\frac{1}{a}+a-2$ Ergebnis: $\frac{(a-1)^2}{a}$

8. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}$ Ergebnis $\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a\cdot b\cdot\left(a^2-b^2\right)}$

9. $\frac{x^4-y^4}{\left(x^2-y^2\right)\cdot x\cdot y}+2$ Ergebnis: $\frac{(x+y)^2}{x\cdot y}$

10.

$$\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{3\cdot a^2\cdot x^2-12\cdot a^2}{a\cdot x-2\cdot a}}{6\cdot a^2\cdot\frac{x+2}{2\cdot b}}$$

Ergebnis: 1

11. $\left[\left(\frac{x}{4}:\frac{1}{3}\right):\frac{x}{8}\right]:\frac{4}{x^2}$ Ergebnis: $\frac{3}{2}\cdot x^2$

1.5 Potenzen

Wird eine Zahl a mehrfach mit sich selbst multipliziert, schreibt man den Ausdruck kürzer als Potenz:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal} = b$$

$$b = a^n$$

a heißt die „Basis“, n der „Exponent“ der Potenz. Auch für Potenzen lassen sich allgemeine Rechenregeln aufstellen:

<u>Produkt zweier Potenzen mit gleicher Basis:</u>

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{m-mal} = a^{n+m}$$

Multipliziert man zwei Potenzen mit gleicher Basis, dann werden die Exponenten addiert.

<u>Quotient zweier Potenzen mit gleicher Basis:</u>

$$\frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{m-mal}} = a^{n-m}$$

Man kann so oft den Faktor a kürzen, bis entweder in Zähler oder Nenner nur noch der Faktor 1 übrig bleibt.

Sonderfälle:

Ist n = m, dann lassen sich alle Faktoren a kürzen und es bleibt:

$$a^0 = 1$$

und
$$\frac{1}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

<u>Potenz einer Potenz:</u>

Bildet man. $\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n}_{m-mal} = \left(\cdot a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

<u>Potenzen ungleicher Basis:</u>

Faktoren mit gleichen Exponenten lassen sich zusammenfassen:

$$a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

<u>Einschränkung:</u>
Potenzen mit negativer Basis sind im Bereich der reellen Zahlen nur für ganzzahlige Exponenten erlaubt.

Beispiele:

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$

$$(-5)^{-2} = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{1}{25}$$

Die meisten Taschenrechner sind so programmiert, dass negative Basen von Potenzen generell ausgeschlossen sind und zu einer Fehlermeldung führen.

Prioritätsregeln:

Für die bisher definierten Rechenoperationen gelten folgende Prioritätsregeln:

1. Potenzieren
2. Multiplizieren, Dividieren
3. Addieren, Subtrahieren

Soll eine andere Reihenfolge gelten, müssen Klammern gesetzt werden.

Es ist deshalb <u>nicht</u> erlaubt:

$$\left(a^3 + b^3\right) \neq (a+b)^3$$

$$(a+b)^3 \neq \left(a^3 + b^3\right)$$

Potenzieren hat Priorität gegenüber Addieren. Die Aussage gilt auch in umgekehrter Richtung. Auf der rechten Seite wurde die Priorität durch Klammersetzung geändert.

$$\frac{a^3}{b} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Potenzieren hat Priorität gegenüber Dividieren.

Folgende Ausdrücke lassen sich nicht zusammenfassen oder kürzen:

$$a^n \pm a^m$$

$$\frac{a^n + 1}{a^m - 1}$$

Beispiele:
Folgende Ausdrücke sollen vereinfacht werden:

a) $\dfrac{u^3 \cdot u^{-5} \cdot u^2}{u^{-3}}$ Lösung: u^3

b) $\dfrac{a^4 \cdot b^{-3} \cdot \left(a^2 - b^2\right)}{a^5 \cdot b^{-4} \cdot \left(a^2 + b^2\right)}$ Lösung: $\dfrac{b \cdot \left(a^2 - b^2\right)}{a \cdot \left(a^2 + b^2\right)}$

c) $\left[(1+a)^2 : (1+a)^{-3}\right] \cdot (1+a)^{-5}$ Lösung: 1

d) $\left[\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^4 : (1-a)^{-5}\right] \cdot \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{-4}$ Lösung: $1-a$

1.6 1. Umkehrung des Potenzierens: Wurzeln

Ist in dem Potenzausdruck:

$$a^b = c$$

die Größe b und c bekannt, jedoch a gesucht, bedeutet dies eine Umkehrung des Potenzierens. Man bezeichnet dies (aus historischen Gründen) als Wurzelziehen:

$$a = \sqrt[b]{c}$$

Die Frage lautet:

Welche Zahl a wurde zur Potenz b genommen, damit sich c ergibt?

