7 Funktionen

7.1 Funktionsbegriff

Im Kapitel Analytische Geometrie wurde behandelt, wie man durch Gleichungen Beziehungen zwischen Punkten herstellen kann, die durch eine verbale Festlegung einer bestimmten Menge zugeordnet wurden:

„Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, für die gilt:……“

Ein Punkt ist ein Zahlenpaar, bei dem als erstes Element eine Zahl auf der x – Achse angegeben wird; das zweite Element ist die zugehörige Zahl auf der y – Achse, wobei diese mit Hilfe der Gleichung aus der ersten Zahl berechnet werden kann. Auch der umgekehrte Weg ist möglich: Man gibt eine Zahl auf der y – Achse vor und berechnet daraus den zugehörigen x – Wert.

Diese Vorgehensweise wird in der Mathematik verallgemeinert zum Begriff der Abbildung und der Funktion:

Eine Abbildung ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge von Dingen **M** zu denen einer anderen Menge **N**. Dabei ist zunächst nicht gefordert, dass die Abbildung eindeutig ist, d.h. dass zu jedem Element aus **M** nur ein Element aus **N** gehört. Deshalb schränkt man ein:

Eine Funktion ist eine Vorschrift, den Elementen einer Menge **M** die Elemente einer Menge **N** eindeutig zuzuordnen. Die Zuordnung soll eindeutig sein, d.h. zu einem Element der ersten Menge gehört nur ein ganz bestimmtes Element der zweiten Menge. Dabei ist der Funktionsbegriff keineswegs auf Zahlen beschränkt. Im folgenden sollen allerdings nur Mengen von Zahlen betrachtet werden.

Das Ergebnis einer Funktionsvorschrift ist also ein Zahlenpaar (x,y), wobei allerdings, abweichend von der geometrischen Deutung, unterschieden wird zwischen der Menge der Zahlen x, die als vorgegeben betrachtet wird und aus der über die Funktionsvorschrift die Zahl der Abbildungsmenge erst berechnet wird. Aus x wird also y berechnet: man nennt deshalb x die unabhängige Variable, y die abhängige Variable. Bei der geometrischen Deutung des Koordinatenpaares waren beide Zahlen völlig gleichberechtigt. Trotzdem kann man das aus der Funktionsvorschrift ermittelte Zahlenpaar wieder wie bei geometrischen Fragestellungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen, ohne Anspruch auf eine geometrische Deutung, und kann den daraus entstehenden Graphen als optische Veranschaulichung des Zusammenhangs der beiden Mengen auffassen. Dieses Verfahren ist vor allem auch deshalb gerechtfertigt, weil viele technische und betriebswirtschaftliche Zusammenhänge auf Funktionen führen, die geometrischen Figuren entsprechen:

Beispiele: Mohr’scher Spannungskreis (Kreis)

Hooke’sches Gesetz (Gerade)

Wärmeausdehnungsgesetz (Gerade)

Strömungswiderstand (Parabel)

Zusammenhang Dämpfungskraft - Federkraft (Ellipse)

Zusammenhang Druck – Volumen bei einem Gas bei einer isothermen Zustandsänderung (Hyperbel)

Für Funktionen haben sich folgende Ausdrucksweisen eingebürgert:

- Man nennt die Ausgangsmenge **M** das Urbild oder die Definitionsmenge, die Menge **N** das Abbild oder den Wertebereich.
- Wie bereits erwähnt, bezeichnet man die Elemente der Menge **M** mit dem Buchstaben x, die Elemente der Menge **N** mit dem Buchstaben y. Bei technischen Anwendungen treten an deren Stelle die Bezeichnungen der technischen Variablen, wie σ und τ für die Spannungen, θ für die Temperatur usw.
- Um den funktionalen Zusammenhang darzustellen, schreibt man abgekürzt meist

  $$y = f(x)$$

  wobei x ein Element der Ausgangsmenge ist, f die Abbildungsvorschrift symbolisiert (also i.a. eine Rechenvorschrift) und y das Bildelement oder Ergebnis der Abbildung.
  Eine etwas ausführlichere Darstellung ist

  $$x \rightarrow y = f(x)$$

  oder: $f := x \rightarrow \text{Rechenvorschrift}$

  Beispiele: $y = x^2 - 2 \cdot x - 17$

  $$s = f\left(t\right) = 3.5 \cdot e^{-0,25 \cdot t} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi_0\right)$$

  $$R = f(T) = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$$

- Vertauscht man in einer Funktionsvorschrift die beiden Variablen, z.B. in

$$y = f(x) = 0{,}5 \cdot x^2$$

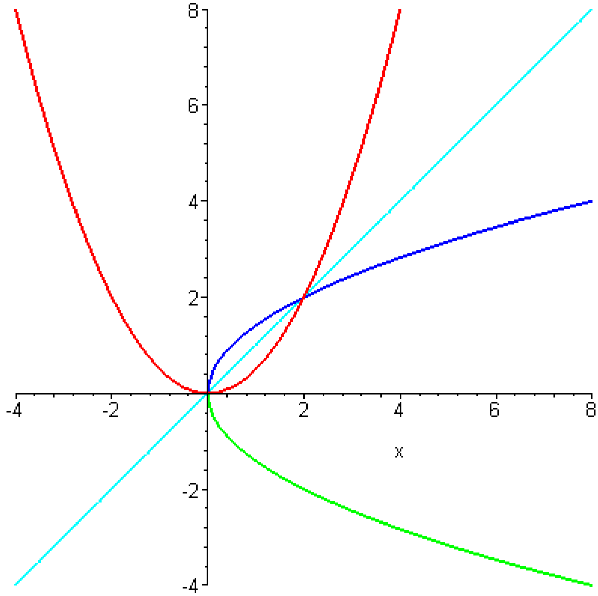
x und y , dann entsteht die Umkehrfunktion zu f(x).

