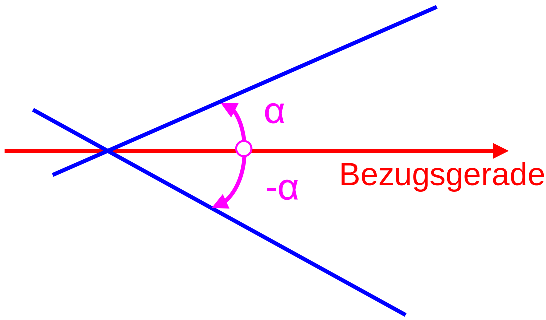
4 Trigonometrie

4.1 Winkeldefinition

Als Winkel bezeichnet man die zahlenmäßige Angabe, wie weit man eine Gerade dreht, die ursprünglich mit einer Bezugsgeraden in Deckung war.



Ein Winkel ist positiv, wenn man die Gerade gegen den Uhrzeigersinn dreht; er zählt negativ, wenn man sie im Uhrzeigersinn dreht.

Die Maßzahl des Winkels ist historisch so definiert, dass man einer vollen Drehung, bis die zwei Geraden wieder in Deckung sind, den Zahlenwert 360 zuweist und die Drehung in 360 gleiche Teile unterteilt. Die Kennzeichnung als Winkel erfolgt durch den Zusatz „Grad“. Somit bedeutet

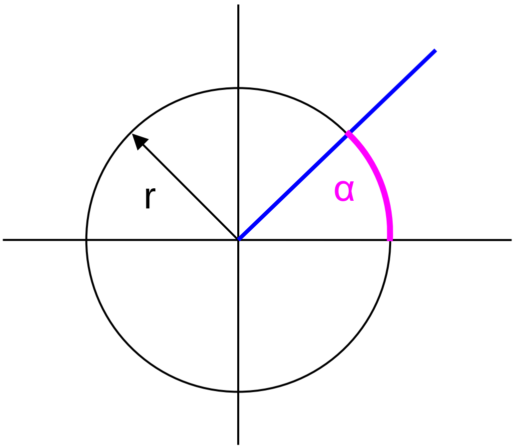
$$60^0 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

einer vollen Umdrehung.

Um die Winkelmessung besser an das Dezimalsystem anzupassen, wurde für die Zwecke des Vermessungswesens eine Teilung des rechten Winkels in 100

Teile festgelegt. Eine volle Umdrehung hat dann den Winkel 400°. Zur Unterscheidung nennt man einen solchermaßen festgelegten Winkel „Neugrad“. Diese Festlegung wird in der Technik außerhalb des Vermessungswesens kaum benutzt.

Eine Festlegung ohne willkürliche Winkelteilung erfolgt durch die Definition des Winkels an einem Kreis.



Der Umfang eines Kreises beträgt

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

ist also abhängig von r. Dividiert man den Umfang durch den Radius, ergibt sich ein vom Radius unabhängiges Maß für eine volle Umdrehung der Größe $2 \cdot \pi$. Entsprechend definiert man einen beliebigen Winkel folgendermaßen:

$$\alpha = \frac{Bogenlänge\ am\ Kreis}{Radius\ des\ Kreises}$$

Man nennt dies einen Winkel im Bogenmaß.

Diese Definition hat den Vorteil, dass man einen Winkel als dimensionslose Größe erhält. Somit ist es ohne weiteres möglich, einen Winkel als Exponent in einer e-Funktion zu verwenden. Der Ausdruck

$$z = r \cdot e^{j \cdot \pi} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1}$$

hat in der Mathematik eine wohl definierte Bedeutung.

Für häufig benutzte Winkel ergeben sich folgende Zuordnungen

$$90^0 = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad 60^0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$30^0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \qquad 180^0 = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi$$

$$360^0 = 2 \cdot \pi$$

und die Umrechnung eines Winkels im Gradmaß in das Bogenmaß lautet:

$$\overset{\frown}{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$$

und umgekehrt:

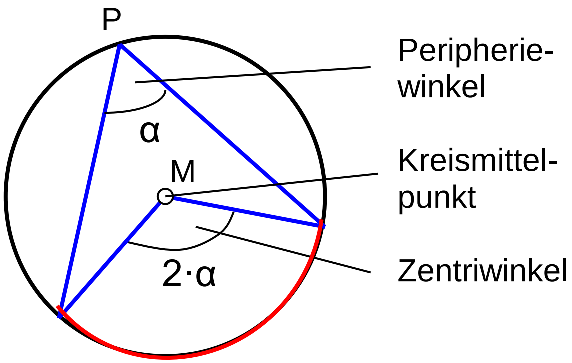
$$\alpha^0 = \overset{\frown}{\alpha} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Um zwei Winkel zu addieren oder zu subtrahieren, werden einfach die Bogenlängen addiert bzw. subtrahiert.

