<u>Mintensiv Basismathe – 2. Treffen</u>

Funktionen zeichnen!

https://www.aufgabenfuchs.de/mathematik/funktion/funktion.shtml

<u>Ganzrationale Funktionen</u>

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Merke

Ganzrationale Funktionen haben die Grundform: $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots$ $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$

Funktionen, bei denen $n=1$ ist, werden lineare Funktionen genannt und Funktionen, bei denen $n=2$ ist, heißen quadratische Funktionen.

Lineare Funktionen

$f(x) = ax^1 + bx^0 = ax + b \rightarrow n = 1$

Die Besonderheit von linearen Funktionen ist es, dass sie aus einer Gerade bestehen. Das bedeutet, dass die Steigung in jedem Punkt der Funktion gleich ist.

Merke

$f(x)=m \cdot x+n$

m: *Steigung*

n: *y−Achsenabschnitt*

x: unabhängige Variable

$f(x)=y$: abhängige Variable

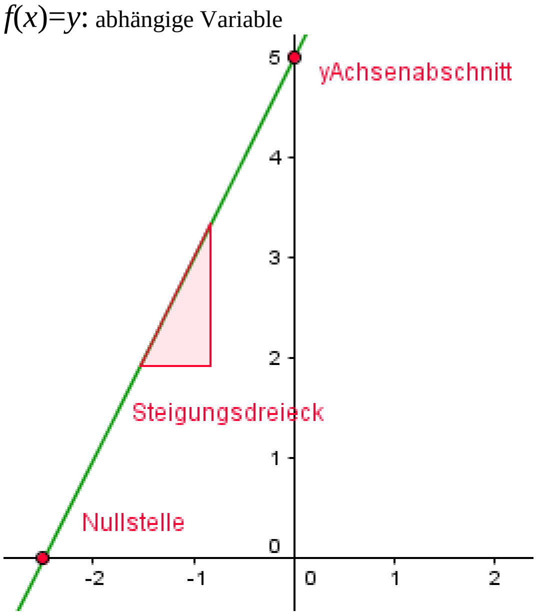


Abbildung einer linearen Funktion mit y-Achsenabschnitt, Nullstelle und Steigungsdreieck

<u>Quadratische Funktionen</u>

Bei quadratischen Funktionen wird das x zum Quadrat genommen: $\rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$ $\rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$

Es ergibt sich die Form einer **Parabel**:

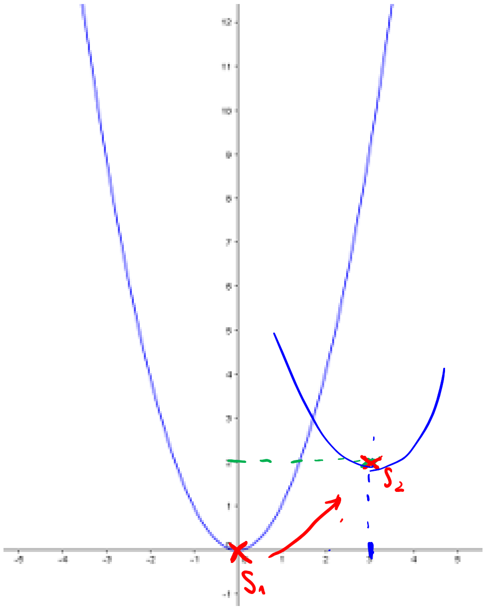


Abbildung: Normalparabel

Jedem y-Wert werden zwei x-Werte zugeordnet.
Quadratische Funktionen können sowohl in der Normalform als auch in der Scheitelpunktform angegeben sein:

Gut zu wissen

Normalform: $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Scheitelpunktform: $f(x)= a\cdot(x-d)^2+e$ $\rightarrow f(x) = a(x-d)^2+e$

Streckungsfaktor: ***a***

Scheitelpunkt: S **(*d*/*e*)**

Die beiden Formen kann man gegenseitig ineinander umformen.

$f(x) = 2(x-3)^2+2$

$S(3|2)$

Potenzfunktionen

Potenzfunktionen werden alle Funktionen genannt, bei denen die Variable einen Exponent hat.

Merke

$\boldsymbol{f(x)= a\cdot x^n} = ax^n$

Ja nachdem welche Zahl der Exponent ist, ergibt sich eine andere Funktion. Hierbei werden vier verschiedene Fälle unterschieden:

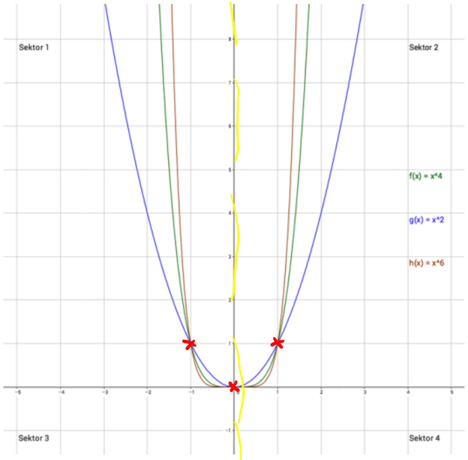
1. Fall: gerader, positiver Exponent

$n = 2, 4, 6, 8, \ldots$

Merke

Gerade und positive Exponenten

Die **Funktionen** besitzen immer die Punkte $P_1(-1|1)$, $S(0|0)$, $P_2(1|1)$.
Die **einzige Nullstelle** ist der Ursprung.
Der **Definitionsbereich** umfasst alle reellen Zahlen, also D = ℝ.
Der **Wertebereich** ist W = $\mathbb{R}^+$ [0; +∞]
Der Graph ist **achsensymmetrisch** zur Y-Achse.