Man schreibt dafür:

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{0{,}5}}$$

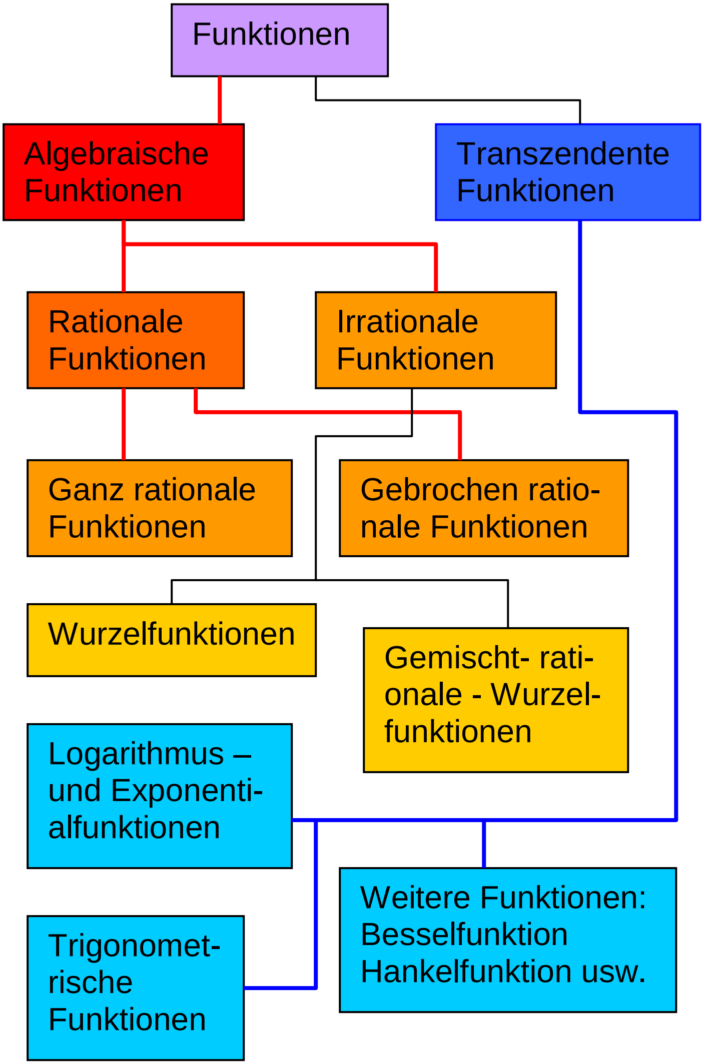
In der graphischen Abbildung bedeutet dies eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der Geraden y = x. Man hat dabei zu beachten, dass die eindeutige Umkehrung i.a. nicht möglich ist. Das bedeutet, man muss sich auf Teile der Funktion beschränken, die eine eindeutige Abbildung erlauben. Im obigen Beispiel entstehen in der Graphik zwei Kurvenzweige:

$$y = +\sqrt{\frac{x}{0{,}5}} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{\frac{x}{0{,}5}}$$



7.2 Funktionsarten

Die Funktionen lassen sich in folgende Kategorien einteilen:



- Algebraische Funktionen sind solche, in denen nur algebraische Verknüpfungen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Wurzelziehen vorkommen.
- Ganzrationale Funktionen sind im wesentlichen Polynome, also Funktionen ohne Division und Wurzelziehen.
- In gebrochen rationalen Funktionen kommen auch Brüche von Polynomen vor
- Irrationale Funktionen enthalten neben Polynomen und Polynombrüchen auch Wurzeln
- Transzendente Funktionen enthalten alle höheren Rechenoperationen, wie Potenzieren, Logarithmieren, aber auch trigonometrische Funktionen. Daneben gibt es Funktionen, die in der Ingenieurmathematik seltener vorkommen und die meist mit Hilfe von Reihen oder sog. Differentialgleichungen definiert werden.

7.3 Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind Polynome. Ihre Koeffizienten sind in den meisten Anwendungen reell.

$$y = P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Einzelne der Koeffizienten können auch null sein. Ist die höchste Potenz die Potenz n, dann spricht man von einem Polynom n. Ordnung oder n. Grades. Polynome haben folgende Eigenschaften:

- Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein Polynom n. Grades n Nullstellen, die auch teilweise zusammenfallen können (mehrfache Nullstellen) und komplex sein können.

- Hat ein Polynom nur reelle Koeffizienten, dann treten komplexe Nullstellen immer paarweise auf und sind paarweise zueinander konjugiert komplex. Ein Polynom, dessen höchste Potenz ungerade ist, hat deshalb immer mindestens eine reelle Nullstelle.
- Mit dem Hilfsmittel der Differenzialrechnung lässt sich nachweisen, dass ein Polynom n. Grades mit reellen Koeffizienten maximal n – 1 Maxima oder Minima und maximal n – 2 Wendepunkte hat.
- Ein Polynom n. Grades hat n + 1 Koeffizienten. Durch eine passende Wahl dieser Koeffizienten lassen sich Polynome an nahezu alle Kurvenverläufe anpassen, so dass man auch experimentell gewonnene Daten mit Hilfe von Polynomen formelmäßig darstellen kann. Außerdem kann man komplizierte Funktionen durch Polynome oft einfacher darstellen und handhaben.

<u>Hornerschema:</u>

Eine besonders häufige Aufgabe ist die Berechnung von Funktionswerten eines Polynoms. Setzt man nun x – Werte in das Polynom ein, dann entstehen bei den hohen Potenzen sehr schnell sehr große Zahlen und beim Addieren der folgenden Glieder entstehen Rundungsfehler. Es ist deshalb besser, das Potenzieren zu vermeiden und folgende Umformung vorzunehmen:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \\
&= \left(\left(\left(\left(a_n \cdot x + a_{n-1}\right) \cdot x + a_{n-2}\right) \cdot x + a_{n-3}\right) \ldots\right) \cdot x + a_0
\end{aligned}
$$

Diese Rechnung lässt sich auch in einer Tabelle ausführen

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_0
X_0		$a_n \cdot x_0$	1. Klammer$\cdot$ x	
	a_n	$(a_n \cdot x_0 + a_{n-1})$	1.Klammer$\cdot$x+a_{n-2}	Ergebnis

1. Klammer

Diese Tabelle nennt man das Hornerschema.

Beispiel:

Der Wert des Polynoms

$$P(x) = x^5 - 2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + x - 12$$

an der Stelle x = -2 soll berechnet werden:

	1	-2	+5	-7	1	-12
-2		-2	8	-26	66	-134
	1	-4	13	--33	67	-146

Die Berechnung erfolgt in folgenden Schritten:

- Der erste Koeffizient wird in die letzte Zeile übernommen.
- Der Wert in der letzten Zeile wird mit x_0 multipliziert und das Ergebnis in die zweite Zeile, nächste Spalte eingetragen
- Der letzte Wert der zweiten Zeile wird zum Wert in der Kopfzeile addiert und in die letzte Zeile eingetragen.

- Die Rechenschritte werden so lange fortgesetzt, bis in der letzten Spalte das Ergebnis erscheint.

Es ist zu beachten, dass in der Tabelle auch die Spalten aufgeführt sein müssen, deren Koeffizient gleich null ist, d.h. wenn eine Potenz fehlt.

