



Lernziel:

Sie wissen, wann sich das Kleiner- bzw. Größer-Zeichen umdreht. Außerdem verstehen Sie wann sie eine Fallunterscheidung machen müssen, um Ungleichungen zu lösen.

1. Erarbeiten Sie mit Hilfe des Skripts (siehe Moodle), Literatur (Empfehlung: „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“, Lothar Papula) oder mithilfe von Lernvideos (siehe Moodle), ein Grundverständnis zum Lösen von Ungleichungen.
2. Es sind verschiedene Fälle gegeben. Entscheiden Sie ob das Kleiner- bzw. Größer-Zeichen umgedreht werden muss.

a) $x + 2 > 9 \quad | -2$
 $x > 7$

c) $-5x + 2 > 12 \quad | -2$
 $-5x > 10 \quad | : -5$
 $x < -2$

b) $x - 33 \leq 9 \quad | +33$
 $x \leq 42$

d) $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq -2 \quad | * -2$
 $x + 1 \leq 4$

3. Lösen Sie die folgenden Linearen Ungleichungen.

a) $-\frac{1}{2}(x - 6) < 6 \quad | * -2$
 $x - 6 > -12 \quad | +6$
 $x > -6$

b) $3(x - 3) \geq 5\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
 $3x - 9 \geq 5 - \frac{5x}{2} \quad | +9 \quad | + \frac{5x}{2}$
 $3x + \frac{5x}{2} \geq 14$
 $\frac{11x}{2} \geq 14 \quad | * \frac{2}{11}$
 $x \geq \frac{28}{11}$

c) $\frac{1}{2}(x - 5) > 0 \quad \rightarrow x > 5$

d) $2x + \frac{5}{2} < -(3 + 4x) - 3 \quad \rightarrow x < -\frac{17}{12}$

e) $\frac{x}{5} + 3 \geq \frac{x}{2} \quad \rightarrow x \leq 10$

f) $\frac{2x-3}{2} - \frac{1}{4}(3x-5) \leq -1 \quad \rightarrow x \leq -3$



4. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

a) $\frac{3}{x+4} < 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
Bedingung: $x + 4 < 0 \rightarrow x < -4 \quad \mathbb{L} = \{x | x < -4\}$

b) $\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2 \quad | -\frac{1}{3x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} > -2$
 $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6x} > -2$
Bedingung: $\frac{1}{6x} > -2 \rightarrow x < -\frac{1}{12}$ oder besser $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{12}\right\}$ bzw.
 $\mathbb{L} =] -\infty, -\frac{1}{12} [$

c) $\frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2(x-2)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Hauptnenner bilden: $\frac{2(3-x)}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)}$

Fall 1: $x > 2$ Nenner ist positiv

$$6 - 3x > x + 4$$

$$x < \frac{2}{3}$$

$$x > 2 \text{ und } x < \frac{2}{3} \rightarrow x \notin \mathbb{L}$$

Fall 2: $x < 2$ Nenner ist negativ

$$6 - 3x < x + 4$$

$$x > \frac{2}{3}$$

$$x < 2 \text{ und } x > \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$$

$$\rightarrow \mathbb{L} = \left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2\right\}$$

d) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

Fall 1: $x < -1$ Beide Nenner negativ

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{x+1} \geq 1 \quad x \leq x+1 \rightarrow 0 \leq 1 \text{ ist wahr} \rightarrow x < -1$$

Fall 2: $-1 < x < 0 \rightarrow x+1 > 0$ und $x < 0$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{x+1} \leq 1 \quad x \geq x+1 \rightarrow 0 \geq 1 \text{ ist falsch}$$

Fall 3: $x > 0 \rightarrow x+1 > 0$ und $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{x+1} \leq 1 \quad x \leq x+1 \rightarrow 0 \leq 1 \text{ ist wahr} \rightarrow x > 0$$

$$\rightarrow \mathbb{L} = \{x | x < -1 \text{ oder } x > 0\}$$

e) $\frac{3-2x}{5x+2} \leq 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

Fall 1: $x > -\frac{2}{5} \rightarrow 5x + 2 > 0$

$3 - 2x \leq 5x + 2 \rightarrow x \geq \frac{1}{7} \rightarrow x > -\frac{2}{5}$ und $x \geq \frac{1}{7} \rightarrow x \geq \frac{1}{7}$

Fall 2: $x < -\frac{2}{5} \rightarrow 5x + 2 < 0$

$3 - 2x \geq 5x + 2 \rightarrow x \leq \frac{1}{7} \rightarrow x < -\frac{2}{5}$ und $x \leq \frac{1}{7} \rightarrow x < -\frac{2}{5}$

$\rightarrow \mathbb{L} = \left\{x \mid x < -\frac{2}{5} \text{ oder } x \geq \frac{1}{7}\right\}$

f) $\frac{x-2}{x^2} \geq 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Für $x < 0$ und für $x > 0$ ist $x^2 > 0$, deshalb keine Fallunterscheidung nötig!

$\frac{x-2}{x^2} \geq 0 \rightarrow x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid x \geq 2\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsgleichungen.

a) $-2|x| \geq -7$

Fall 1: $-2 * x \geq -7 \rightarrow x \leq \frac{7}{2}$

Fall 2: $2 * x \geq -7 \rightarrow x \geq -\frac{7}{2}$

$\rightarrow \mathbb{L} = \left\{x \mid -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$

b) $\left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$

Fall 1: $x - \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2} \rightarrow x \leq 4$

Fall 2: $-x + \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2} \rightarrow x \geq 1$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$

c) $\left|3 - \frac{1}{4}x\right| > 2$

Fall 1: $3 - \frac{1}{4}x > 2 \rightarrow x < 4$

Fall 2: $-3 + \frac{1}{4}x > 2 \rightarrow x > 20$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid x < 4 \vee x > 20\}$

d) $4 - \left|\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{2}{3}$

Fall 1: $4 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \geq \frac{2}{3} \rightarrow x \leq 23$

Fall 2: $4 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} \geq \frac{2}{3} \rightarrow x \geq -17$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{x \mid -17 \leq x \leq 23\}$