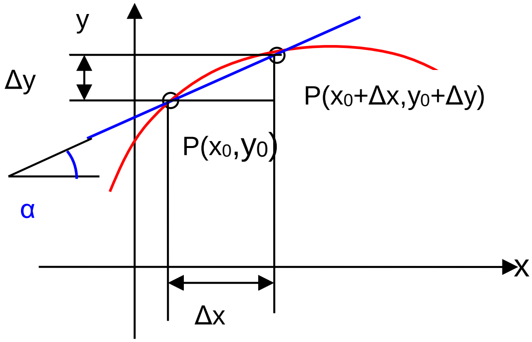
8 Differentialrechnung, die Ableitung von Funktionen

8.1 Das Tangentenproblem

Wenn man an einen Funktionsgraphen an einem bestimmten Punkt $P_0(x,y)$ eine exakte Tangente legen will, dann besteht das Problem, dass man zur Bestimmung der Geraden nur den Punkt kennt, durch den die Gerade hindurch gehen soll. Zur vollständigen Bestimmung der Geradengleichung benötigt man aber entweder einen zweiten Punkt oder die Steigung der Geraden.



Das Problem wird folgendermaßen gelöst:
Man wählt einen benachbarten Punkt $P(x+\Delta x,y+\Delta y)$ im kleinen Abstand Δx und berechnet den Tangens der Verbindungsgeraden der beiden Punkte. Anschließend führt man einen Grenzübergang durch, indem man für Δx eine Nullfolge einsetzt. Falls Δx gegen null geht, nähert sich der Winkel der Verbindungsgeraden immer mehr der Richtung der Tangente an, im Grenzfall erhält man die Richtung der exakten Tangente. Die Grenzwertbildung

bezeichnet man mit

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\mathit{Term}\text{, für den } \Delta x \text{ gegen null gehen soll }\right)$

Formelmäßig ausgedrückt, bildet man

$$\tan\alpha' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Die exakte Steigung erhält man durch den Grenzübergang:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Beispiel:
Gesucht ist die Tangente an die Parabel

$$y = 0{,}5 \cdot x^2$$

an der Stelle $x_0 = 2$. Eingesetzt, ergibt sich für $y_0 = 2$

$$\tan\alpha' = \frac{0.5 \cdot \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - 0.5 \cdot x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{0.5 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x + 0.5 \cdot \Delta x^2 - 0.5 \cdot x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0 \cdot \Delta x + 0.5 \cdot \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{x_0 + 0.5 \cdot \Delta x}{1}$$

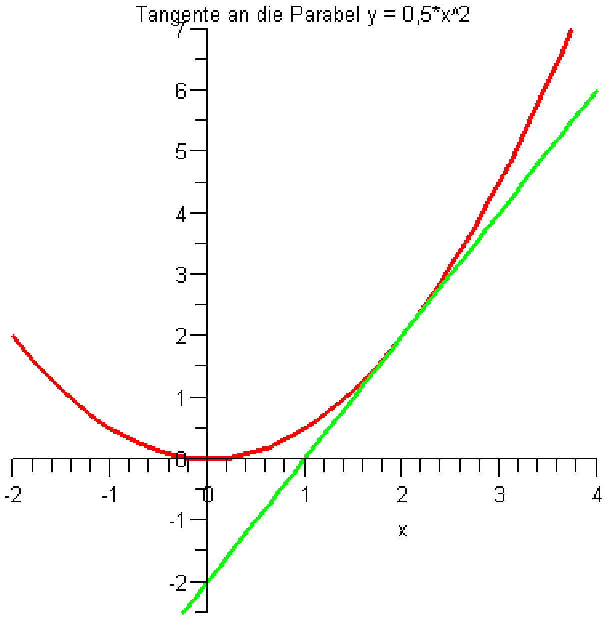
Setzt man für Δx eine Nullfolge ein, dann geht Δx gegen null und mit $x_0 = 2$ ergibt sich für den Tangentenanstiegswinkel:

$$m = \tan\alpha = 2$$

Die Geradengleichung ist dann:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan\alpha \qquad \frac{y - 2}{x - 2} = 2$$

$$y = 2 \cdot x - 2$$



Man kann das Problem verallgemeinern, indem man die Steigung der Tangente nicht für einen bestimmten Punkt berechnet, sondern die Stelle x variabel lässt.
Beispiel: Gesucht ist die Steigung an einer beliebigen Stelle für die Funktion