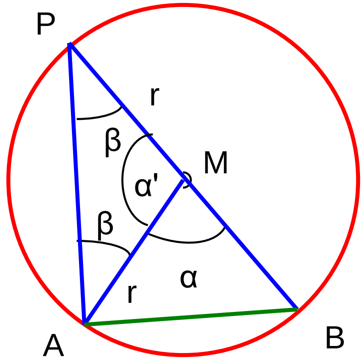
4.2 Winkelsätze am Kreis

Die folgenden Gesetzmäßigkeiten werden oft benutzt:

Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.



Man kann das nachweisen, indem man zunächst den Fall behandelt, dass einer der beiden Schenkel des Peripheriewinkels mit einem des Zentriwinkels zusammenfällt:



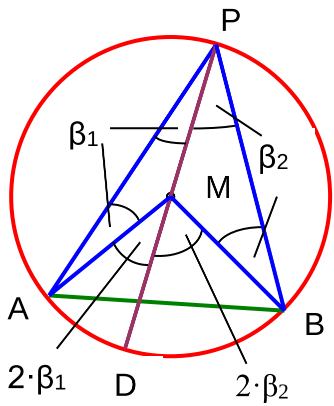
Das Dreieck P – M – A ist in diesem Fall gleichschenklig, der Winkel α' gleich

$$\alpha' = \pi - 2 \cdot \beta$$

Der Winkel α ist damit:

$$\alpha = \pi - \alpha' = 2 \cdot \beta$$

Den allgemeinen Fall kann man auf obigen Fall zurückführen, indem man die Winkel in zwei Winkel aufteilt:



Die braun gezeichnete Linie P – D erzeugt zwei gleichschenklige Dreiecke A – M – P und B – M – P und somit ist der

Außenwinkel A – M – D = $2 \cdot \beta_1$

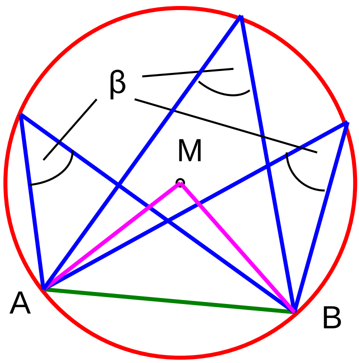
und der Winkel B – M – D = $2 \cdot \beta_2$

Der gesamte Zentriwinkel ist damit gleich dem doppelten Peripheriewinkel $\beta_1 + \beta_2$

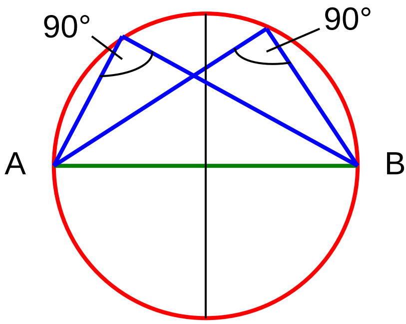
$$A - M - B \;=\; 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2)$$

Verschiebt man den Punkt P, dann bleibt das Dreieck A – M – B unverändert; das bedeutet, dass auch der Peripheriewinkel unverändert bleibt.

Alle Peripheriewinkel, die zum gleichen Bogen, bzw. zur gleichen Kreissehne gehören, sind gleich.



Zieht man die Strecke A – B durch den Mittelpunkt des Kreises, dann ist der Zentriwinkel gleich 180° und jeder Peripheriewinkel gleich 90°. Der Kreis wird zum Thaleskreis:



4.3 Trigonometrische Grundbeziehungen

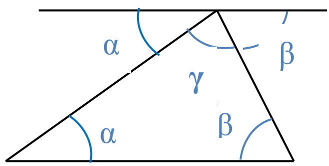
Trigonometrie bedeutet Messung am Dreieck. Ein Dreieck ist definiert

- Durch drei gegebene Seiten
- Durch zwei Seiten und einem Winkel
- Durch zwei Winkel und eine Seite

Zu Berechnungen am Dreieck sind also Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks und den Winkeln zwischen den Seiten notwendig.

Zunächst ist festzustellen:

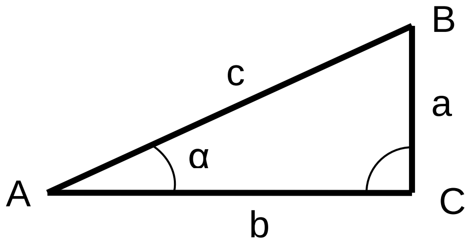
Die Summe der drei Winkel im Dreieck beträgt immer 180°:



Zieht man durch die Spitze des Dreiecks eine Parallele zur Grundlinie, dann ergeben sich sog. Z – Winkel, d.h. die entsprechenden Winkel im Dreieck und an der Parallelen sind gleich. Die Summe der drei Winkel α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Da sich bei jedem Dreieck rechtwinklige Teildreiecke bilden lassen, ist es zweckmäßig, Beziehungen zwischen Dreieckseiten und Winkeln zunächst an rechtwinkligen Dreiecken herzustellen und dann auf allgemein schiefwinklige Dreiecke zu verallgemeinern.



