

Test Schulmathematik - Wiederholungsprüfung

am 18.12.2009

Prüfungszeit:

60 Minuten

Lösungsbeispiel

[Alle Angaben sind ohne Gewähr]

Zugelassene Hilfsmittel:

- Beliebige Formelsammlung (inkl. handschriftlicher Ergänzungen)
- KEIN Taschenrechner

Matrikelnummer: _____

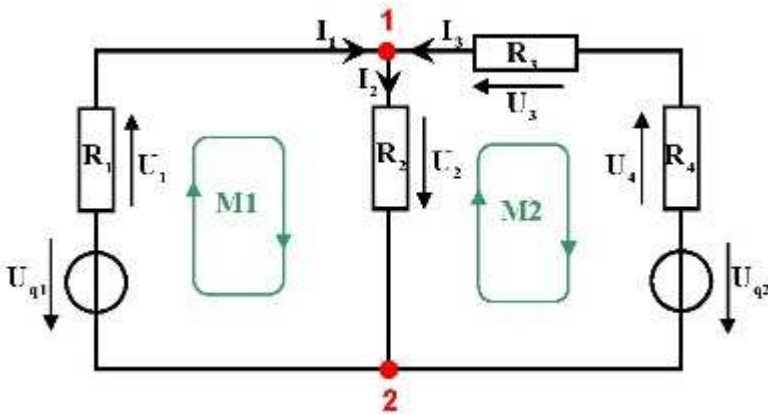
Name + Vorname: _____

Studiengang: ☐ MA ☐ EUT

1. Gleichungen

Netzwerkanalyse

Zu Berechnung der Ströme und Spannungen in einem elektrischen Netzwerk dienen die Knotenpunktregel und die Maschenregel.



$$\begin{aligned} I_1 &= 2,5 \text{ A} \\ I_2 &= 3,75 \text{ A} \\ I_3 &= 1,25 \text{ A} \end{aligned}$$

Für dieses Schaltbild erhält man dadurch die Gleichungen:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0, \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 = U_{q1}, \quad -I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_3 R_4 = -U_{q2}$$

Berechnen Sie die Werte für I_1 , I_2 und I_3 wenn gilt:

$$R_1 = 1 \, \Omega, \quad R_2 = 2 \, \Omega, \quad R_3 = 6 \, \Omega, \quad R_4 = 4 \, \Omega \quad \text{und} \quad U_{q1} = 10 \text{ V}, \quad U_{q2} = 20 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_{q1} \\ -R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 &= -U_{q2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \quad (I) \\ 1 \, \Omega \cdot I_1 + 2 \, \Omega \cdot I_2 &= 10 \text{ V} \\ -2 \, \Omega \cdot I_2 - 10 \, \Omega \cdot I_3 &= -20 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & -10 & -20 \end{array} \right) \text{ II} - \text{I}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad I_1 &= I_2 - I_3 \\ &= 3,75 - 1,25 = \underline{\underline{2,5}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -2 & -10 & -20 \end{array} \right) 3 \cdot \text{III} + 2 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -32 & -40 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow -32 I_3 &= -40 \Rightarrow I_3 = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} = \underline{\underline{1,25}} \\ 3 I_2 - I_3 &= 10 \quad | + I_3 \\ 3 I_2 &= 11,25 \quad | :3 \\ I_2 &= \underline{\underline{3,75}} \end{aligned}$$

2. Proportionen

Strandkorbproduktion

Die 30-Std.-Woche ist durchgesetzt worden. Um die Arbeitszeitverkürzung auszugleichen, Mitarbeiter einzusparen und gleichzeitig die Produktion zu erhöhen, werden die alten Maschinen durch neue ersetzt.

Um das wie viel Fache müssen die neuen Maschinen rationeller arbeiten als die alten, wenn alle der folgenden Änderungen vorgesehen sind?