Beispiel:

$$P(x) = x^5 - x^3 + 1$$

Gesucht ist der Wert des Polynoms an der Stelle
x = 1,5

	1	0	-1	0	0	1
3/2		3/2	9/4	15/8	45/16	135/32
	1	3/2	5/4	15/8	45/16	167/32

Die Tabellen zeigen eine weitere interessante Eigenschaft dieses Schemas:

Dividiert man das Polynom durch (x-x_0), dann stehen die Koeffizienten des Restpolynoms in der letzten Zeile des Hornerschemas, denn:

Dividiert man das Polynom durch (x – x_0), dann geht die Division i.a. nicht auf, sondern es bleibt ein Rest:

$$P_n(x):(x-x_0) = P_{n-1}(x)\cdot(x-x_0) + b_0$$

Setzt man nun $x = x_0$ ein, wie es beim Hornerschema geschieht, dann ergibt sich als Wert in der letzten Zeile, letzte Spalte der Polynomwert an der Stelle x_0, der gleichzeitig der Divisionsrest ist. Man kann also vermuten, dass die Zahlen in der letzten Zeile gerade die Koeffizienten des Restpolynoms sind. Der Nachweis ergibt sich, wenn man die Bildung der letzten Zeile des Hornerschemas mit einer Division vergleicht, die nach dem üblichen Verfahren durchgeführt wird.

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 : x - x_0 = a_n \cdot x^{n-1} + \underbrace{\left(a_{n-1} + a_n \cdot x_0\right)}_{b_{n-2}} \cdot x^{n-2} + \left(b_{n-2} \cdot x_0 + a_{n-2}\right) \cdot x^{n-3}$$

$$a_n \cdot x^n - a_n \cdot x^{n-1} \cdot x_0$$

$$\underline{\quad - \qquad\qquad + \qquad\qquad\qquad}$$

$$0 + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^{n-1} \cdot x_0$$

$$= x^{n-1} \cdot \underbrace{\left(a_{n-1} + a_n \cdot x_0\right)}_{b_{n-2}} + a_{n-2} \cdot x^{n-2}$$

$$b_{n-2} \cdot x^{n-1} - b_{n-2} \cdot x^{n-2} \cdot x_0$$

$$\underline{\quad - \qquad\qquad + \qquad\qquad\qquad}$$

$$x^{n-2} \cdot \left(b_{n-2} \cdot x_0 + a_{n-2}\right)$$

Die Koeffizienten des Ergebnispolynoms zeigen das Bildungsgesetz des Hornerschemas.

Setzt man im Hornerschema eine Nullstelle des Polynoms ein, dann ergibt sich der Rest null und im Restpolynom, das im Polynomgrad um eins erniedrigt ist, kann nach weiteren Nullstellen gesucht werden.

Beispiel:

Gesucht sind die Nullstellen des Polynoms:

$$P_5\left(x\right) = x^5 - 9 \cdot x^4 + 7 \cdot x^3 + 57 \cdot x^2 - 44 \cdot x - 84$$

Das konstante Glied enthält die Faktoren.

$$84 = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1$$

Falls das Polynom nur ganzzahlige Nullstellen hat, kommen diese Zahlen (positiv und negativ) als Lösungen in Frage. (Wurzelsatz von Vieta).

	1	-9	7	57	-44	-84
3		3	-18	-33	72	84
	1	-6	-11	24	28	0

x = 3 ist Lösung. Mit dem Restpolynom werden weitere Nullstellen gesucht:

Wegen des letzten Glieds des Restpolynoms wird eine Nullstelle bei x = 2 angenommen

	1	-6	-11	24	28
2		2	-8	-38	-28
	1	-4	-19	-14	0

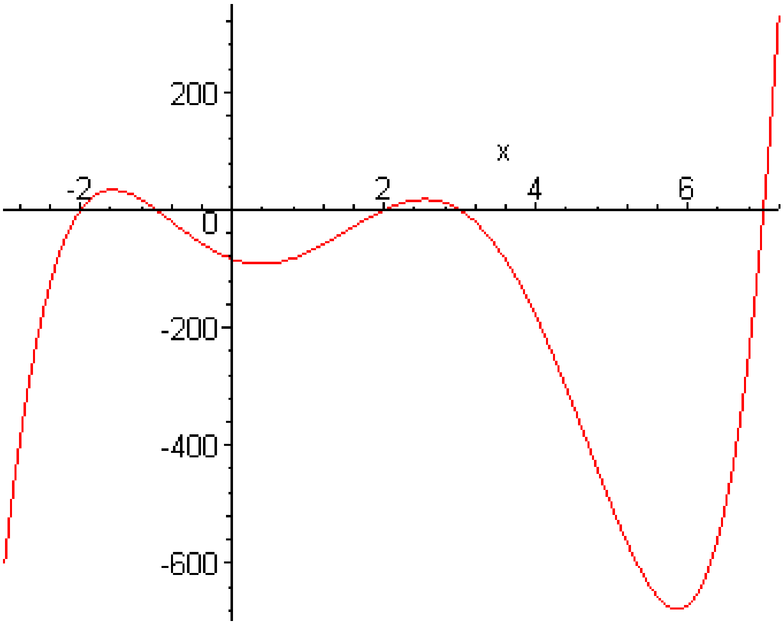
	1	-4	-19	-14
7		7	21	14
	1	3	2	0

Die restlichen Lösungen sind x = -2 und x = -1.

Damit lässt sich das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-3)$$

Der Graph zeigt die Nullstellen des Polynoms



Anwendungen von Polynomen:
Polynome lassen sich in der Technik sehr vielseitig anwenden, da sie durch passende Wahl der Koeffizienten leicht an verschiedene Kurvenverläufe anpassen lassen:
Beispiele:
Interpolation von einzelnen Punkten zur Berechnung von Zwischenwerten (Lagrange – Polynome oder Bezier – Splines)
Ausgleich fehlerbehafteter Messwerte durch sog. Ausgleichspolynome (Fehlerausgleich nach Gauss oder Tschebyschev)
Berechnung von transzendenten Funktionen durch Potenzreihen.

7.4 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen haben die Form:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei P(x) und Q(x) Polynome sind. Man nennt f(x) echt gebrochen rational, wenn der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms ist. Ist dies nicht der Fall, dann kann man durch eine Polynomdivision ein Polynom abspalten und man erhält einen echt gebrochen rationalen Restbruch.
Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4\cdot x + 15}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4\cdot x + 15}{x^2 - 2\cdot x + 1}$$

$$x^3 - 4\cdot x + 15 : x^2 - 2\cdot x + 1 = x + 2$$

$$x^3 - 2\cdot x^2 + x$$

$$2\cdot x^2 - 5\cdot x + 15$$

$$2\cdot x^2 - 4\cdot x + 2$$

$$-x + 13$$

$$\frac{x^3 - 4\cdot x + 15}{x^2 - 2\cdot x + 1} = x + 2 - \frac{x-13}{(x-1)^2}$$

Durch systematisches Vorgehen kann man das Verhalten von gebrochen rationale Funktionen leicht ermitteln. Zweckmäßig sind folgende Schritte, wobei die obige als Beispiel dient:

a) Nullstellen der Funktion.
Die Funktion ist dann null, wenn das Zählerpolynom null ist und das Nennerpolynom nicht gleichzeitig null ist.

