

Vektorrechnung

Zu Abschnitt 2 und 3

1) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die skalaren Komponenten und die **Beträge** der aus ihnen gebildeten folgenden Vektoren:

a) $\vec{s}_1 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 3\vec{c}$ b) $\vec{s}_2 = -2(\vec{b} + 5\vec{c}) + 5(\vec{a} - 3\vec{b})$

c) $\vec{s}_3 = 4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 10\vec{c}$ d) $\vec{s}_4 = 3(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - 5(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

a)
$$\vec{s}_1 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 10 - 15 \\ 6 - 0 + 3 \\ -12 - 20 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{s}_1| = \sqrt{4^2 + 9^2 + 20^2} = 22,29$$

b)
$$\vec{s}_2 = -2(\vec{b} + 5\vec{c}) + 5(\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$= -2 \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + 5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -2 + 5 \cdot (-5) \\ 0 + 5 \cdot 1 \\ 4 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 - 3 \cdot (-2) \\ 2 - 3 \cdot 0 \\ -4 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154 \\ 30 \\ 78 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 30 \\ 123 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{s}_2| = \sqrt{\quad} =$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \vec{S}_2 &= -2(\vec{b} + 5\vec{c}) + 5 \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) \\
 &= -2\vec{b} - 10\vec{c} + 5\vec{a} - 15\vec{b} \\
 &= 5\vec{a} - 17\vec{b} - 10\vec{c} \\
 &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 17 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 + 34 + 50 \\ 10 - 0 - 10 \\ -20 - 68 - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 0 \\ -128 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{S}_2| = \sqrt{99^2 + 0^2 + (-128)^2} = 161,82$$

c,

$$\begin{aligned}
\vec{s}_3 &= 4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 10\vec{c} \\
&= 4\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + 10 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 4\begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot (-2) \\ 2 - 2 \cdot 0 \\ -4 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 8 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix} \\
|\vec{s}_3| &= \sqrt{(-22)^2 + 18^2 + (-8)^2} = \underline{29,53}
\end{aligned}$$

d,

$$\begin{aligned}
\vec{s}_4 &= 3 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} - 5(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} \\
(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -6 + 0 - 16 = \underline{-22} \\
(\vec{b} \cdot \vec{c}) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-5) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 10 + 0 + 16 = \underline{26} \\
\vec{s}_4 &= 3 \cdot (-22) \cdot \vec{c} - 5 \cdot 26 \cdot \vec{a} \\
&= -66 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 130 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \cdot (-5) \\ -66 \cdot 1 \\ -66 \cdot 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 130 \cdot 3 \\ 130 \cdot 2 \\ 130 \cdot (-4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} +330 - 390 \\ -66 - 260 \\ -264 + 520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -326 \\ 256 \end{pmatrix} \\
|\vec{s}_4| &= \sqrt{(-60)^2 + (-326)^2 + 256^2} = \underline{418,82}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{gegen}} &= - \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \right) \\
 &= - \left(\begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 85 \\ 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -50 \\ -40 \end{pmatrix} \right) \\
 &= - \begin{pmatrix} 200 - 10 + 40 - 30 \\ 110 + 30 + 85 - 50 \\ -50 - 40 + 120 - 40 \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} 200 \\ 175 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -175 \\ +10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3)

- 3) Berechnen Sie die Resultierende der in Bild II-75 skizzierten (ebenen) Kräfte nach Betrag und Richtung (Richtungswinkel α mit der x -Achse).