Zwischen dem Winkel α und den drei Dreiecksseiten a, b und c lassen sich sechs Verhältnisse bilden, durch die der Winkel α festgelegt ist. Diese Streckenverhältnisse tragen folgende Namen:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos ec\,\alpha = \frac{Hypotenuse}{Gegenkathete} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Außerdem gilt am rechtwinkligen Dreieck der Satz von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

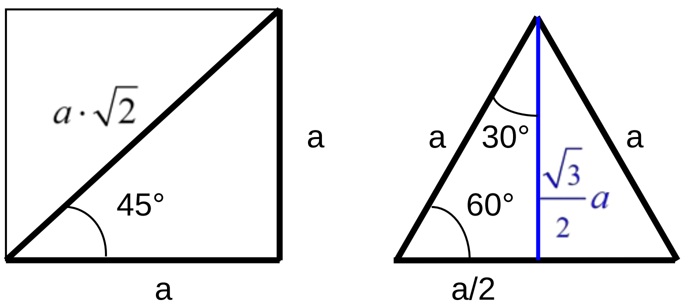
Dividiert man diese Beziehung durch c², erhält man:

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Praktisch benutzt werden allerdings nur die ersten vier Beziehungen $\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad \tan\alpha \quad \cot\alpha$

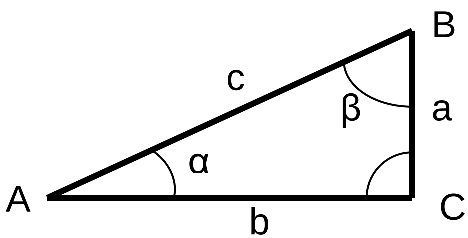
Gibt man einen bestimmten Winkel vor und möchte eines der Streckenverhältnisse berechnen, dann ist dies kein einfacher Vorgang. Die Berechnung geschieht durch unendliche Reihen. Lediglich für bestimmte Winkel lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras das zugehhörige Streckenverhältnis berechnen.



Für die ersten vier Winkelbeziehungen ergibt sich:

Funktion	α=0°	α=30°	α=45°	α=60°	α=90°
sin α	0	1/2 = 0,5	$\sqrt{2}/2 = 0,707$	$\sqrt{3}/2 = 0,866$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2 = 0,866$	$\sqrt{2}/2 = 0,707$	1/2 = 0,5	0
tan α	0	$\sqrt{3}/3 = 0,5774$	1	$\sqrt{3} = 1,7321$	∞
cot α	∞	$\sqrt{3} = 1,7321$	1	$\sqrt{3}/3 = 0,5774$	0

Aus der Tabelle und am rechtwinkligen Dreieck kann man noch folgende wichtige Beziehung ablesen:



Die beiden Winkel α und β ergänzen sich zu 90°. Man nennt den Winkel β den Komplementwinkel zu α. Außerdem ist die Ankathete des Winkels α gleich der Gegenkathete des Winkels β, sodass gilt:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

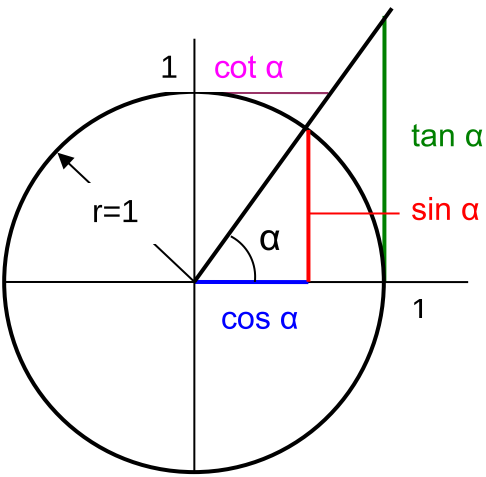
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta \qquad \tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta \qquad \cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

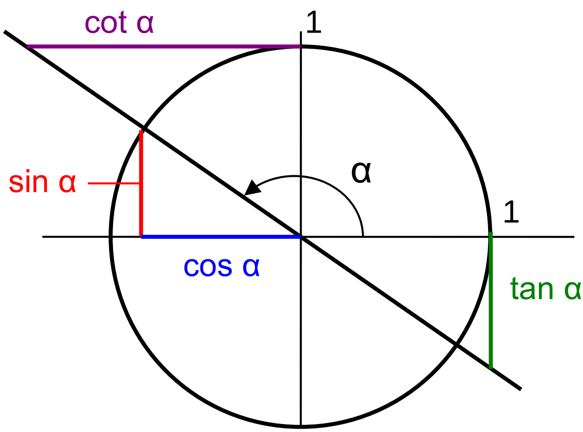
4.4 Darstellung am Einheitskreis, Verallgemeinerung auf beliebige Winkel

Man kann die trigonometrischen Beziehungen direkt zahlenmäßig ablesen, wenn man in einem Dreieck die Hypotenuse gleich 1 macht.