$$x^3 - 4 \cdot x + 15 = 0$$

Durch Probieren mit dem Hornerschema erhält man die erste Nullstelle bei x = -3

	1	0	-4	15
-3		-3	9	-15
	1	-3	5	0

Restpolynom:

$$R(x) = x^2 - 3 \cdot x + 5$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5}}{2}$$

Es gibt keine weiteren reellen Nullstellen.

b) Pole der Funktion
Wenn der Nenner gleich null wird und der Zähler nicht gleichzeitig null, dann strebt die Funktion an dieser Stelle gegen unendlich.
Im Fall des Beispiels hat der Nenner bei x = 1 eine doppelte Nullstelle. In diesem Fall verhält sich die Funktion in der Umgebung des Pols symmetrisch, d.h. die Funktion strebt sowohl von links als auch von rechts in die gleiche Richtung. Im Fall einer einfachen Nullstelle oder einer Nullstelle ungerader Ordnung strebt die Funktion von beiden Seiten in umgekehrte Richtungen.

c) Symmetrieeigenschaften

Ob sich eine Funktion symmetrisch verhält, kann man dadurch feststellen, dass man x durch –x ersetzt und nachprüft, ob sich der Funktionswert und das Vorzeichen ändert.

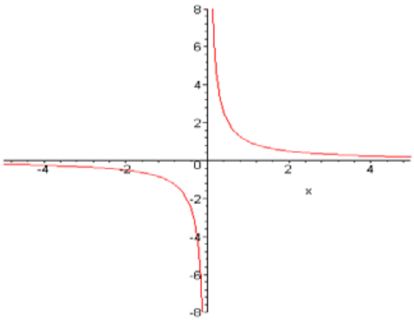
Falls $f(x) = f(-x)$ (es ändert sich weder der Funktionswert noch das Vorzeichen)

dann ist die Funktion symmetrisch zur y – Achse.

Falls $f(x) = -f(-x)$ (es ändert sich nur das Vorzeichen des Funktionswerts, nicht der Absolutbetrag),

dann ist die Funktion punktsymmetrisch. Man kann auch sagen: Jeder Punkt des Graphen in der positiven Halbebene mit der Abszisse x hat den gleichen Abstand vom Nullpunkt wie der entsprechende Punkt mit der Abszisse –x in der negativen Halbebene. Ein einfaches Beispiel ist die Funktion

$$y = \frac{1}{x}$$

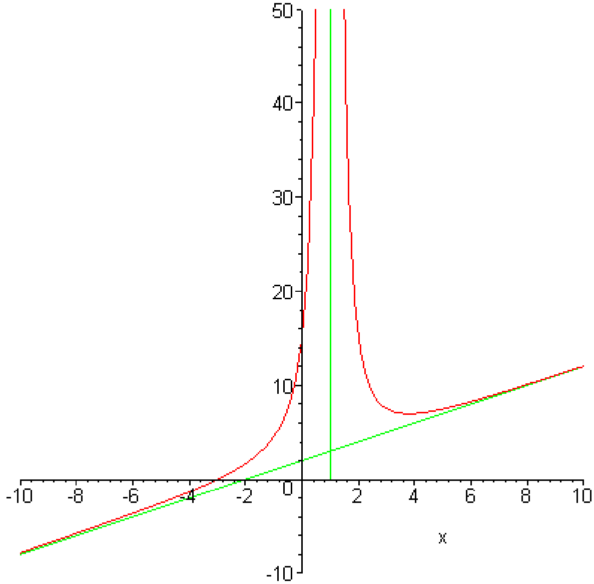


Bei der oben gegebenen Beispielfunktion ist keine Symmetrie erkennbar.

d) Verhalten für x $\rightarrow \pm\infty$
Das Verhalten der Funktion für große x hängt von den höchsten Potenzen des Zähler – und Nenner-polynoms ab.
Bei einer echt gebrochen rationalen Funktion ist der Polynomgrad des Nenners größer als der des Zählers, somit wächst für große x der Nenner stärker als der Zähler und die Funktion geht gegen null, sowohl für positive große Werte als auch für negative große Werte von x.
Ist der Polynomgrad des Zählers gleich dem des Nenners, dann kann man durch Polynomdivision eine Konstante abspalten. Wird x sehr groß, dann geht der echt gebrochene Teil der Funktion gegen null und die Funktion gegen den konstanten Wert.
Ist der Polynomgrad des Zählers größer als der des Nenners, dann kann man durch Polynomdivision ein Polynom abspalten und die Funktion schmiegt sich für große x immer mehr dem abgespaltenen Polynom an.
Im Beispiel wird die Funktion sich also immer mehr der Geraden $y = x + 2$ annähern, ohne sie exakt zu erreichen.

e) Wertebereich.
Zum Schluss der Untersuchung ist es zweckmäßig, die ganze Ebene in Bereiche einzuteilen, wobei die Bereichsgrenzen durch die Nullstellen und die Pole der Funktion gegeben sind, und zu prüfen, ob der Funktionsgraph oberhalb oder unterhalb der x – Achse verläuft.

f) Mit den Hilfsmitteln der Differenzialrechnung können noch Maxima, Minima und Wendepunkte der Funktion bestimmt werden. Im Beispiel ergibt sich ein Minimum an der Stelle P_M (3,769; 6,973) und kein Wendepunkt.



Weiteres Beispiel:

Es sollen die Eigenschaften und die graphische Darstellung der Funktion:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

ermittelt werden.

a) Nullstellen:

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1) = 0 \qquad x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

b) Pole der Funktion: Nenner wird nicht null; keine Pole

c) Symmetrieeigenschaften: f(x) = f(-x) Funktion ist symmetrisch zur y – Achse.

d) Verhalten für große x – Werte:
Für x → ±∞ sind die Konstanten +1; -1 im Zähler und im Nenner unwesentlich. Die Funktion strebt gegen 1. Dies ergibt sich auch bei einer Polynomdivision.

e) Wertebereich:
Der Nenner ist immer positiv, deshalb bestimmt der Zähler das Vorzeichen.
Für x < -1 und für x > +1 ist der Zähler positiv; im Bereich -1 < x < +1 ist der Zähler negativ

f) Maxima, Minima, Wendepunkte:

$$y' = \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = 0 \quad y' = \frac{2 \cdot x \cdot (2)}{\left(x^2 + 1\right)^2} = 0$$