Beispiel:

$$\sqrt[2]{81} = 9;$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

Es ist zu beachten, dass die Wurzel einer ganzen Zahl im allgemeinen keine ganze Zahl, nicht einmal eine rationale Zahl ist. Man hat Veranlassung, eine neue Zahlkategorie einzuführen, die „Irrationalzahlen". In der gebrochenen Darstellung handelt es sich nicht mehr um endliche oder periodisch-unendliche Brüche, sondern um nichtperiodische unendliche Brüche.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{2} = 1{,}1414213562.....$$

$$\sqrt[5]{5} = 1{,}379729661....$$

Wurzeln aus negativen Zahlen:

Versucht man, Wurzeln aus negativen Zahlen zu bilden, stößt man im Bereich der bisher definierten Zahlen auf ein nicht lösbares Problem.

Beispiel: $a = \sqrt{-16}$

Quadriert man, ergibt sich:

$$a^2 = a \cdot a = -16$$

Nach den Multiplikationsregeln für Zahlen ergibt sich ein negatives Ergebnis nur dann, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies ist beim Quadrieren einer Zahl nicht der Fall. Man muss eine neue Zahlkategorie einführen, um auch Wurzeln aus negativen Zahlen berechnen zu können, die sog. komplexen Zahlen. Sie werden in diesem Kurs nicht behandelt.

Exponentialdarstellung der Wurzeln:

Aus der Definitionsgleichung:

$$a = \sqrt[b]{c}$$

ergibt sich: Potenziert man die Wurzeln zur Potenz b, muss sich wieder c ergeben. Man kann nun versuchen, für die (willkürliche) Festlegung der Wurzeloperation durch ein neues Rechenzeichen eine Potenzdarstellung zu finden:

$$\sqrt[b]{c} = c^n$$

wobei der Exponent n zunächst noch unbestimmt ist.

Bildet man die b. Potenz, muss sich wieder c^1 ergeben:

$$\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = c^{n \cdot b} = c^1$$

n muss also gleich 1/b sein $n = \frac{1}{b}$,

damit ergibt sich für die Wurzel eine Potenzschreibweise:

$$\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$$

Beispiel: $a = \sqrt[5]{22} = 22^{\frac{1}{5}}$

und das Konzept der Potenzen ist auf gebrochen – rationale Exponenten erweitert.
Obige Regeln lassen sich leicht ableiten, wenn die Exponenten ganze oder rationale Zahlen sind. Man kann jedoch nachweisen, dass alle Formeln gültig sind, auch wenn die Exponenten allgemein reelle oder sogar komplexe Zahlen sind.

Man kann Potenzieren und Wurzelziehen kombinieren:

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Da die Multiplikation der Exponenten vertauschbar ist, kann man dafür auch schreiben:

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{6}}$$

Wurzelziehen und Potenzieren kann man also vertauschen, da beide Operationen gleiche Priorität haben. Da Wurzelziehen eine Potenzoperation ist, gelten alle Regeln des Potenzrechnens auch für Wurzeln.

Beispiele:

a) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}} = \left(\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}} = 2^{\frac{10}{20}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

c)

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{18}-\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{18}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(18 - 2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} + 2\right) =$$

$$= 4\cdot\sqrt{36} = 24$$

d) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{6}+\frac{4}{6}} = a^1 = a$

e) $\sqrt[2\cdot a]{x^{4\cdot a}} = x^{\frac{4\cdot a}{2\cdot a}} = x^2$

1.6 2. Umkehrung des Potenzierens, der Logarithmus

Ist im Ausdruck: $a^n = c$

die Größe a und c bekannt und der Exponent gesucht, hat man den Logarithmus zu bilden:

$$n = \log_a c$$

Die Frage lautet also:

In welche Potenz wurde die Basis a erhoben, um das Ergebnis c zu erhalten?