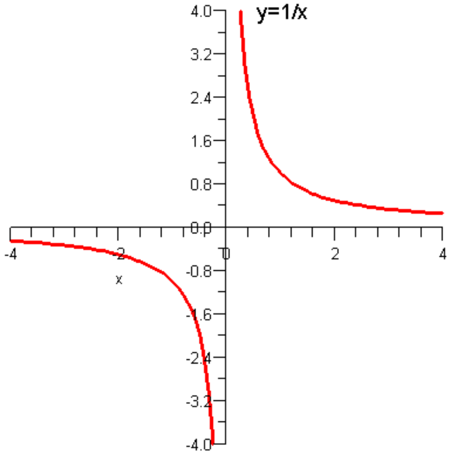
$$y = \frac{1}{x}$$

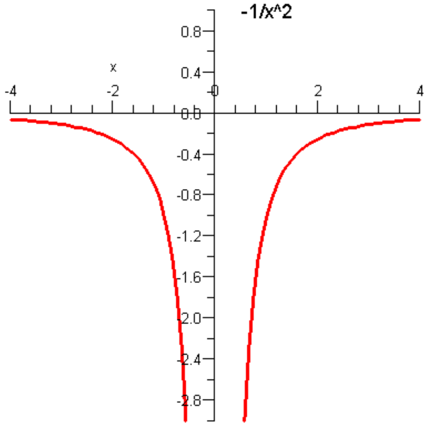
Man bildet wieder die Größe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und macht anschließend den Grenzübergang $\Delta x \to 0$

$$\frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x \cdot (x + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{x \cdot (x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

Man erhält also eine Funktion, die die Steigung an jeder Stelle x angibt für die Funktion $y = \frac{1}{x}$





Man nennt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ den Differenzenquotient

Den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nennt man die „Ableitung“ der Funktion f(x), bzw. den Vorgang der Limesbildung das „ableiten“ oder das „differenzieren“ der Funktion.

Den Ausdruck $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreibt man kürzer

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$ und nennt $f'(x)$

die „Ableitungsfunktion“.

8.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion nicht immer gewährleistet ist. An der Stelle x = 0 Hat die Ableitungsfunktion einen Pol, an dieser Stelle ist die Ableitung nicht definiert. Man kann zwar dem arctan α an dieser Stelle den Wert –π/2 zuweisen, jedoch gehört ein Pol einer Funktion nicht zu ihrem Definitionsbereich.

Man definiert deshalb:

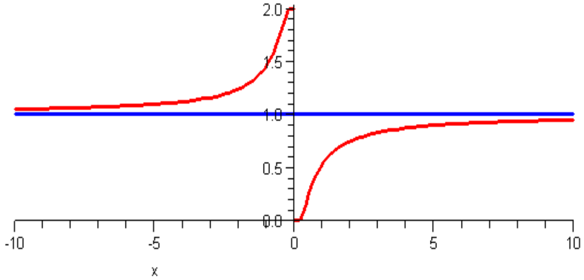
Eine Funktion y = f(x) ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn dort der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ *eindeutig existiert.*

An einer Polstelle kann man diesen Grenzwert nicht bilden.

Weiteres Beispiel:

Die früher erwähnte Funktion $y = \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ besitzt an der Stelle x = 0 eine Unstetigkeitsstelle.