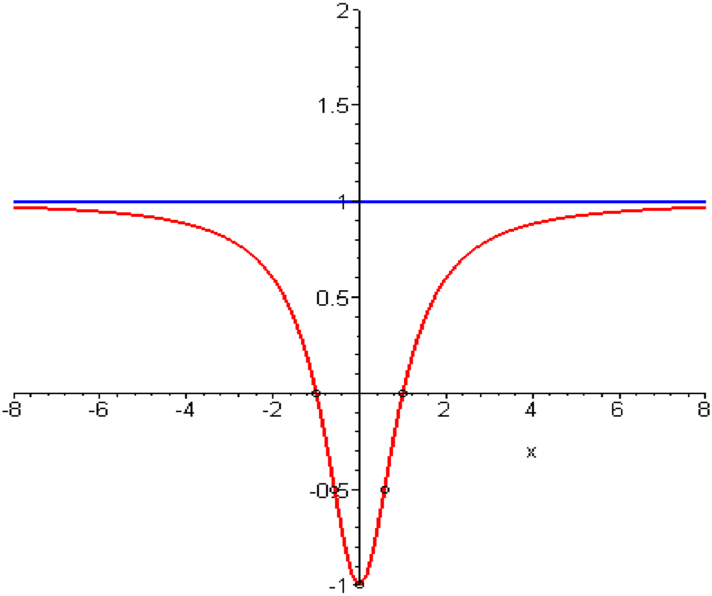
$$x = 0 \quad y = -1$$

$$y'' = \frac{4 \cdot \left(x^2 + 1\right)^2 - 4 \cdot x \cdot 2 \cdot \left(x^2 + 1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^4} = 0$$

$$4 \cdot \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 + 1 - 4 \cdot x^2\right) = 0$$

Wendepunkte:

$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad y = -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$



7.5 Partialbruchzerlegung

Man kann eine gebrochen rationale Funktion so auffassen, als hätte man mehrere Brüche auf einen gemeinsamen Hauptnenner gebracht und den Bruch so weit wie möglich vereinfacht. Für manche Zwecke, z.B. um über eine gebrochen rationale Funktion zu integrieren, ist es zweckmäßig, diesen Vorgang rückgängig zu machen, um einfache Teilintegrale zu erhalten, über die einfach integriert werden kann. Zu dem Zweck werden die Nullstellen des Nenners aufgesucht und der Nenner in Linearfaktoren zerlegt. Anschließend macht man einen Ansatz der Form:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots\ldots \equiv \text{ ursprünglicher Polynombruch}$$

Es handelt sich um eine Identität, d.h. das Gleichheitszeichen soll für alle Werte von x gelten.

Falls das Nennerpolynom komplexe Nullstellen hat, ist es besser, für die beiden konjugiert komplexen Nullstellen den Ansatz zu machen:

$$\frac{A\cdot x+B}{x^2+p\cdot x+q}$$

um komplexe Koeffizienten zu vermeiden.

Beispiel:

$$\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34}$$

Der Nenner hat zwei reelle Nullstellen und lässt sich folgendermaßen in Faktoren zerlegen:

$$x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34 \equiv (x+1)\cdot(x-2)\cdot\left((x-1)^2+16\right)$$

Man macht deshalb den Ansatz:

$$\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34} \equiv \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C\cdot x+D}{x^2-2\cdot x+17}$$

Wird mit dem Nenner multipliziert, entsteht folgende Identität:

$$x^2+5\cdot x-16\equiv A\cdot(x-2)\cdot(x^2-2\cdot x+17)$$
$$+B\cdot(x+1)\cdot(x^2-2\cdot x+17)$$
$$+(C\cdot x+D)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

Eine Identität gilt für jeden Wert von x; man darf also jeden beliebigen Wert einsetzen, z.B. die reellen Nullstellen:

x = 2: $\quad -2 = B\cdot 3\cdot 17 = 51 \qquad B=-\frac{2}{51}$

x = -1: $\quad -20 = A\cdot(-3)\cdot 20 \qquad A=\frac{1}{3}$

x = 0: $\quad -16=-34\cdot A+17\cdot B-2\cdot D \qquad D=2$

In einer Identität müssen außerdem die Koeffizienten bei jeder Potenz von x auf beiden Seiten gleich sein. z.B. bei x^3

$$0=A+B+C \qquad C=-A-B=-\frac{1}{3}+\frac{2}{51}$$

$$C=-\frac{5}{17}$$

Somit ist:

$$\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34}\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{2}{51}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{17}\frac{5\cdot x-34}{x^2-2\cdot x+17}$$

Sonderfall: Treten im Nenner mehrfache Nullstellen auf, d.h. erscheint ein Faktor im Nenner in einer Potenz, dann muss man bis zur höchsten Potenz alle Potenzen im Ansatz berücksichtigen.

Beispiel:

Der Polynombruch $\dfrac{2\cdot x^2-5\cdot x+2}{(x+1)\cdot(x-2)^2}$

soll in Partialbrüche zerlegt werden.

Ansatz:

$$\frac{2\cdot x^2-5\cdot x+4}{(x+1)\cdot(x-2)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$2\cdot x^2-5\cdot x+4\equiv A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x+1)\cdot(x-2)+C\cdot(x+1)$$

x = 2: $2=3\cdot C$ $\quad C=\dfrac{2}{3}$

x = -1 $11=9\cdot A$ $\quad A=\dfrac{11}{9}$

x = 0

$4=4\cdot A-2\cdot B+C$ $\quad 2\cdot B=\dfrac{44}{9}+\dfrac{2}{3}-4=\dfrac{14}{9}$ $\quad B=\dfrac{7}{9}$

Ergebnis:

$$\frac{2\cdot x^2-5\cdot x+4}{(x+1)\cdot(x-2)^2}\equiv\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$$

7.6 Wurzelfunktionen

Bei Wurzelfunktionen ist zu beachten, dass diese im allgemeinen einen beschränkten Definitionsbereich haben, da die Wurzel nur für positive Radikanden definiert ist. Falls der Wurzelexponent ungeradzahlig ist, kann man durch die Festlegung (Beispiel 3. Wurzel)

$y = \sqrt[3]{x}$ für x > 0 und

$y = -\sqrt[3]{-x}$ für x < 0

die Funktion für alle x definieren.

Beispiel:

$$y = \sqrt{x^4 - 2 \cdot x^2 - 12}$$

a) Nullstellen:

$$x^4 - 2 \cdot x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{13}} \quad x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{13}}$$

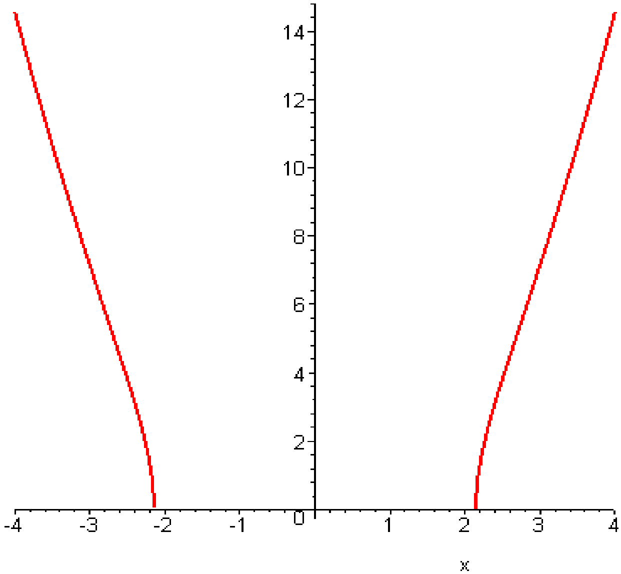
b) Pole: keine

c) Symmetrieeigenschaften: f(-x) = f(x)
symmetrisch zur y – Achse

d) Definitionsbereich:
definiert für $x < x_2$ und $x > x_1$

e) Wertebereich: y > 0

f) Verhalten für große x: Für x →±∞ geht y →+∞



7.7 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, deshalb können beide gemeinsam behandelt werden.