Beispiele:

$\log_6 36 = 2$ denn $6^2 = 36$

$\log_2 64 = 6$ denn $2^6 = 64$

$\log_{10} 1000 = 3$ denn $10^3 = 1000$

$\log_{0,25} 16 = -2$ denn $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

Sonderfälle:

$\log_c c = 1$ denn $c^1 = c$

$\log_c 1 = 0$ denn $c^0 = 1$

$\log_c 0$ ist nicht definiert, denn

c^n wird nur null, wenn $n \to -\infty$ strebt.

Logarithmieren und Potenzieren sind Umkehroperationen. Ebenso wie

$\sqrt[3]{x^3} = x$ ist,

kann man sich überlegen, dass:

$$n = \log_c \left(c^n\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{c}^{\log_c a} = a$$

Potenzieren und anschließendes Logarithmieren heben sich auf, ebenso wie Logarithmieren und anschließendes Potenzieren, denn mit der Ausgangsbeziehung: $a = c^n$

$n = \log_c \left(c^n\right)$ c wurde in die n. Potenz erhoben, damit sich c^n ergibt. Ebenso

$\mathrm{c}^{\log_c a} = a$ da $\log_c a = n$, ist $c^n = a$

Für das Rechnen mit Logarithmen lassen sich einige praktische und oft benutzte Regeln ableiten:

$$\log_c \left(a \cdot b\right) = \log_c a + \log_c b$$

Man kann nämlich jede Zahl auch als Potenzausdruck darstellen:

$$a = c^u \qquad b = c^v$$

Die Zahl 64 kann man darstellen als 2^6 oder als 8^2.

Damit ist $\qquad a \cdot b = c^u \cdot c^v = c^{u+v}$

Logarithmiert man nun zur Basis c, ergibt sich:

$$\log_c (a \cdot b) = u + v$$

Andererseits ist aber

$$u = \log_c a \qquad \text{und} \qquad v = \log_c b$$

Somit ist

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

Ebenso kann man sich überlegen, dass

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

Außerdem ist

$$\log_c a^n = \log_c \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a.....)}_{n-mal} = \log_c a + \log_c a + \log_c a + ...$$

$$= n \cdot \log_c a$$

$$\log_c a^n = n \cdot \log_c a$$

Verallgemeinerung:

$$\log_c \sqrt[n]{a^m} = \log_c a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_c a$$

Umrechnung von Logarithmen der Basis a in solche der Basis m:
Kennt man die Logarithmen der Basis a, z.B die Logarithmen der Basis e oder 10 auf dem Taschenrechner und benötigt die Logarithmen der Basis b, kann man die Logarithmen folgendermaßen umrechnen:

$$c = a^n \quad n = \log_a c$$

Logarithmiert man den Ausdruck zur Basis b, erhält man:

$$\log_b c = \log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Ersetzt man n, ergibt sich:

$$\log_b c = n \cdot \log_b a = \log_a c \cdot \log_b a$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Zusammenstellung der Formeln:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \sqrt[n]{a^m} = \log_c a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_c a$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Für das praktische Rechnen sind von besonderer Bedeutung die Logarithmen zur Basis 10, zur Basis e und zur Basis 2. Für sie werden deshalb besondere Bezeichnungen eingeführt:

$$\log_{10} a = \lg a$$
$$\log_e a = \ln a$$
$$\log_2 a = ld\left(a\right)$$

Beispiele:

a) $\lg 7{,}12345 = 0{,}85269$

b) $$\lg 712{,}345 = \lg\left(7{,}12345 \cdot 10^2\right) = \lg\left(7{,}12345\right) + \lg 10^2 = 0{,}85269 + 2 = 2{,}85269$$

c)
$$\begin{aligned}\lg(0{,}000712345) &= \lg\left(7{,}12345 \cdot 10^{-4}\right) \\ &= \lg\left(7{,}12345\right) + \lg 10^{-4} \\ &= 0{,}85269 - 4 = -3{,}14731\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & ld(0,722) + \ln(0,722) + \lg(0,722) \\ & = \frac{\ln(0,722)}{\ln 2} + \ln(0,722) + \frac{\ln(0,722)}{\ln 10} \\ & = \ln(0,722) \cdot \left(\frac{1}{\ln 2} + 1 + \frac{1}{\ln 10} \right) = -0,9371 \end{aligned}$$