Auch bei dieser Funktion kann man den Grenzwert bei x = 0 nicht bilden. Berechnet man f(x + Δx), dann erhält man ein Δy, das nicht gegen null geht. Man sagt, die Funktion ist an dieser Stelle unstetig. Man kann sich damit behelfen, dass man zwei Grenzwerte bildet, einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert

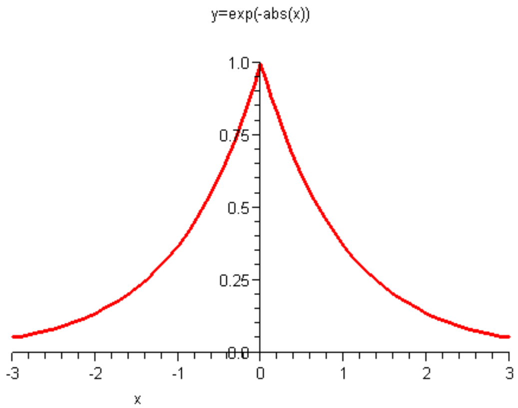
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Es ergeben sich im allgemeinen zwei verschiedene Grenzwerte, im obigen Fall sind beide sogar gleich 0. Das negative Vorzeichen im ersten Grenzwert muss deshalb gesetzt werden, weil hier die Differenz

Δx = (kleinerer x – Wert) – (größerer x – Wert) negativ ist.

Eine Funktion ist also an einer Stelle nicht differenzierbar, wenn sie unstetig ist.

Auch bei stetigen Funktionen kann eine nicht differenzierbare Stelle auftreten

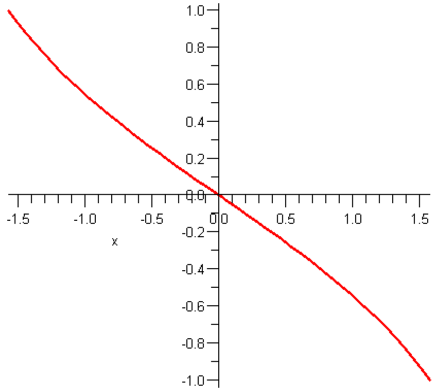


Die Funktion hat an der Stelle x = 0 einen Knick, die Tangentensteigung ist an dieser Stelle nicht eindeutig.

In einem dritten Fall kann eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar sein, nämlich wenn sie an einer Stelle x_0 einen unbestimmten Ausdruck annimmt.

Beispiel: $$y = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$$

An der Stelle x = 0 entsteht der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ damit ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert.



Durch eine später zu besprechende Methode kann man jedoch den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = 0$ bilden.

Man spricht hier von einer behebbaren Unstetigkeit, indem man für x = 0, y = 0 setzt. Damit kann man den Grenzwert und damit die Ableitung an der Stelle x = 0 bilden.

8.3 Formale Ableitungsregeln

An statt für jede gegebene Funktion die mühsame Bestimmung des Differenzenquotienten mit anschließender Limesbildung durchzuführen, ist es zweckmäßiger, für die verschiedenen

Funktionstypen Ableitungsregeln aufzustellen. Damit wird das Ableiten von Funktionen zu einem rezeptmäßig vorgegebenen Vorgang.

1 Ableitung einer Konstanten

$$y = a \qquad y' = 0$$

Die Funktion ist eine Gerade parallel zur x – Achse. Sie hat die Steigung 0 und zwar für beliebige Werte von x.

2 Ableitung einer Funktion mit einem konstanten Faktor

$$y = a \cdot f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x)$$

$$y = a \cdot f(x) \quad y' = a \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor vor einer Funktion bleibt beim Differenzieren unverändert.

3 Ableitung der Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten

$$y = x^n$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

Die Terme $\binom{n}{k}$ bedeuten die früher besprochenen Binomialkoeffizienten des Pascal´schen Dreiecks.

Speziell $\binom{n}{1} = n$.

x^n fällt heraus, der Bruch lässt sich somit durch Δx kürzen. Führt man den Grenzübergang mit $\Delta x \to 0$ durch, dann bleibt nur noch $n \cdot x^{n-1}$ übrig, somit ist:

$$y = x^n \qquad y' = n \cdot x^{n-1}$$

4 Ableitung der Summe mehrerer Funktionen

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

Man kann von jedem Summenglied den Differenzenquotienten bilden:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} + \ldots \right)$$

Nach den Regeln für Grenzwerte darf man von einer

Summe von Funktionen gliedweise die Grenzwerte bilden:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right) + \ldots$$

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots$$

Eine Summe von Funktionen wird gliedweise differenziert.