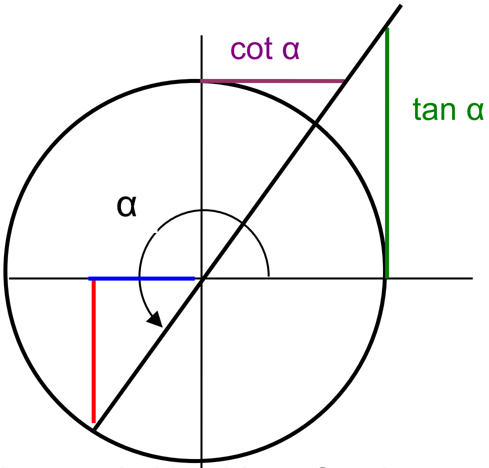


Die Spitzen aller möglichen rechtwinkligen Dreiecke liegen dann auf einem Kreis mit dem Radius 1. Diese Darstellung erlaubt außerdem eine Verallgemeinerung auf Winkel > 90°

Falls der Winkel α >90° ist, kann man im Einheitskreis ebenfalls rechtwinklige Dreiecke zeichnen, wobei allerdings Seiten negativ einzusetzen sind und die Winkelfunktionen negative Werte annehmen können. In der folgenden Figur ist die Ankathete negativ, der cos α wird negativ. Um vorzeichenrichtige Werte für die tan – und cot – Funktion zu erhalten, ist darauf zu achten, dass die entsprechenden Strecken immer vom Punkt (1, 0) und (0, 1) abzutragen sind. der zweite Schenkel des Winkels muss deshalb nach hinten verlängert werden.

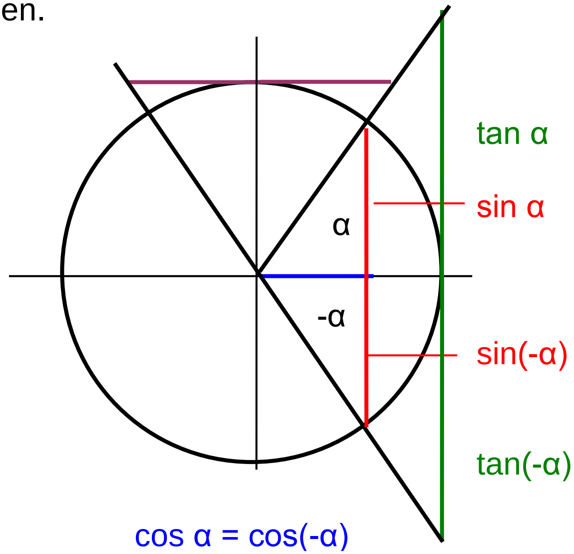


Entsprechende Figuren ergeben sich für Winkel im dritten Quadranten (π ≤ α ≤ 3π/2) und im 4. Quadranten



sin α und cos α sind im dritten Quadranten beide negativ, deshalb ist sowohl tan α und cot α positiv.

Der Einheitskreis ist auch für die Darstellung der trigonometrischen Funktionen mit negativen Winkeln geeignet. Negative Winkel werden im Uhrzeigersinn aufgetragen.



4.5 Umrechnung verschiedener Winkelfunktionen

Wie die Definitionsgleichungen der Winkelfunktionen zeigen, benötigt man eigentlich nur eine, da man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Winkelfunktionen ineinander umrechnen kann. So gelten folgende Beziehungen:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Pythagoras

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

aufgelöst nach sin α ergibt sich:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Die folgende Tabelle zeigt alle Umrechnungsformeln für die ersten vier Winkelfunktionen:

	sin α	cos α	tan α	cot α
$\sin\alpha$	-	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-	$\frac{1}{\cot\alpha}$

$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	-

4.6 Die Arkusfunktionen

Bisher war die Aufgabe gestellt, zu einem gegebenen Winkel die entsprechenden Seitenverhältnisse auszurechnen. Die Umkehraufgabe lautet:

Gegeben ist der sin, cos, tan, cot eines unbekannten Winkels, wie groß ist der zugehörige Winkel? Die zugehörige Rechenoperation heißt Arkusfunktion:

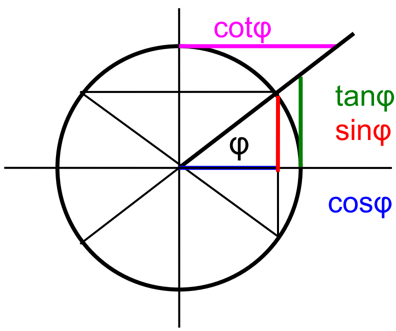
$$\sin\varphi = \frac{a}{b} = q; \qquad \varphi = \arcsin q$$

$$\cos\varphi = q; \qquad \varphi = \arccos q$$

$$\tan\varphi = q; \qquad \varphi = \arctan q$$

„Gesucht ist der Bogen des Winkels φ, dessen sin gleich q ist“.