1.8 Der binomische Satz

Am Beginn dieses Kapitels wurden Ausdrücke der Form

$$(a+b) \cdot (c+d)$$

mit Hilfe des distributiven Gesetzes ausmultipliziert. Falls beide Klammerausdrücke gleich sind, ergab sich als Spezialfall:

$$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ausdrücke der Form (a + b) bezeichnet man als Binome, wobei auch Potenzen der Binome von Interesse sind:

$$(a+b)^n$$

Niedrige Potenzen lassen sich durch Ausmultiplizieren zerlegen. Man erhält:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

Um ein Bildungsgesetz für die Vorfaktoren zu erhalten, kann man sie in geeigneter Weise in einem sog. Pascal'schen Dreieck anordnen:

$n = 0$	1	Summe = 2^0
1	1 1	2^1
2	1 2 1	2^2
3	1 3 3 1	2^3
4	1 4 6 4 1	2^4
5	1 5 10 10 5 1	2^5

Hat man eine Zeile der Koeffizienten berechnet, erhält man die nächste Zeile nach folgender Vorschrift:

1. Die Anzahl der Koeffizienten ist um 1 höher als der Exponent des Binoms
2. Der linke und der rechte Koeffizient ist jeweils 1
3. Man erhält einen Koeffizient der neuen Zeile, indem man zwei benachbarte Koeffizienten der darüber stehenden Zeile addiert.
4. Die Zahlen nennt man „Binomialkoeffizienten"

Das Pascal’sche Dreieck ergibt allerdings keinen formelmäßigen Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten und dem Binom Exponenten und der Stellung im Binom Produkt. Dazu werden die Koeffizienten für n = 5 noch einmal angeschrieben. Da zum Exponenten n = 5 sechs Koeffizienten gehören, beginnt man die Zählung zweckmäßiger Weise bei null:

k =	0	1	1
	1	5	$\frac{5}{1}$
	2	10	$\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$
	3	10	$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$
	4	5	$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
	5	1	$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

Die Darstellung in der rechten Spalte legt folgenden formelmäßigen Zusammenhang nahe:

Der k. Koeffizient des Binoms mit der Potenz n lautet:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}$$

Dafür ist die abkürzende Schreibweise üblich:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}$$

Dies nennt man die Euler'sche Schreibweise der Binomialkoeffizienten. Sie wird gesprochen „n über k“

$\binom{n}{k}$ steht bei den meisten Taschenrechnern als eigene Funktion mit der Bezeichnung nCr zur Verfügung

Entsprechend obiger Tabelle ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Die Reihe der Binomialkoeffizienten bricht bei k = n ab. Man definiert deshalb für k > n

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n$$

Aus dem Pascal'schen Dreieck lassen sich folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ablesen:

- Symmetrieeigenschaft:

  $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

  also: in der Reihe n = 5 ist der Koeffizient k = 2

  $$\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$$

- Das Bildungsgesetz im Pascal'schen Dreieck lautet in der Euler'schen Schreibweise:

  $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Eine weitere Formel für die Binomialkoeffizienten ergibt sich, wenn man folgende Abkürzung benutzt:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k = k!$$

gesprochen: k Fakultät. Auch diese Funktion ist auf den gebräuchlichen Taschenrechnern realisiert

Im Nenner der Formel für die Binomialkoeffizienten steht bereits die Fakultät k! Um auch im Zähler eine Fakultätsdarstellung zu erhalten, muss der Bruch erweitert werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Dies nennt man die Fakultätsdarstellung der Binomialkoeffizienten.

1.9 Komplexe Zahlen

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass im Bereich der reellen Zahlen nicht alle algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden können. Zum Beispiel ist die Wurzel aus einem negativen Radikanden nicht definiert:

$$c = \sqrt{-a} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}$$

Es gibt keine reelle Zahl, deren Wurzel -1 wäre. Damit kann man auch $\sqrt{-1}$ nicht auf der Zahlengerade der reellen Zahlen darstellen.