Die Exponentialfunktion lautet allgemein

$$y = a^x$$

Dabei ist die Funktion wegen der Regeln für das Rechnen mit Potenzen nur für positive a definiert.

Für den Bereich 0 < a < 1 kann man immer eine Zahl

b > 1 finden kann, für die gilt: $\quad a = \frac{1}{b}$

und somit $\quad y = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$

Damit kann man den Fall 0 < a < 1 auf die Exponentialfunktion mit negativen Exponenten zurückführen, die durch Spiegelung von a^x an der y – Achse hervorgeht.

Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = a^x$

a) Nullstellen: a^x kann nicht null werden. Die Funktion geht gegen null, wenn x →-∞ geht. Falls x sehr große positive Werte annimmt, wird y sehr groß und der Kehrwert $\frac{1}{a^x}$ sehr klein.

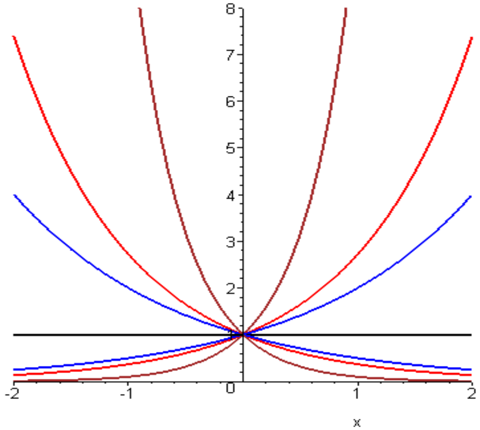
b) Pole: keine Pole

c) Symmetrie: keine Symmetrie

d) Verhalten für große x: a^x wächst sehr rasch gegen unendlich für große Werte von x.

e) Definitionsbereich: -∞< x < +∞

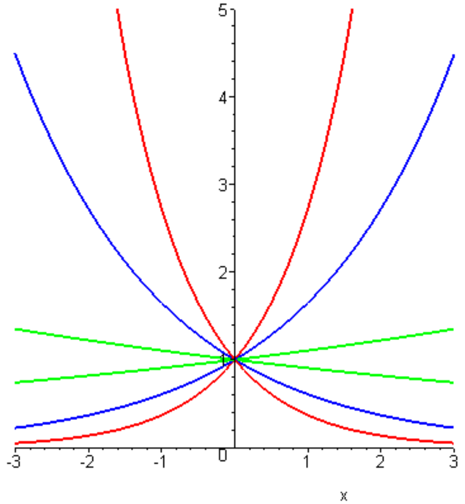
f) Wertebereich: y > 0



Die graphische Darstellung zeigt Exponentialfunktionen mit der Basis 0,1; 1/e; 0,5; 1; 2; e; 10;

Alle Graphen gehen durch den Punkt (0; 1), da $a^0 = 1$ für beliebige Werte von a > 0.

Eine besondere Bedeutung in der Anwendung hat die Exponentialfunktion mit der Basis e einschließlich ihrer Modifikationen. Im folgenden Graphen sind die Funktionen $e^{0.1 \cdot x}$; $e^{0.5 \cdot x}$; e^{x}; $e^{-0.1 \cdot x}$; $e^{-0.5 \cdot x}$; e^{-x} dargestellt:



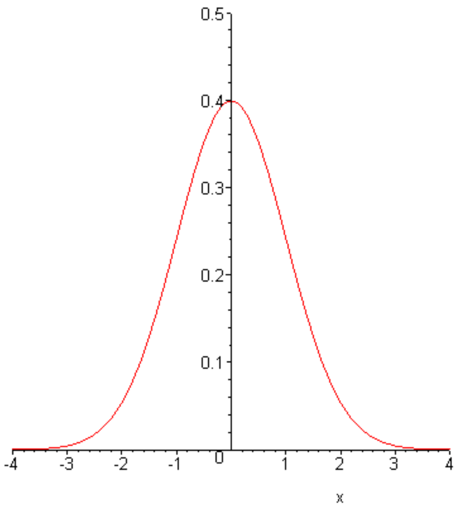
Das Aussehen der Kurven entspricht dem der Kurven mit variabler Basis. Dies rührt daher, dass man eine Exponentialfunktion mit Basis a in eine mit der Basis e umrechnen kann:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

In den Anwendungen kommen auch Exponentialfunktionen vor, in denen statt des Exponenten x eine Funktion von x steht, z.B.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese Funktion spielt in der Statistik eine wichtige Rolle. Sie ist symmetrisch zur y – Achse und geht für große x gegen null.

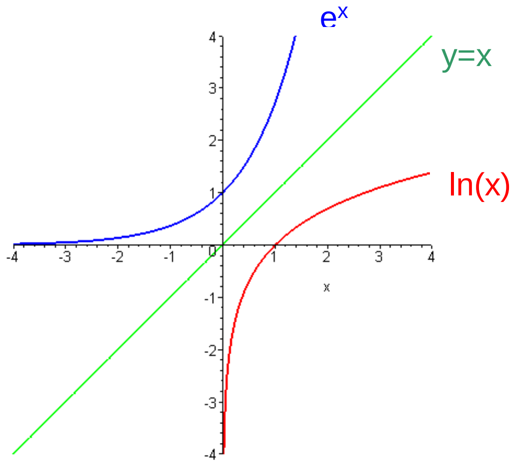


Man nennt sie die Gauß'sche Glockenkurve.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Da man auch die Logarithmen verschiedener Basen in die Basis e umrechnen kann, genügt es, die Funktion des natürlichen Logarithmus zu behandeln.