Am Einheitskreis erkennt man, dass die Aufgabe im allgemeinen nicht eindeutig lösbar ist:



Zu einem positiven Wert von sinφ gehört ein Winkel im ersten Quadranten, aber auch ein Winkel im zweiten

Quadranten, d.h. es gibt zwei Lösungen der Gleichung

$$\sin\varphi = a$$

$$\varphi = \arcsin a \qquad \varphi = \pi - \arcsin a$$

Der gleiche Wert für sin φ ergibt sich auch, wenn der Winkelstrahl um eine volle Umdrehung weiter gedreht wurde. Alle Winkelangaben können deshalb auch um $\pm k \cdot 2\pi$ vergrößert oder verkleinert sein. Deshalb muss man immer angeben:

$$\varphi = \arcsin a \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi = \pi - \arcsin a \pm k \cdot 2\pi$$

Bei der Berechnung auf dem Taschenrechner erscheint der sog. Hauptwert im Bereich

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Ebenso gehören zu einem bestimmten cos φ der positive wie der negative Winkel φ und dieser ist nur bis auf volle Umdrehungen bestimmt. Deshalb lautet die Lösung der Gleichung

$$\cos\varphi = a$$

$$\varphi_1 = \arccos(a) \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 \pm k \cdot 2\pi$$

Der Hauptwert liegt im Bereich:

$$0 \le \varphi \le \pi$$

Zu einem bestimmten tan φ gehören die Winkel

$$\varphi = \arctan a + k \cdot \pi$$

Auf dem Taschenrechner wird der Hauptwert im Bereich

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

berechnet.

Diese Eigenschaft gilt auch für $\varphi = arc\cot a$.

Beispiele:

a)

$$\sin\varphi = 0{,}67 \qquad \widehat{\varphi}_1 = \arcsin 0{,}67 = 0{,}7342 \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_1 = 42{,}067° \pm k \cdot 360°$$

$$\varphi_2 = \pi - \widehat{\varphi}_1 = 2{,}407 \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_2 = 180° - \varphi_1 = 137{,}933° \pm k \cdot 360°$$

b) $\cos\varphi = -0{,}322 \quad \varphi = \arccos\left(-0{,}322\right)$

$$\widehat{\varphi}_1 = 1{,}8986 \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi_1 = 108{,}784° \pm k \cdot 360°$$

$$\widehat{\varphi}_2 = 2\pi - \widehat{\varphi}_1 = 4{,}3845 \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi_2 = 251{,}21° \pm k \cdot 360°$$

c) $\tan\varphi = -1{,}5 \qquad \varphi = \arctan\left(-1{,}5\right)$

$$\widehat{\varphi} = -0{,}9828 \pm k \cdot \pi$$

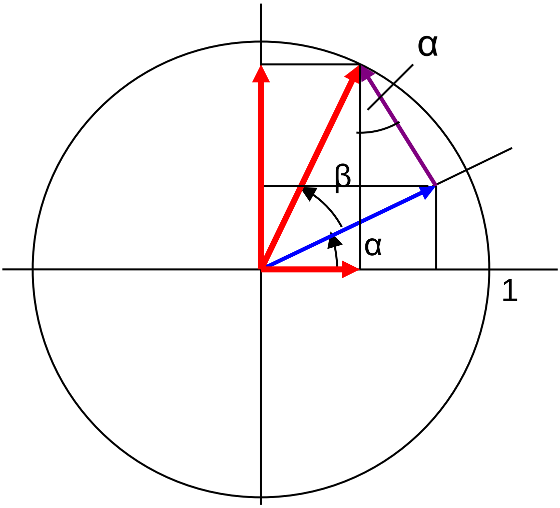
$$\varphi = -56{,}31° \pm k \cdot 180°$$

4.7 Die Additionstheoreme

In den Anwendungen treten häufig Winkelbeziehungen mit der Summe oder der Differenz zweier Winkel auf. Es ist häufig zweckmäßig, diese in die Winkelfunktionen der einzelnen Summanden umzurechnen. Die Umrechnungsformeln werden meist mit Hilfe komplexer Funktionen abgeleitet. Man kann sie jedoch auch am Einheitskreis erhalten.

Beispiel:

$\sin(\alpha+\beta)$ soll als Funktion von sin und cos der einzelnen Winkel dargestellt werden.