Man schreibt für $\sqrt{-1} = j$ oder i . $j^2 = -1$

Da negative Radikanden im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert waren, darf man folgenden Ausdruck nicht zusammenfassen:

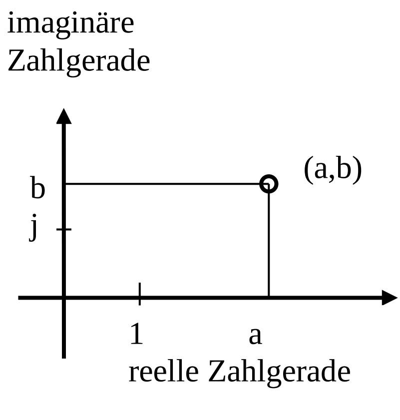
$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{a \cdot b}$$

sondern:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = j \cdot \sqrt{a} \cdot j \cdot \sqrt{b} = j^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a \cdot b}$$

Man nennt j die imaginäre Einheit und $j \cdot a$ eine imaginäre Zahl und hat damit das Zahlensystem um eine weitere Zahlkategorie erweitert, die komplexen Zahlen.

Da diese nicht auf der Zahlgeraden darstellbar sind, erweitert man die Zahldarstellung auf die Ebene und stellt eine komplexe Zahl als einen Punkt in der Ebene dar: Man nennt diese Ebene die „Gauß'sche Zahlenebene".



Führt man ein cartesisches Koordinatensystem ein, dann lässt sich ein Punkt durch zwei Zahlen (a,b) darstellen. Die erste Zahl (=die erste Komponente) wird auf der reellen Zahlgeraden abgetragen, die zweite Zahl auf der dazu senkrechten imaginären Achse. Diese ist ebenfalls eine Zahlenachse mit der Einheit j.

Um mit solchen Zahlenpaaren Rechenoperationen ausführen zu können, müssen Regeln aufgestellt werden, die so beschaffen sind, dass im Sonderfall, dass die zweite (imaginäre) Komponente null ist, die im Reellen geltenden Regeln weiter gelten.

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen

$$a = (\alpha, \alpha') \quad \text{und} \quad b = (\beta, \beta')$$

Dann ist die Addition definiert als

$$a + b = (\alpha + \beta, \alpha' + \beta')$$

Falls die imaginären Anteile null sind, findet die Addition nur auf der reellen Zahlenachse statt. Somit ist diese Definition konsistent mit der entsprechenden Regel für reelle Zahlen.

Ebenso lässt sich die Subtraktion definieren als

$$a - b = (\alpha - \beta, \alpha' - \beta')$$

Zur Definition der Multiplikation liegt es zunächst nahe, sie folgendermaßen zu definieren:

$$c = a \cdot b = (\alpha, \alpha') \cdot (\beta, \beta') = (\alpha \cdot \beta, \alpha' \cdot \beta')$$

Diese Definition führt jedoch auf einen Widerspruch, denn multipliziert man etwa

$$a = (\alpha, 0) \quad \text{mit} \quad b = (0, \beta') \ ,$$

ergibt sich $c = a \cdot b = (0,0)$ also null, obwohl keiner der beiden Faktoren null ist. Richtige Ergebnisse liefert die Definition:

$$c = a \cdot b = (\alpha \cdot \beta - \alpha' \cdot \beta', \alpha \cdot \beta' + \alpha' \cdot \beta)$$

Diese Definition ergibt bei zwei rein reellen Zahlen das richtige Ergebnis $\alpha \cdot \beta$ und im Fall $a = (\alpha, 0)$, $b = (0, \beta')$

ein Ergebnis $\neq$ 0.

Insbesonders liefert die Multiplikation

$$j \cdot j = j^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

$$j^2 = -1$$

Somit kann man eine komplexe Zahl auch folgendermaßen darstellen:

$$a = (\alpha, \alpha') = (\alpha, 0) + (0, \alpha') = \alpha + \alpha' \cdot (0,1)$$

$$a = \alpha + j \cdot \alpha'$$

Dies ist die sog. Binomdarstellung einer komplexen Zahl.