- Übergang von der 35- zur 30-Std.-Woche.
- Verringerung der Anzahl der Arbeitnehmer von 600 auf 500.
- Erhöhung der Produktion vom 350 auf 500 Strandkörbe pro Monat

$$t = 35h \rightarrow 30h$$

$$N_1 = 600 \rightarrow N_2 = 500$$

$$P_1 = 350 \rightarrow P_2 = 500$$

$$R_1 = \frac{N_1 \cdot t_1}{P_1} = \frac{35 \cdot 600}{350} = 60 \frac{h}{\text{Strandkorb}}$$

$$R_2 = \frac{N_2 \cdot t_2}{P_2} = \frac{30 \cdot 500}{500} = 30 \frac{h}{\text{Strandkorb}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{60}{30} = 2 \quad \rightarrow \text{Die Maschinen müssen doppelt so gut arbeiten wie die Alten.}$$

3. Trigonometrie

3.1. Vereinfachen Sie soweit als möglich:

$$\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cancel{\cos x \cdot \sin y} + \sin x \cdot \cos y - \cancel{\cos x \cdot \sin y}}{\cancel{\cos x \cdot \cos y} + \cancel{\sin x \cdot \sin y} + \cos x \cdot \cos y - \cancel{\sin x \cdot \sin y}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos y}{2 \cdot \cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

3.2. Vereinfachen Sie soweit als möglich:

$$\cos 2x + 2 \sin^2 x =$$

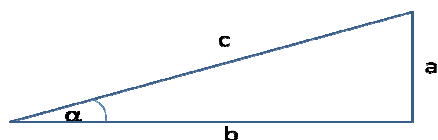
$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cdot \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

↖ siehe S.94/95
↙ Papula

3.3. Beweisen Sie mit Hilfe der Grunddefinitionen der Winkelfunktionen **und des Satz des Pythagoras** diese Aussage:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Hinweis: Grunddefinition der Winkelfunktionen:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\tan^2 \alpha \cdot b^2 + b^2 = c^2 \quad | : b^2$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$a = \tan \alpha \cdot b$$

$$b = \frac{a}{\tan \alpha}$$

4. Vektorrechnung

Gegeben ist der Ortsvektor $a = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix}$

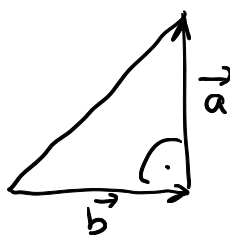
Bestimmen Sie alle Vektoren a, b und c für die **alle** der folgenden Bedingungen gelten:

- a, b und c sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks
- b steht senkrecht auf a
- a hat die Länge 3
- c hat die Länge 5

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{a}| \stackrel{!}{=} 3$$

$$|\vec{c}| \stackrel{!}{=} 5$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 = 0$$

$$3 \cdot b_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$b_2 = 0$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{p^2 + 3^2} \stackrel{!}{=} 3$$

$$p^2 + 9 = 9 \quad | -9$$

$$p^2 = 0$$

$$p = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \rightarrow c_2 = 3 + 0 = 3$$

$$|\vec{c}| \stackrel{!}{=} 5 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\sqrt{c_1^2 + 3^2} = 5 \quad |^2$$

$$c_1^2 + 9 = 25 \quad | -9$$

$$c_1^2 = 16$$

$$c_1 = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$$

$$\rightarrow 0 + b_1 = c_1$$

$$b_1 = c_1 = \underline{\underline{4}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}}$$

5. Logarithmen

Vereinfachen Sie soweit als möglich. $\ln(e) = 1$

$$\begin{aligned}\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}} &= \ln \sqrt{e^3 (2 \cdot \ln e + 6 \cdot \ln e)} = \ln \sqrt{e^3 (2+6)} = \\ &= \ln \sqrt{e^{3 \cdot 8}} = \ln \sqrt{e^{24}} = \ln e^{\frac{24}{2}} = \ln e^{12} = 12 \cdot \ln e \\ &= \underline{\underline{12}};\end{aligned}$$

6. Ungleichungen

Geben Sie den Definitionsbereich zu folgender Ungleichung an und bestimmen Sie ihre reellen Lösungen

$$\frac{3}{2x-4} \leq 2$$

① Definitionsbereich

$$2x-4 = 0 \quad | +4$$

$$2x = 4 \quad | :2$$

$$x = \underline{\underline{2}}$$

$$\rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

② 1. Fall: $2x-4 < 0$
 $\hookrightarrow x < 2$

$$\frac{3}{2x-4} \leq 2 \quad | \cdot (2x-4)$$

$$3 \geq 2(2x-4)$$

$$3 \geq 4x-8 \quad | +8$$

$$11 \geq 4x \rightarrow x \leq \frac{11}{4} \quad \text{und } x < 2 \rightarrow x \notin \mathbb{L}$$