Den Vektorpfeil, der den Neigungswinkel α + β hat, kann man als Summe zweier Vektoren darstellen. Der blau gezeichnete Vektor hat die Komponenten

$$\left(\cos\beta\cdot\cos\alpha;\cos\beta\cdot\sin\alpha\right)$$

Der violett gezeichnete Vektor hat die Komponenten:

$$\left(-\sin\beta\cdot\sin\alpha;\sin\beta\cos\alpha\right)$$

Die Summe dieser beiden Vektoren ergibt den rot gezeichneten Ergebnisvektor:

$$\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\right)$$

Die horizontale Komponente ist der cos des Winkels α + β, die Vertikalkomponente der sin der Winkelsumme:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Die Ableitung erfolgte zwar nur für Winkel im ersten Quadranten, man kann aber nachweisen, dass die Beziehungen für beliebige Winkel gelten, auch wenn z.B. der Winkel β negativ ist. Damit ist:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Spezialfall:

Falls α = β ist, erhält man aus obigen Formeln

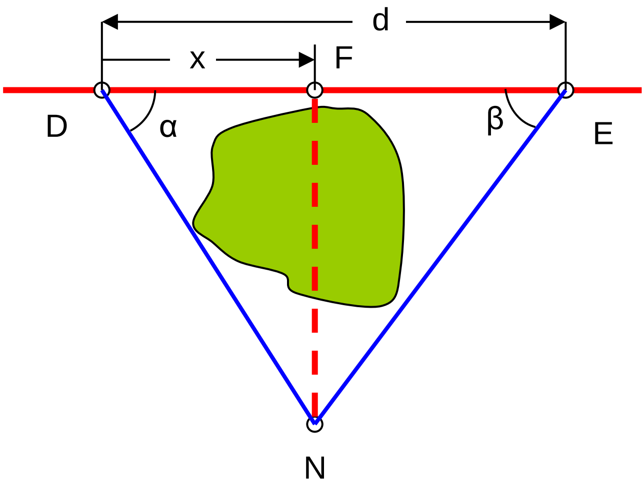
$$\sin(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(2\cdot\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

Weitere Formeln findet man in den umfangreichen Formelsammlungen.

<u>Beispiele:</u>

1) Von einer Wasserleitung zwischen den Orten D und E soll eine Stichleitung zum Ort N gelegt werden, wobei die Leitung möglichst kurz sein und deshalb senkrecht zur Hauptleitung verlegt werden soll. Der Abzweigpunkt F lässt sich von N aus nicht einsehen, es können aber die Winkel α und β und die Distanz d gemessen werden. An welcher Stelle x soll die Abzweigung erfolgen?



Lösung:

Das Dreieck D – E – N kann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Der senkrechte Abstand F – N sei h. Dann gilt:

$$\frac{h}{x} = \tan\alpha \qquad h = x \cdot \tan\alpha$$

$$\frac{h}{d-x} = \tan\beta \qquad h = (d-x) \cdot \tan\beta$$

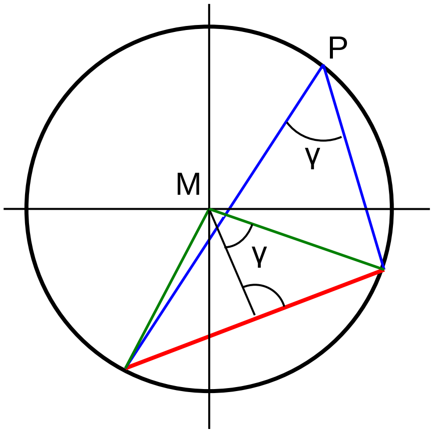
Gleichsetzen ergibt:

$$x \cdot \tan\alpha = (d-x) \cdot \tan\beta$$

$$x \cdot (\tan\alpha + \tan\beta) = d \cdot \tan\beta$$

$$x = \frac{d \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

2) Wie groß ist die Länge der Kreissehne eines Kreises mit dem Radius r, wenn von einem Punkt P des Kreises aus der Winkel γ gemessen wurde?

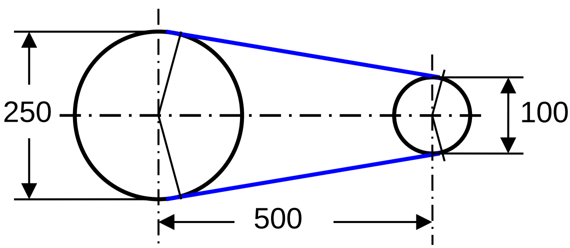


Lösung:

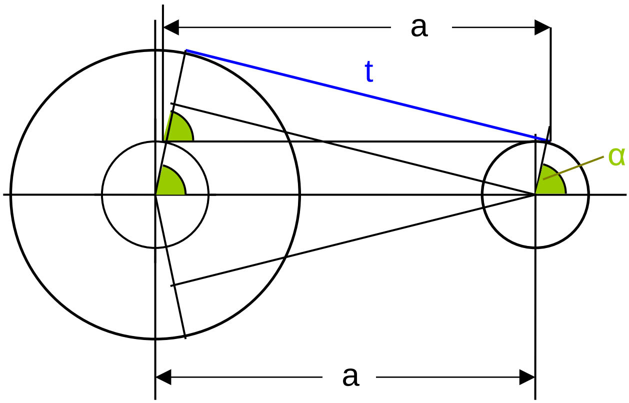
Zeichnet man vom Kreismittelpunkt zwei Strahlen zu den Endpunkten der Sehne und die Mittelsenkrechte vom Kreismittelpunkt aus, dann erhält man ein Dreieck mit der halben Sehnenlänge als Gegenkathete und dem Kreisradius als Hypotenuse. Somit ist:

$$\sin\gamma = \frac{s/2}{r} \qquad s = 2\cdot r\cdot\sin\gamma$$

3) Welche Länge muss ein Zahnriemen haben, der



zwei Wellen im Abstand von 500 mm verbindet, wobei das größere Zahnrad einen Durchmesser von 250 mm und das kleinere den Durchmesser 100 mm hat?



Freie Riemenlänge:

$$t^2 = a^2 - (R - r)^2 \qquad t = 494,34\,[mm]$$

Winkel α:

$$\cos\alpha = \frac{R - r}{a} = \frac{125 - 50}{500} = 0,15; \qquad \alpha = 1,42;$$

Gesamte Riemenlänge:

$$s = 2 \cdot t + 2 \cdot R \cdot (\pi - \alpha) + 2 \cdot r \cdot \alpha$$

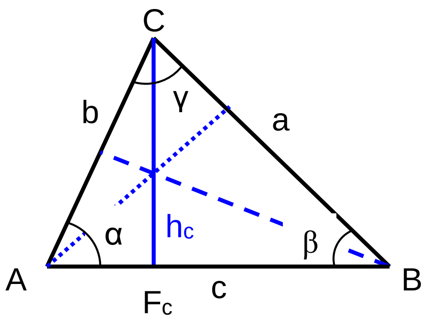
$$s = 2 \cdot t + 2 \cdot R \cdot \pi - 2 \cdot R \cdot \alpha + 2 \cdot r \cdot \alpha$$

$$s = 1561,05\,[mm]$$

4.8 Allgemein schiefwinklige Dreiecke

Bisher wurden alle Ergebnisse an rechtwinkligen Dreiecken erzielt. Im folgenden sollen mit Hilfe der Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck die verallgemeinerten Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln an allgemeinen Dreiecken aufgestellt werden.

<u>Der Sinussatz:</u>



Zieht man das Lot von C auf die Seite c dann entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke

A – C – F_c

und B – C - F_c

Die Höhe h ist dabei die Gegenkathete des jeweils gegenüberliegenden Winkels und man kann ablesen:

$$h_c = a \cdot \sin\beta \qquad h_c = b \cdot \sin\alpha$$

Gleichsetzen ergibt:

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man das Lot auf die Seite b zieht:

$$h_b = c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Diese zwei Beziehungen kann man zusammenfassen zu:

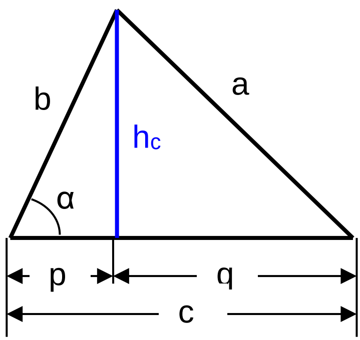
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich die Dreieckseiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Kosinussatz:

Der Kosinussatz lässt sich ebenfalls durch Zerlegung des allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke beweisen.



Am linken Dreieck lässt sich ablesen:

$$p = b \cdot \cos\alpha$$

$$q = c - p = c - b \cdot \cos\alpha$$

Außerdem ist: $h_c^2 = b^2 - p^2 = a^2 - q^2$ (Pythagoras)

$$b^2 - b^2 \cdot \cos^2\alpha = a^2 - q^2$$

$$= a^2 - \left(c - b \cdot cos\alpha\right)^2$$

$$b^2 - b^2 \cdot \cos^2\alpha = a^2 - c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha - b^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Für die anderen beiden Seiten verläuft die Ableitung gleich. Somit ergeben sich drei Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Das Quadrat einer Seite ist die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das zweifache Produkt der beiden anderen Seiten, multipliziert mit dem cos des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Man kann den cos – Satz als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ansehen. Dabei kann beim schiefwinkligen Dreieck nicht mehr zwischen Hypotenuse und Kathete unterschieden werden. Alle Seiten sind gleich behandelt.

Ist allerdings der eingeschlossene Winkel gleich 90°,

dann entfällt wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ das zweifache Produkt

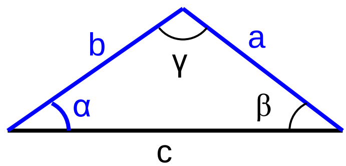
und die beiden anliegenden Seiten sind die Katheten, die gegenüber liegende Seite die Hypotenuse.

<u>Beispiele:</u>

1) Von einem Dreieck sind gegeben:

Winkel α = 40°; Seiten a = 40 cm; b = 32 cm

Gesucht sind die beiden restlichen Winkel und die fehlende Seite.