Die Division der komplexen Zahlen lässt sich wie die Multiplikation mit zwei Zahlenpaaren als Umkehrung der Multiplikation durchführen und liefert folgende Formel:

Mit $c = (\gamma, \gamma')$, $a = (\alpha, \alpha')$ $b = (\beta, \beta')$

ist

$$c = \frac{a}{b} = \left(\frac{\alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta'}{\alpha^2 + \alpha'^2}, \frac{\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)$$

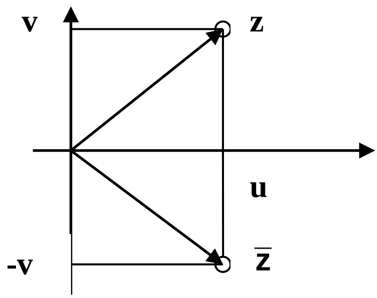
An Stelle der unanschaulichen Verknüpfungen der Paardarstellung verwendet man jedoch besser die Binomdarstellung der komplexen Zahlen.

Zusätzliche Definition:

Wenn $z = u + j \cdot v$ ist, dann nennt man

$$\overline{z} = u - j \cdot v$$

die zu z „konjugiert komplexe“ Zahl.



Wie in der Figur angedeutet, erinnert die Definition der Addition und der Subtraktion an die entsprechenden Verknüpfungen bei Vektoren. Allerdings trifft die Analogie nur bei Addition und Subtraktion zu. eine Multiplikation ist bei Vektoren abweichend definiert und eine Division prinzipiell nicht möglich.

Eine weitere Definition ist der Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Realteil}^2 + \mathrm{Imaginärteil}^2} \qquad |z| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

In der Pfeildarstellung entspricht der Betrag der Länge des Pfeils

Beispiel:

Gegeben sind die beiden Zahlen

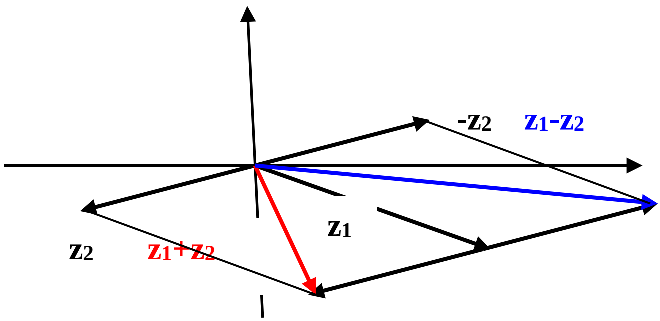
$$z_1 = (4,-2) = 4 - 2 \cdot j \qquad z_2 = (-3,-1) = -3 - j$$

Gesucht ist die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient der beiden Vektoren.

$$z_1 + z_2 = (4-3,-2-1) = (1,-3)$$

$$= 4 - 2 \cdot j + (-3 - j) = -1 - 3 \cdot j$$

$$z_1 - z_2 = 4 - 2 \cdot j - (-3 - j) = 7 - j$$



Multiplikation und Division werden besser in der Binomform durchgeführt. Es gelten die normalen Regeln des Ausmultiplizierens von Klammern.

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 2 \cdot j) \cdot (-3 - j) = -12 - 4 \cdot j + 6 \cdot j + 2 \cdot j^2$$

$$= -14 - 2 \cdot j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 2 \cdot j}{-3 - j}$$

Um den Nenner reell zu machen, wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-2\cdot j}{-3-j}\cdot\frac{-3+j}{-3+j} = \frac{-12+4\cdot j+6\cdot j-2\cdot j^2}{9+1} = \frac{-10+10\cdot j}{10} =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -1+j$$

*Die komplexen Zahlen bilden eine Menge **C** , die alle bisher besprochenen Mengen als Teilmengen enthält. Im Bereich der komplexen Zahlen sind alle algebraischen Zahloperationen ohne Einschränkung durchführbar, also*

- *Wurzeln mit negativem Argument*
- *Logarithmen mit negativer Basis und negativem Argument*
- *Potenzen mit negativer Basis*
- *Außerdem sind alle Operationen mit höheren Funktionen (Trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen usw.) ausführbar.*