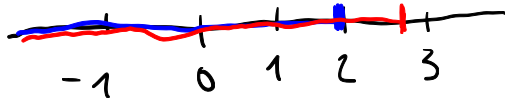
2. Fall: $2x-4 > 0 \rightarrow x \geq 2$

$$\frac{3}{2x-4} \leq 2 \quad | \cdot 2x-4$$

$$3 \leq 4x-8 \quad | +8 \quad | :4$$

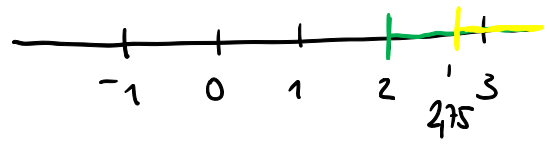
$$\frac{11}{4} \leq x \quad \text{und } x \geq 2$$

1. Fall

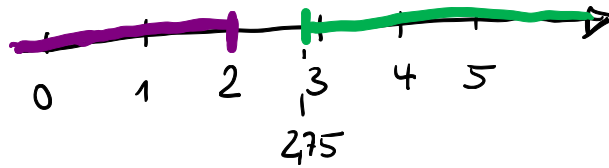


$$x \leq \frac{11}{4} \wedge x < 2$$

2. Fall



$$x > \frac{11}{4} \wedge x > 2$$



$$x \in]-\infty; 2[\cup [2.75; \infty[$$

7. Funktionen

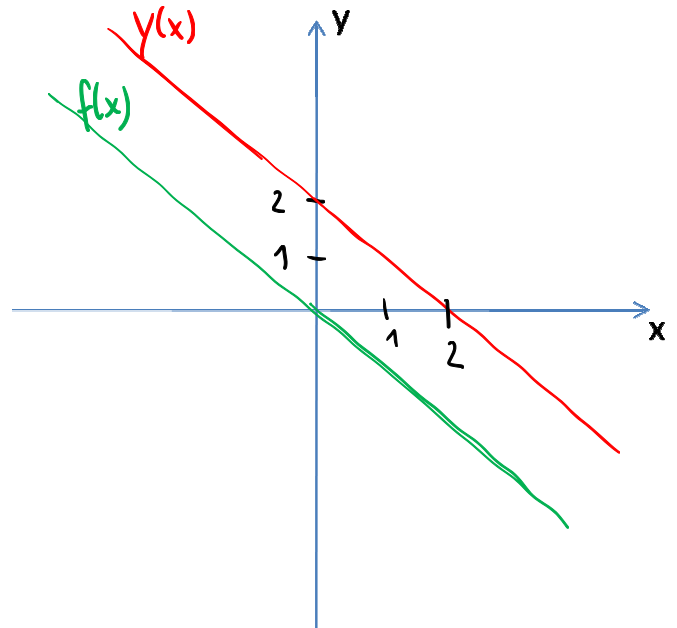
Skizzieren Sie jeweils grob den Graph der gegebenen Funktion, geben Sie die Schnittpunkte mit den Achsen zahlenmäßig an und geben Sie die erste Ableitung $y'(x)$ an.

7.1. $y(x) = 2 - x$

$$y(x) = -x + 2$$

$$f(x) = -x$$

$$y'(x) = -1$$



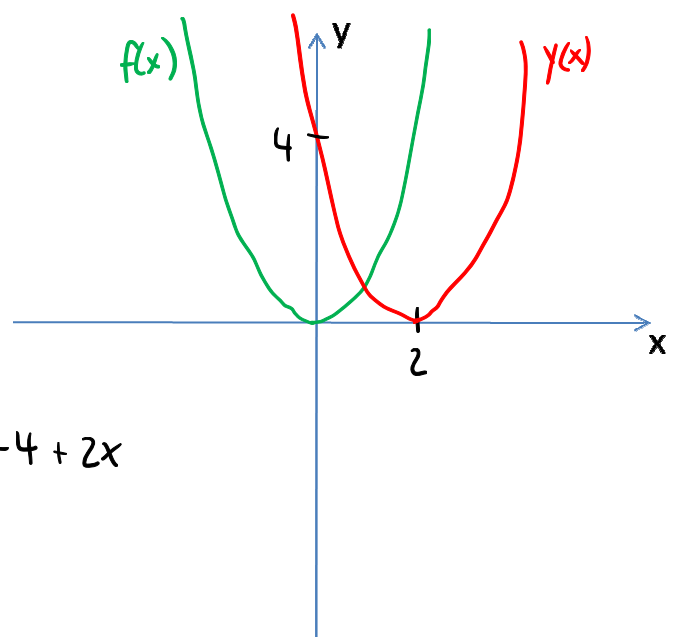
7.2. $y(x) = (2 - x)^2$

$$y(x) = (-(x-2))^2 = (x-2)^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$y(0) = 2^2 = 4$$