5 Die Ableitung eines Produkts mehrerer Funktionen

Zunächst wird die Regel für das Produkt von zwei Funktionen abgeleitet:

y = f(x) soll sich darstellen lassen als Produkt der beiden Funktionen u(x) und v(x):

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

z.B. $y = x \cdot (1 - x^2)$

Der Differenzenquotient lautet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

Im Zähler wird der Ausdruck $u(x)\cdot v(x+\Delta x)$ addiert und wieder subtrahiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} +$$

$$\frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Man fasst die Terme nun folgendermaßen zusammen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x+\Delta x)\cdot \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x)\cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Bildet man den Limes $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, dann stehen auf der rechten Seite zwei Produkte von Funktionen. Nach den Regeln für Grenzwerte darf man von jedem Faktor den Limes bilden und die beiden Grenzwerte multiplizieren:

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} u(x) = u(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$$

Damit ergibt sich:

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

1. Beispiel:

gesucht ist die Ableitung von

$$y = x^2 \cdot \left(2 + x - x^3\right)$$

Man kann natürlich ausmultiplizieren und die Potenzregel anwenden. Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich:

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(2 + x - x^3\right) + x^2 \cdot \left(1 - 3 \cdot x^2\right)$$

2. Beispiel:

an welchen Stellen hat die Funktion

$$y = x^2 \cdot \left(x^2 - 1\right)$$

ein waagrechte Tangente?

waagrechte Tangente bedeutet, $\tan\alpha = y' = 0$

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(x^2 - 1\right) + x^2 \cdot \left(2 \cdot x\right) = 0$$

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(2 \cdot x^2 - 1\right) = 0$$

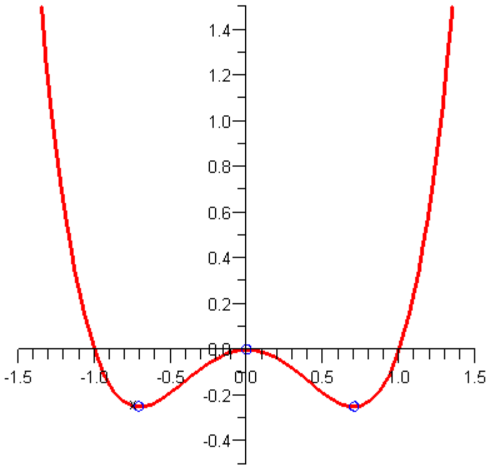
Jeder der beiden Faktoren kann null sein:

$$2\cdot x=0 \qquad x=0;\quad y=0$$

$$2\cdot x^2-1=0 \quad x^2-\frac{1}{2}=0;\quad \left(x+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=0$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_{2,3}=-\frac{1}{4}$$



Die Lösung lässt sich erweitern auf das Produkt von drei oder mehr Funktionen

$$y=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$$

Man fasst zunächst zwei Faktoren zu einer Funktion zusammen:

$$y=(u(x)\cdot v(x))\cdot w(x)$$

$$y'=\left(u(x)\cdot v(x)\right)'\cdot w(x)+\left(u(x)\cdot v(x)\right)\cdot w'(x)$$

anschließend wird die Klammer mit den zwei

Produkten differenziert:

$$y' = \left(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\right)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

in abgekürzter Schreibweise:

$$(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$$

Beispiel:

$$y = (x+1)^3 = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$$

$$y' = 1(x+1)\cdot(x+1) + (x+1)\cdot 1\cdot(x+1) + (x+1)\cdot(x+1)\cdot 1$$

$$y' = 3\cdot(x+1)^2$$

Wie später noch nachgewiesen wird, scheint die Potenzregel nicht nur bei Potenzen der Variablen, sondern auch bei zusammengesetzten Ausdrücken zu gelten.