Umkehrfunktion heißt, die Originalfunktion wird an der Geraden y = x gespiegelt, bzw. in der Exponentialfunktion werden die beiden Variablen vertauscht und wieder nach y aufgelöst:

$$y = e^x \quad x = e^y \quad y = \ln x$$



Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

a) Nullstellen: bei x = 1

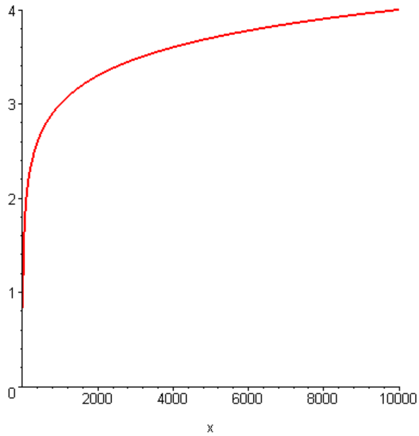
b) Pole: für x → +0 geht die Logarithmus-funktion gegen -∞

c) Symmetrie: keine

d) Definitionsbereich: x > 0

e) Verhalten für große x: für x →∞ geht auch y →∞ jedoch wächst die Logarithmusfunktion außerordentlich langsam. Man kann nachweisen, dass die Logarithmusfunktion langsamer wächst, als jede Potenz von x, d.h. als jedes Polynom, auch wenn die Koeffizienten noch so klein sind.

Der Graph zeigt die Funktion $y = \log_{10} x$. Bei x = 10000 ist y erst 4.



7.8 Trigonometrische Funktionen

Betrachtet man in den trigonometrischen Beziehungen den Winkel als eine Variable, die sich von -∞ bis +∞ ändern kann, dann erhält man eine Funktion

$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x \qquad y = \cot x$

Da sich die Werte der Winkelfunktionen sin x und cos x nach dem Winkel von 2·π, die von tan x und cot x nach dem Winkel von π wiederholen, erhält man periodische Funktionen mit folgenden weiteren Eigenschaften:

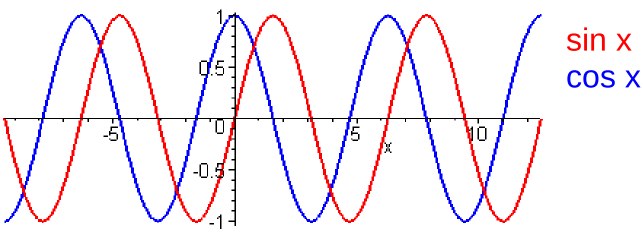
sin x: Nullstellen: x = 0 ±π

Symmetrieeigenschaften: sin(-x) = -sin(x)
Punktsymmetrie

Pole: keine

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

Wertebereich: $-1 \leq y \leq +1$



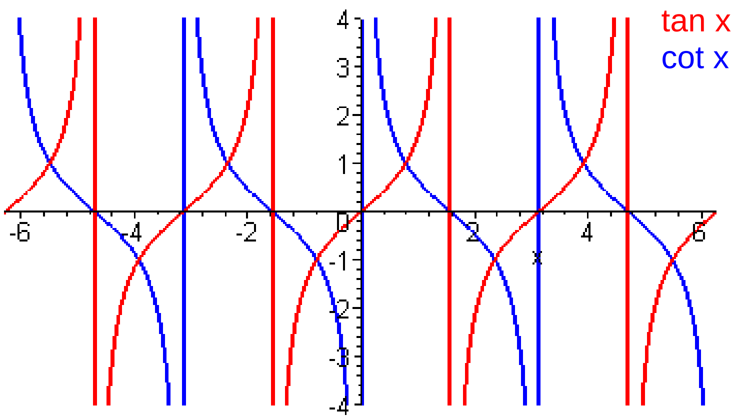
cos(x): Wegen $\cos x = \sin\left(x + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)$ ist die cos – Funktion lediglich die um $\frac{1}{2}\cdot\pi$ nach links verschobene sin – Funktion, hat also die gleichen Eigenschaften.

tan(x), Wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ hat die tan – Funktion Nullstellen, wenn sin x = 0 ist

und

Pole, wenn cos(x) 0 = ist. Die Funktion ist punktsymmetrisch.

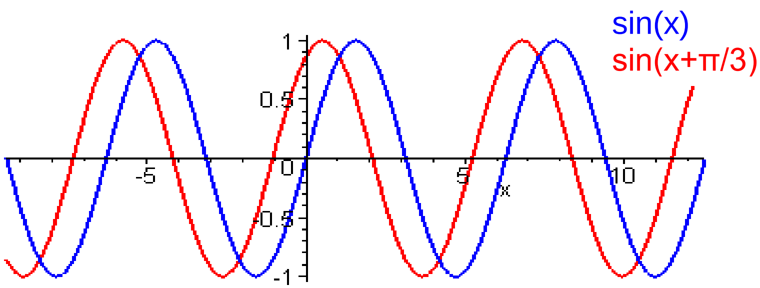
cot(x): Wegen $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ hat die Funktion Nullstellen, wenn cos x = 0 ist, und Pole, wenn sin x = 0 ist. Die Funktion ist punkt symmetrisch.



Ebenso wie bei den Kegelschnitten und allen anderen bisher besprochenen Funktionen kann man auch bei den trigonometrischen Funktionen Koordinatentransformationen durchführen. Ist z.B. bei x = 0 bereits ein Winkel vorhanden, dann addiert sich dieser Winkel zu allen x – Werten und die sin – Funktion nimmt die Form an:

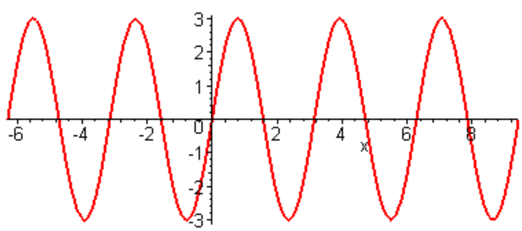
$$y = \sin\left(x + \varphi\right) \quad \text{z.B.} \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Letztere Funktion ist um $\frac{\pi}{3}$ nach links verschoben:



Tritt in den trigonometrischen Funktionen der Winkel mehrfach auf, dann verkleinert sich die Periodenlänge. Ein Faktor vor der sin- oder cos – Funktion vergrößert den Ausschlag:

Beispiel: $y = 3 \cdot \sin\left(2x\right)$

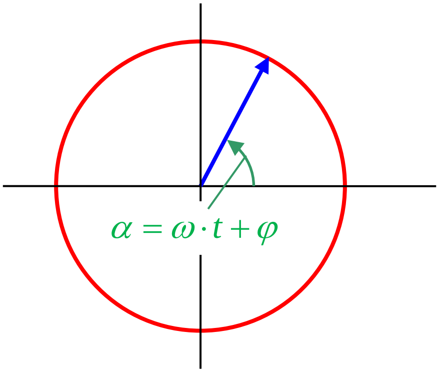


Technische Anwendungen:

Eine Schwingung ist ein periodischer Vorgang und wird i.a. durch eine sin- oder cos – Funktion beschrieben. Auch kompliziertere Schwingungsformen lassen sich durch eine Summe von sin- oder cos – Funktionen darstellen. Hierbei wächst der Winkel proportional zur Zeit. Der Schwingungsausschlag wird als Amplitude bezeichnet. Die allgemeine Form einer Schwingungsgleichung lautet:

$$y = \hat{x} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

Damit als Argument der sin – Funktion ein Winkel steht, muss die Größe ω die Dimension $\frac{Winkel}{Zeit}$ haben. Man bezeichnet diese Größe als Winkelgeschwindigkeit oder als Kreisfrequenz: Die Bezeichnung deutet darauf hin, dass man von der Vorstellung ausgeht, dass der Winkelpfeil im Einheitskreis mit einer bestimmten Geschwindigkeit umläuft. Der Winkel ist an sich eine dimensionslose Größe, somit hat ω die Dimension [1/s]



T ist die Schwingungsdauer und ist die Zeit, die für einen vollen Umlauf des Winkels, also für den Winkel 2π benötigt wird. Somit ist:

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$$

Man nennt T auch die Periodendauer der Schwingung.