$$y'(x) = 2(2-x) \cdot (-1) = -2(2-x) = -4 + 2x$$



7.3. $y(x) = \sqrt{2-x}$

$$y(x) = \sqrt{-x+2}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

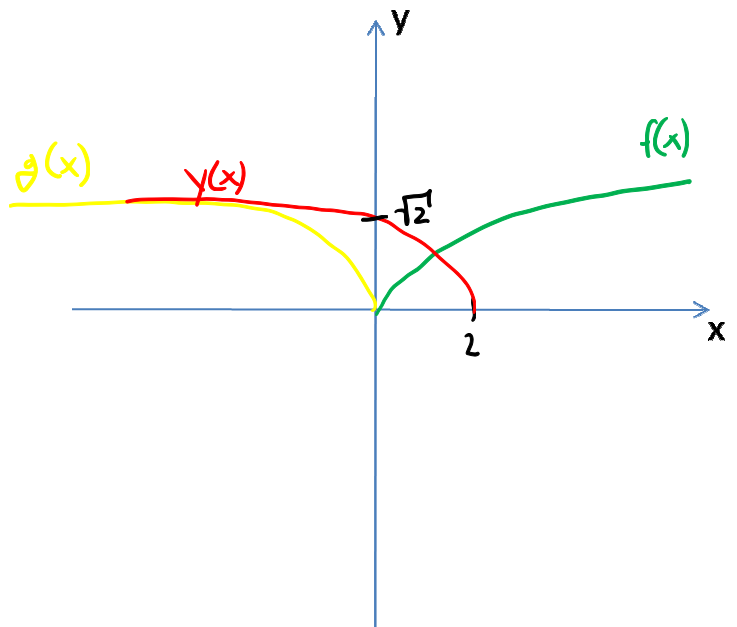
$$g(x) = \sqrt{-x}$$

$$y(0) = \sqrt{-0+2} = \sqrt{2}$$

$$y(x) = (-x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-x+2}}$$



7.4. $y(x) = \ln(2-x)$

$$y(x) = \ln(-x+2)$$

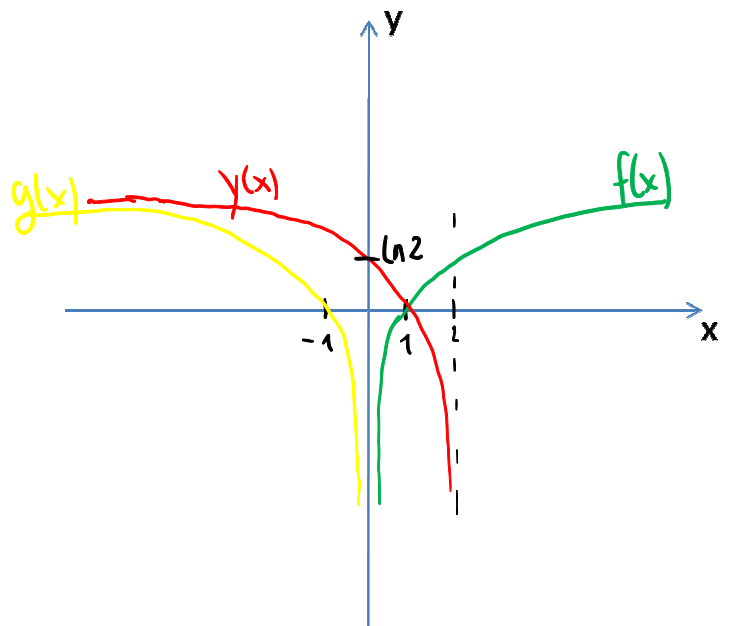
$$f(x) = \ln x$$

$$g(x) = \ln(-x)$$

$$y(0) = \ln(-0+2)$$

$$= \ln 2$$

$$y'(x) = \frac{1}{(-x+2)} \cdot (-1) = -\frac{1}{(-x+2)}$$



8. Stetigkeit

Hat die folgende Funktion eine Definitionslücke?

Wenn ja, lässt sich die Funktion an dieser Stelle stetig fortsetzen? Durch welchen Wert?

$$f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$$

Die Definitionslücke liegt bei $x = 2$.

Der Nenner darf nicht „Null“ werden.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2} 2+x = \underline{\underline{4}}$$

Die Funktion kann an der Stelle $x=2$ mit dem Wert 4 stetig fortgesetzt werden.