6 Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Die abzuleitende Funktion hat die Form

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Der Ausdruck wird auf die Produktform gebracht:

$$u(x) = f(x)\cdot v(x)$$

Nun wird nach der Produktregel abgeleitet:

$$u'(x) = f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x)$$

Es wird nach $f'(x)$ aufgelöst:

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\cdot v'(x)}{v\ (x)}$$

$f\left(x\right)$ wird wieder durch den ursprünglichen

Ausdruck $\dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}$ ersetzt:

$$f'\left(x\right)=\frac{u'\left(x\right)-\dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}\cdot v'\left(x\right)}{v\left(x\right)}$$

Nach Erweiterung des Bruchs durch $v\left(x\right)$ ergibt sich die endgültige Formel:

$$f'\left(x\right)=\frac{u'\left(x\right)\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\cdot v'\left(x\right)}{v\left(x\right)^2}$$

in Kurzschreibweise:

$$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Beispiel 1:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{2\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Beispiel 2:

$$y=\frac{1}{x^n} \qquad y'=\frac{0\cdot x^n-1\cdot n\cdot x^{n-1}}{x^{2\cdot n}}=-n\cdot x^{n-1-2\cdot n}$$

$$y'=-n\cdot x^{-n-1}$$

Die Potenzregel gilt offensichtlich auch für negative Exponenten.

7 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

a.) $y = \sin(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

aus Formelsammlung:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x+x+\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x}$$

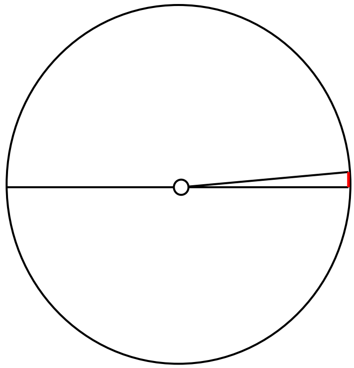
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x/2}$$

Bildet man nur den Limes für $\Delta x \to 0$, dann wird aus dem ersten Faktor: $\cos(x)$

Der Grenzwert des zweiten Faktors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x/2} = 1,$$

denn wie man dem Einheitskreis, der das Verhalten der trigonometrischen Funktionen beschreibt, entnehmen kann, unterscheidet sich der sin eines kleine Winkels kaum von der Bogenlänge des Winkels, so dass man setzen kann:



$\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \approx \frac{\Delta x}{2}$, so dass verbleibt:

$$y = \sin(x) \qquad y' = \cos(x)$$

b.) $y = \cos(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

Für $\cos\alpha - \cos\beta$ findet man in der Formelsammlung:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-2 \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Der Grenzwert des zweiten Faktors ist wieder gleich 1, so dass sich ergibt:

$$y = \cos(x) \qquad y' = -\sin(x)$$

Die tan – Funktion und die cot – Funktion werden nach der Quotienten Regel abgeleitet:

$$y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$y' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$y' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ebenso wird die cot – Funktion abgeleitet:

$$y = \cot(x) \qquad y' = -\left(1 + \cot^2(x)\right) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

8. Die Ableitung zusammengesetzter Funktionen, die Kettenregel

Bisher wurden Funktionen mit einfachem Argument abgeleitet, z.B. $y = x^n$, $y = \sin(x)$ usw.

Funktionen der Form $y = \left(x^2 - 3 \cdot x - 17\right)^4$

oder

$$y = \sin\left(3 \cdot x - \pi\right)$$

bezeichnet man als zusammengesetzte Funktionen. sin ist die äußere Funktion, $3 \cdot x + \pi$ die innere Funktion. Zwar lässt sich die Potenz oder die sin – Funktion für sich ableiten, aber die Behandlung der inneren Funktion ist noch offen.