$\omega \cdot t + \varphi$ heißt der Phasenwinkel der Schwingung, φ ist der sog. Nullphasenwinkel, also der Winkel, der zum Zeitpunkt t = 0 vorhanden ist.

Eine mechanische Schwingung lässt sich also folgendermaßen darstellen:

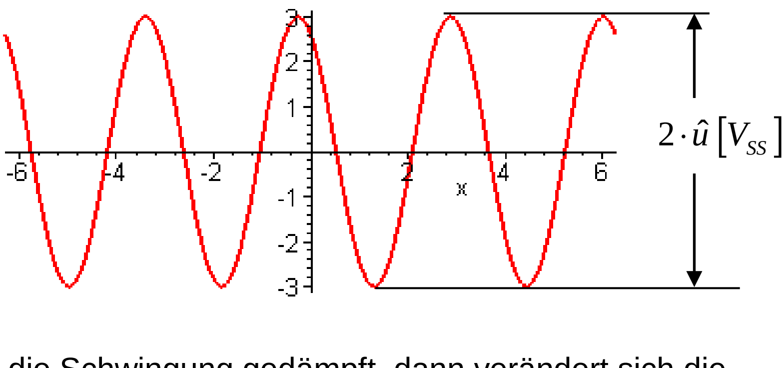
$$x = \hat{x} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

mit $\hat{x}$ = Schwingungsamplitude (in [m] oder [mm])

Eine elektrische Schwingung, z.B. eine periodisch sich verändernde Spannung wird dargestellt als:

$$u = \hat{u}\left[V\right] \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

Der Schwingungsausschlag ist die doppelte Amplitude:

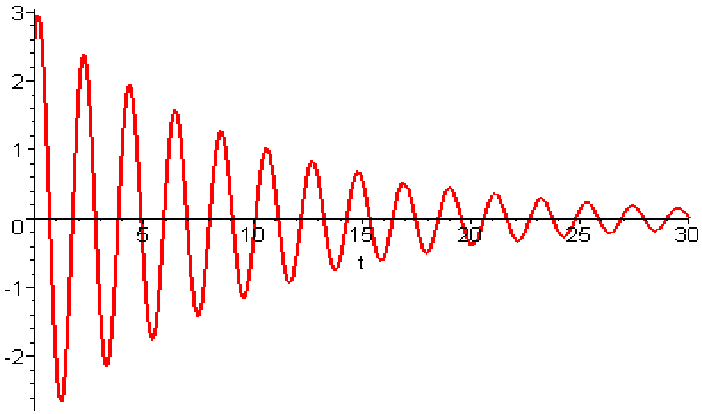


Ist die Schwingung gedämpft, dann verändert sich die Amplitude im Lauf der Zeit, sie ist eine Funktion der

Zeit. Bei einer viskos gedämpften Schwingung fällt die Amplitude nach einer Exponentialfunktion ab und sie lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$x = \hat{x} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit δ = Abklingkonstante [1/s]



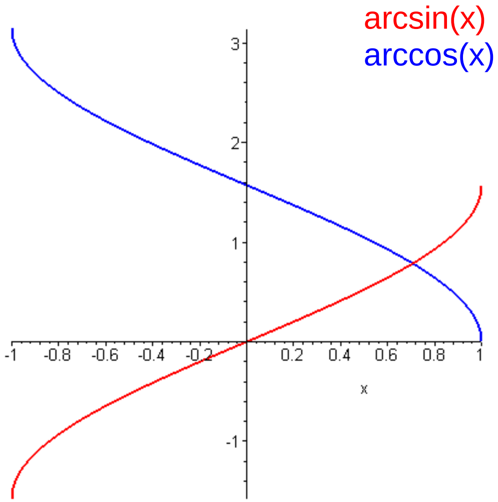
Oft wird bei Schwingungen die Schwingungsfrequenz f [1/s] angegeben, d.h. die Anzahl der Schwingungen/Sekunde. Dies bedeutet, dass die Winkelgeschwindigkeit 2π mal so groß ist, da mit einer Schwingung ein Winkel von 2π durchlaufen wird. Der Zusammenhang mit der Kreisfrequenz lautet somit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Bei der Frequenz von 50 Hz des europäischen Stromnetzes ist also $\omega = 50 \cdot 2\pi = 100 \cdot \pi = 314\,[1/s]$

Die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen sind die arc – Funktionen. Spiegelt man deren Graphen an der Geraden y = x, dann wird deutlich, dass zu einem bestimmten x – Wert unendlich viele y –

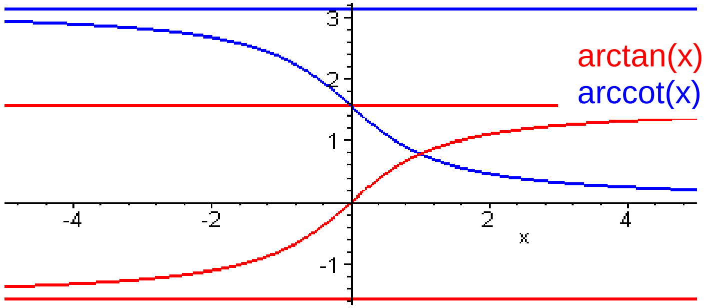
Werte gehören. Eine eindeutige Abbildung liefert nur der sog. Hauptwert der arc – Funktion. Das ist bei der arcsin – Funktion der Bereich $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$ und bei der cos – Funktion der Bereich $0 \leq y \leq \pi$. Man nennt einen Funktionswert in diesem Bereich den Hauptwert der Funktion. Dieser Wert wird i.a. von einem Taschenrechner berechnet



Das gleiche gilt für die Funktionen

y = arctan(x) und y = arccot(x)

Der Hauptwert wird dadurch bestimmt, dass nur eine Kurve der beiden Funktionen gespiegelt wird:


arctan(x)
arccot(x)
3
2
1
-1
-4
-2
2
4
x