Berechnung von β mit dem sin – Satz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$\beta = 30{,}946°$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 109{,}05°$$

Berechnung von c entweder mit cos – Satz oder mit

$$c = b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta$$
$$c = 58{,}8195\ cm$$

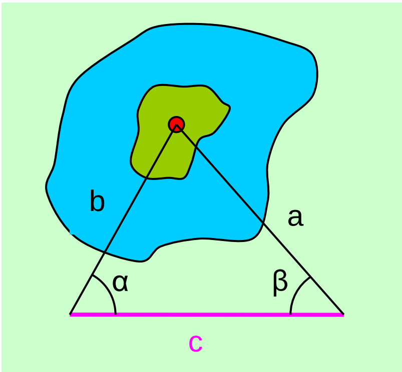
2)

Auf einer Insel in einem kleinen See befindet sich eine Markierung, deren Lage zu zwei Fixpunkten am Ufer gemessen werden soll.

Es wurde bestimmt:

α = 65° 43’ 15’’   β = 48° 15’ 33’’   c = 75 m

Wie groß sind die Abstände der Markierung auf der Insel von den Fixpunkten am Ufer?



Lösung:

Umrechnung der Winkel in das Dezimalsystem:

$$\alpha = 65 + \frac{43}{60} + \frac{15}{3600} = 65,7208°$$

$$\beta = 48 + \frac{15}{60} + \frac{33}{3600} = 48,2592°$$

Spitzenwinkel des Dreiecks: $180 - \alpha - \beta = 66,02°$

Seite a: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 74,82\,[m]$

Seite b: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \quad b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 61,249\,[m]$

3.8 Goniometrische Bestimmungsgleichungen

Goniometrische Bestimmungsgleichungen sind z.B. der sin- oder cos-Satz, wenn einer der Winkel gesucht ist. In diesem Fall ist die Gleichung einfach nach dem gesuchten Winkel aufzulösen. Kommt der gesuchte Winkel jedoch in mehreren Termen vor, dann muss man die Gleichung solange umformen, bis man den Winkel auf einer Seite der Gleichung isoliert hat.

Im allgemeinen ist der Winkel in unterschiedlichen Winkelfunktionen enthalten, so dass man zweckmäßiger Weise alle Winkelfunktionen mit Hilfe der Umrechnungstabelle auf eine einheitliche Art bringt, also z.B. die Gleichung so umformt, dass nur noch sin φ oder cos φ vorkommt. Bei der Lösung hat man zu beachten, dass zum gleichen Wert des cos oder sin mehrere Winkel gehören und außerdem jeder Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt ist.

Man unterscheidet:

- Rein goniometrische Gleichungen. Sie enthalten die Unbekannte nur in Verbindung mit trigonometrischen Funktionen, z.B.

  $$\tan\left(2 \cdot x\right) - \cos x = 1{,}3$$

  Sie lassen sich oft dadurch formelmäßig lösen, dass man die trigonometrische Funktionen so umformt, dass nur noch ein Typ von trigonometrischer Funktion vorkommt, z.B. nur noch cos x. Eine weitere Methode besteht darin, dass man durch eine passende Substitution die goniometrische Gleichung in eine algebraische Gleichung umwandelt und mit algebraischen Methoden löst.

- Gemischt goniometrische Gleichungen:
  Die Variable ist sowohl in trigonometrischen als

auch in algebraischen Ausdrücken enthalten. Solche Gleichungen sind nur durch iterative Näherungsverfahren lösbar.

Beispiel: $x^2 \cdot \sin x - \cos x = 0,75$

Beispiele:

a) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \quad \Big|^2$$

$$1-\cos^2 x = \frac{3}{4} - \sqrt{3} \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+2}}{4}$$

$$\cos x_1 = 0,992033$$

$$\widehat{x}_1 = \arccos(0,992033) = \pm 0,12634 \pm k \cdot 2\pi \qquad x_1 = \pm 7,24°$$

$$\cos x_2 = -0,126 \qquad \widehat{x}_2 = \arccos(-0,126) = \pm 1,6971 \pm k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \pm 97,24°$$

Einsetzen ergibt, dass nur der negative Wert von x_1 und der positive Wert von x_2 gültige Lösungen sind.

b) $2 \cdot \tan x + 3 \cdot \cot x = 10$

$$2 \cdot \tan x + \frac{3}{\tan x} = 10$$

$$2 \cdot \tan^2 x - 10 \cdot \tan x + 3 = 0$$

$$\tan x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$\widehat{x}_1 = \arctan\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}\right) = 1{,}36 \pm k \cdot \pi \qquad x_1 = 77{,}94°$$

$$x_2 = \arctan\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}\right) = 0{,}31 \pm k \cdot \pi \qquad x_2 = 17{,}77°$$

Beide Werte sind gültig