Allgemein sagt man, die äußere Funktion ist eine Funktion der inneren Funktion. Setzt man z.B. den Ausdruck $3 \cdot x + \pi = u\left(x\right)$, dann ist

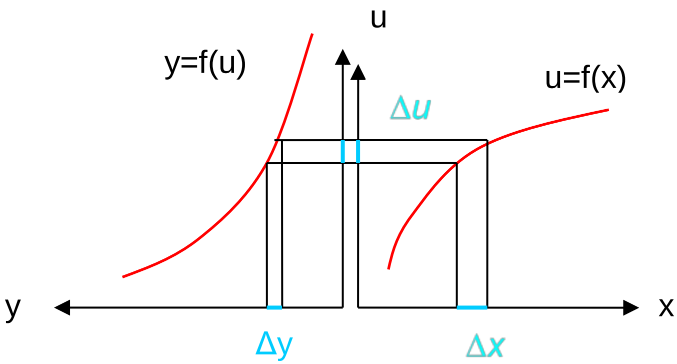
$$y = \sin\left(u\right)$$

$$u = 3 \cdot x - \pi$$

allgemein:

$$y = f\left(u\left(x\right)\right)$$

u ist also einmal unabhängige Variable, im zweiten Ausdruck abhängige Variable. Dies lässt sich in folgendem Graphen veranschaulichen:



Bildet man nun den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,
dann führt die Berechnung von Δx zunächst zur Berechnung von Δu, mit Δu kann man ein Δy berechnen. Macht man in den beiden Diagrammen Δu gleich groß, dann kann man den Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erweitern um Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Bei der Bildung des Limes kann man das Produkt der beiden Brüche getrennt behandeln und man erhält:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Die Ableitung kann man also so durchführen:

Man ersetzt die innere Funktion zunächst durch eine Variable, nach der die äußere Funktion abgeleitet wird. anschließend wird die innere Funktion nach x abgeleitet.

Beispiele:

$$y = \left(x^2 - 3 \cdot x - 12\right)^3$$

$$u(x) = x^2 - 3 \cdot x - 12$$

$$y = u^3$$

$$y' = 3 \cdot u^2 \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$= 3 \cdot \left(x^2 - 3 \cdot x - 12\right)^2 \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$y = \sin(2 \cdot x + \pi)$$

$$u(x) = 2 \cdot x + \pi$$

$$y = \sin(u)$$

$$y' = \cos(u) \cdot 2 = 2 \cdot \cos(2 \cdot x + \pi)$$

$$y = \tan\left(\frac{x}{x-4}\right) = \tan(u)$$

$$y' = \left(1+\tan^2 u\right)\cdot\frac{1\cdot(x-4)-x\cdot 1}{(x-4)^2}$$

$$y' = \left(1+\tan^2\left(\frac{x}{x-4}\right)\right)\cdot\frac{1\cdot(x-4)-x\cdot 1}{(x-4)^2}$$

Die Kettenregel lässt sich auf tiefer geschachtelte Funktionen erweitern:

Wenn eine Funktion gegeben ist:

$$y = f\left(u\left(v\left(w(x)\right)\right)\right),$$

dann ist die Ableitung:

$$y' = f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(w)\cdot w'(x)$$

Beispiel:

$$y = 3\cdot\cos^3\left(x^2-1\right)$$

$$y' = 3\cdot 3\cdot\cos^2\left(x^2-1\right)\cdot(-1)\cdot\sin\left(x^2-1\right)\cdot 2\cdot x$$

$$y' = -18\cdot\cos^2\left(x^2-1\right)\cdot\sin\left(x^2-1\right)\cdot x$$

9. Die Ableitung implizit gegebener Funktionen

Viele Funktionen lassen sich nicht oder nur schwer nach der abhängigen Variablen (hier meist y) auflösen.

Beispiel: $\cos(x) - y \cdot \sin(y) = 0$

Mit Hilfe der Kettenregel lassen sich auch solche Ausdrücke differenzieren. Dabei ist zu beachten, dass y noch eine Funktion von x ist, also alle Ausdrücke mit y noch nach der Kettenregel abzuleiten sind.