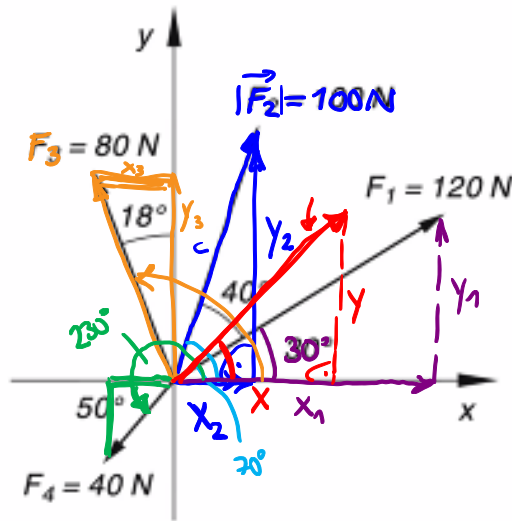


Bild II-75

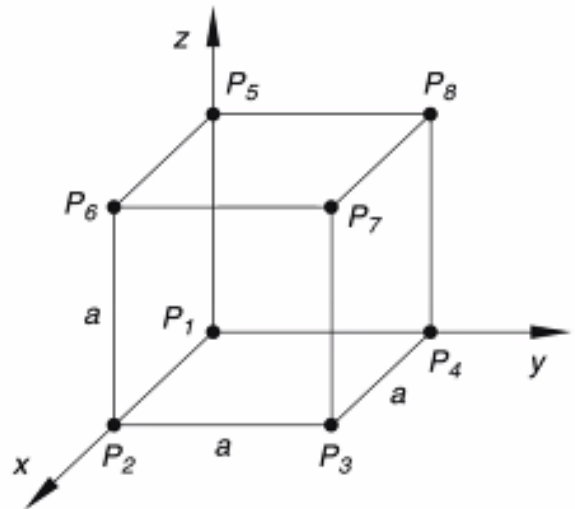


Bild II-76

$$\cos 70^\circ = \frac{x_2}{100\text{N}} \rightarrow x_2 = \cos 70^\circ \cdot 100\text{N}$$

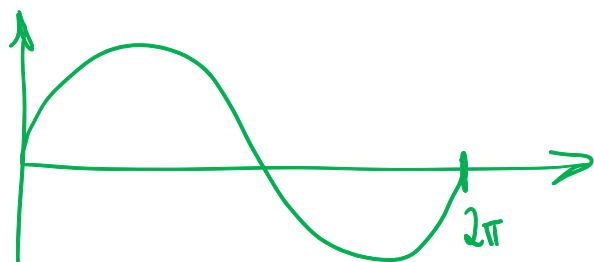
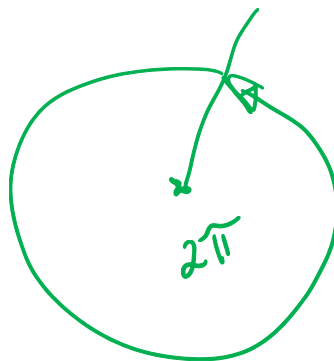
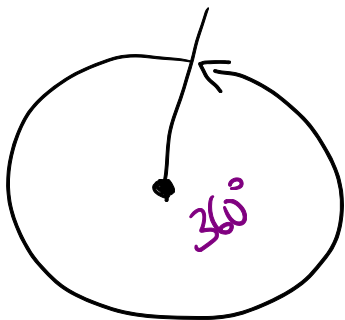
$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 70^\circ \cdot 100\text{N} \\ \sin 70^\circ \cdot 100\text{N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cdot 120\text{N} \\ \sin 30^\circ \cdot 120\text{N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} \sin(108^\circ) \cdot 80\text{N} \\ \cos(108^\circ) \cdot 80\text{N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_4 = \begin{pmatrix} \cos(230^\circ) \cdot 40\text{N} \\ \sin(230^\circ) \cdot 40\text{N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{\text{ges}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cdot 120\text{N} + \cos 70^\circ \cdot 100\text{N} + \sin(108^\circ) \cdot 80\text{N} + \cos(230^\circ) \cdot 40\text{N} \\ \sin 30^\circ \cdot 120\text{N} + \sin 70^\circ \cdot 100\text{N} + \cos(108^\circ) \cdot 80\text{N} + \sin(230^\circ) \cdot 40\text{N} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 188,5\text{N} \\ 98,61\text{N} \end{pmatrix} \quad |\vec{F}_{\text{ges}}| = 212,73\text{N} \quad \alpha? \rightarrow \tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 27,6^\circ
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 360^\circ &\hat{=} 2\pi \\ 180^\circ &\hat{=} \pi \\ 50^\circ &\hat{=} \end{aligned}$$

$$\frac{50^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi} \rightarrow \textcircled{x} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 50^\circ$$

$$\alpha_R = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_D$$

$$\alpha_R = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 50^\circ$$