



Lernziel:

Sie verstehen die Besonderheiten bei der Berechnung von Vektoren und können diese durchführen.

1. Berechnen Sie den Transponierten Vektor

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \rightarrow \vec{a} = (1 \ 2 \ 3)$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 57 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}^T \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 & 57 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

b) $\vec{s} = -3 * \vec{a} \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{s} = \vec{a} - \vec{c} \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c} \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -5-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\vec{s} = \vec{a} \circ \vec{b} \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 * 4 + 2 * (-5) + 3 * 6 = 12$

f) $\vec{s} = \vec{c} \times \vec{a} \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 * 3 - (-2) * 2 \\ -2 * 1 - 4 * 3 \\ 4 * 2 - (-1) * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$

g) $\vec{s} = (\vec{c} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 8 * (-3) - 6 * 7 - 4 * 3 = -78$

h) $\vec{s} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}) \rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 * (-8) - 9 * 4 \\ 9 * 0 - 5 * (-8) \\ 5 * 4 - (-3) * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$



$$i) \vec{s} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \quad \rightarrow \vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 128$$

$$j) \vec{s} = -2\vec{b} + 5(\vec{b} \circ \vec{c})\vec{a} - (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\rightarrow \vec{s} = -2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + 5 \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 34 \\ 107 \\ 126 \end{pmatrix}$$

3. Stellen Sie fest ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig oder unabhängig sind.

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3) * (-2) * (-2) + 1 * (-5) * 7 + (-4) * 6 * 1 -$$

$$[7 * (-2) * (-4) + 1 * (-5) * (-3) + (-2) * 6 * 1] =$$

$$= -12 - 35 - 24 - [56 + 15 - 12] = -130$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 128$$

$$c) \vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 9 & -8 & 2 \\ 10 & -6 & 1 \\ 7 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 9(-6) \cdot 0 + (-8)1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \cdot 14 - [7(-6) \cdot 2 +$$

$$+ 14 \cdot 1 \cdot 9 + 0 \cdot 10 \cdot (-8)] =$$

$$= 0 - 56 + 280 - [84 + 126] = 14$$

$$d) \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

4. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-8}{\sqrt{94} \cdot \sqrt{6}} = -0,3368 \quad \alpha = 109,68^\circ$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{4^2+5^2+6^2}} = \frac{32}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} = 0,9746 \quad \alpha = 12,93^\circ$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2} \cdot \sqrt{10^2+20^2+30^2}} = \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{1400}} = 0,1428 \quad \alpha = 81,79^\circ$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-6)^2+0^2+9^2} \cdot \sqrt{0^2+(-8)^2+11^2}} = \frac{99}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{185}} = 0,6729 \quad \alpha = 47,71^\circ$$