Obiges Beispiel:

$$\cos(x) - y \cdot \sin(y) = 0$$

Der zweite Term ist ein Produkt von zwei Funktionen und wird nach der Produktregel behandelt. Die Ableitung von y ist $1 \cdot y'$, die Ableitung von

$\sin y$ ist $\cos(y) \cdot y'$

$$-\sin(x) - 1 \cdot y' \cdot \sin(y) - y \cdot \cos(y) \cdot y' = 0$$

Die Funktion kann nach y' aufgelöst werden:

$$y' = -\frac{\sin x}{\sin y - y \cdot \cos y}$$

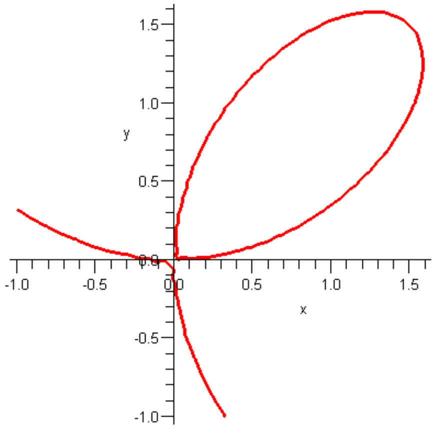
2. Beispiel kartesisches Blatt

$$x^3 + y^3 - 3 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$$

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3 \cdot a \cdot (y + x \cdot y') = 0$$

$$y' \cdot (3 \cdot y^2 - 3 \cdot a \cdot x) = 3 \cdot a \cdot y - 3 \cdot x^2$$

$$y' = \frac{3 \cdot a \cdot y - 3 \cdot x^2}{3 \cdot y^2 - 3 \cdot a \cdot x}$$



10. Potenzregel für rationale Exponenten

in $y = x^n$ soll n eine rationale Zahl der Form $\frac{p}{q}$ sein (p,q ganzzahlig),

also $y = x^{\frac{p}{q}}$ $y^q = x^p$

Es wird implizit abgeleitet:

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = p \cdot x^{p-1}$$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

Für y wird die ursprüngliche Funktion eingesetzt:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p\cdot(q-1))}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-\frac{p\cdot(q-1))}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p\cdot q-q-p\cdot q+p}{q}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Die Potenzregel ist somit auch für rationale Exponenten gültig.

Beispiele:

$$y = \sqrt[4]{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

Die Funktion lässt sich darstellen als:

$$y = \left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4} \cdot \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot 2 \cdot x = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$$

11 Die Ableitung der Bogenfunktionen

Wie die Graphen der Funktionen zeigen, erhält man bei den beiden Funktionen

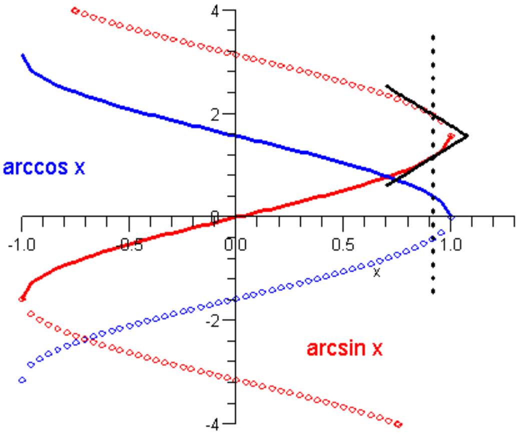
$$y = \arcsin(x) \quad \text{und} \quad y = \arccos(x)$$

keine eindeutigen Tangentenanstiegswinkel. Man muss man sich auf die Hauptwerte der Funktionen beschränken, bzw. verschiedene Lösungen für den Tangentenwinkel zulassen.

Nur bei

$$y = arc\tan(x) \quad \text{und} \quad y = arc\cot(x)$$

sind die Tangentenwinkel eindeutig.



Zur Berechnung der Ableitungen geht man von der ursprünglichen Definition der Umkehrfunktionen aus:

$$y = \arcsin(x); \qquad x = \sin(y)$$

es wird implizit differenziert:

$$1 = \cos(y) \cdot y' \qquad y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ebenso wird arccos (x) berechnet:

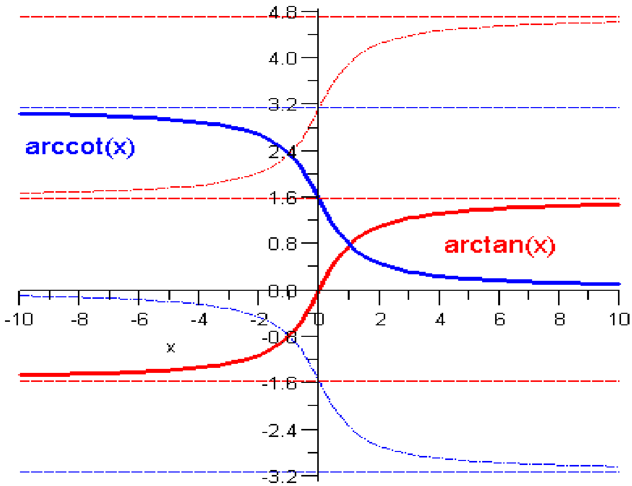
$y = \arccos(x) \qquad x = \cos(y)$

differenziert: $\qquad 1 = -\sin(y) \cdot y'$

$$y' = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$y = \arccos(x); \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

In der gleichen Weise werden die Funktionen
$y = \arctan(x)$ und $arc\cot(x)$ abgeleitet:



$y = \arctan(x) \qquad x = \tan(y)$

implizit differenziert: $\quad 1 = (1 + \tan^2 y) \cdot y'$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

ebenso: $y = arc\cot\left(x\right)$ $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Beispiele:

a. $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}$$

b. $y = \sqrt{1-\arcsin^2 x}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2 x}} \cdot \left(-2\right) \cdot \arcsin\left(x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = -\frac{\arcsin\left(x\right)}{\sqrt{1-\arcsin^2 x} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

12 Ableitung der Logarithmus – und Exponentialfunktion

a. $y = \log_a\left(x\right)$

Es wird der Differenzenquotient gebildet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x \cdot \dfrac{x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{1}{\dfrac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Wenn $\Delta x \to 0$ geht, dann geht $\dfrac{x}{\Delta x} \to \infty$, das Argument des Logarithmus hat also die Form:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Dieser Grenzwert ist die Zahl e.

Damit ist

$$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Falls also $\quad y = \ln(x) \quad$ ist $\; y' = \frac{1}{x}$

da $\log_e e = 1$ ist.

b. $\qquad y = a^x$

Die Funktion wird auf beiden Seiten logarithmiert (zweckmäßigerweise zur Basis e):

$$\ln y = x \cdot \ln a$$

implizite Ableitung:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \qquad y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$y' = a^x \cdot \ln a$ speziell für a = e:

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Die Ableitung der e – Funktion ist gleich der Funktion selbst.

Beispiele:

a.)

$$y = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \quad y' = \frac{1}{\frac{1}{1-x^2}} \cdot (-1) \cdot \left(1-x^2\right)^{-2} \cdot (-2 \cdot x)$$

$$y' = \frac{2 \cdot x}{1-x^2}$$

b.) $y = 2^{\cos(x)} \quad y' = 2^{\cos(x)} \cdot \ln 2 \cdot (-\sin(x))$

c.) Potenzfunktionen mit beliebig reellen Exponenten

$$y = x^r \quad \ln y = r \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = r \cdot \frac{1}{x} \qquad y' = r \cdot y \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^r \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

Die Potenzregel gilt auch für reelle Exponenten, wie z.B. bei $y = x^{\sqrt{2}}$; $y = x^{\ln 4}$; $y = x^{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

13 Logarithmisches Ableiten

Zur Ableitung der Exponentialfunktion wurde zunächst logarithmiert und anschließend die implizit gegebene Funktion abgeleitet. Diese Methode lässt sich allgemein auf Funktionen der Form

$$y = u(x)^{v(x)}$$

anwenden: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

in abgekürzter Schreibweise:

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln\left(u(x)\right) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$$

$$y' = u^{v} \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$$

$$y' = u^{v-1} \cdot \left(u \cdot v' \cdot \ln u + u' \cdot v \right)$$

Beispiele:

a. $y = x^{x}$

$$y' = x^{x-1} \cdot \left(x \cdot \ln x + x \right)$$

$$y' = x^{x} \cdot \left(\ln x + 1 \right)$$

b. $y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-1} \cdot \left(x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot \left(1 - \ln x \right) = x^{\frac{1-2\cdot x}{x}} \cdot \left(1 - \ln x \right)$$