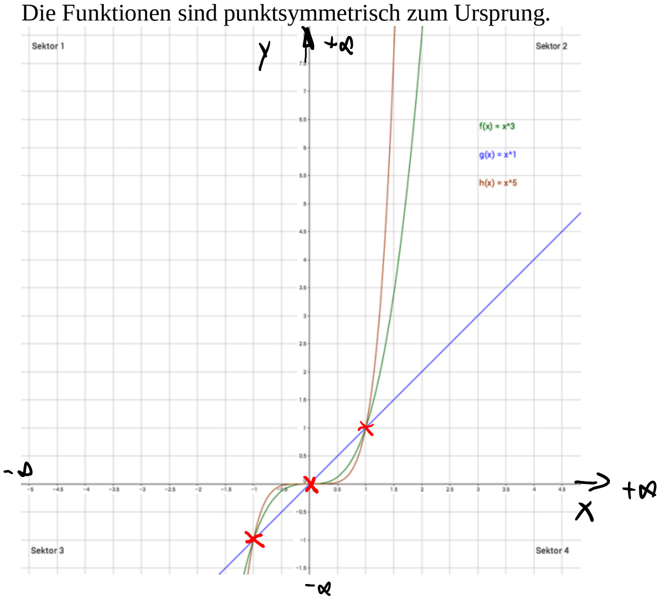
Potenzfunktionen Exponent gerade und positiv

2. Fall: ungerader, positiver Exponent

$n = 1; 3; 5; 7; \ldots$

$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Merke
Ungerade und positive Exponenten
Die **Grenzwerte** streben für x 0 +∞.
Die **Funktionen** treffen sich in den Punkten $P_1(-1|-1)$, $S(0|0)$, $P_2(1|1)$.
Die **einzige Nullstelle** ist der Ursprung.
Der **Definitionsbereich** und der Wertebereich sind D = W = ℝ.
Die Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

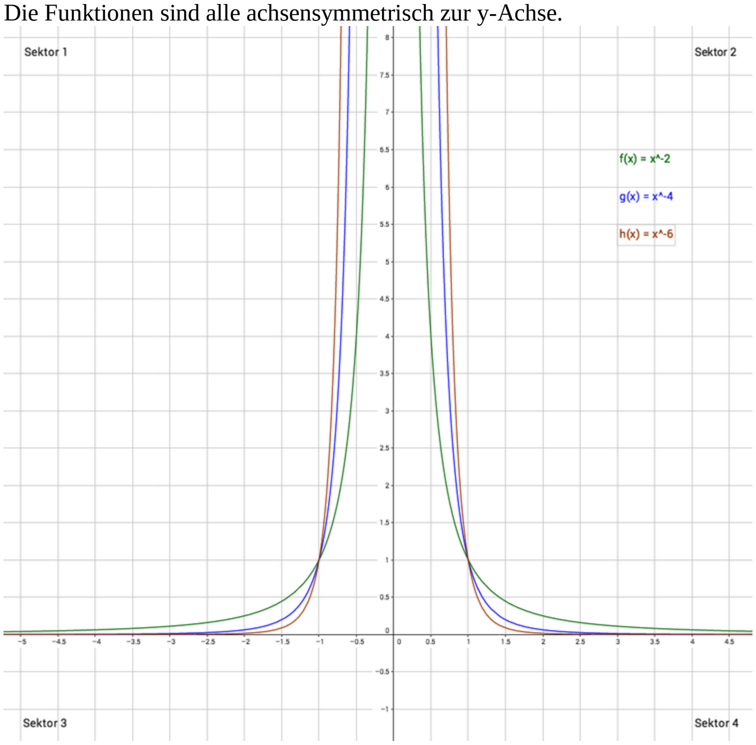


Potenzfunktionen Exponent ungerade und positiv

3. Fall: gerader, negativer Exponent

Merke
Gerader und negativer Exponent
Die **Grenzwerte** sind dann wie folgt:
Wenn x den Wert 0 anstrebt (der Wert geht also immer näher an die Zahl Null), streben die y-Werte +∞ an.
Wenn x den Wert -|+ ∞ anstrebt, streben die y-Werte 0 an.
Die Funktionen treffen sich in den Punkten $P_1(-1|1)$, $P_2(1|1)$.
Es gibt **keine Nullstelle**.
Der **Definitionsbereich** ist D = ℝ\{0}.

Der **Wertebereich** ist W =]0; +∞].
Die Funktionen sind alle achsensymmetrisch zur y-Achse.



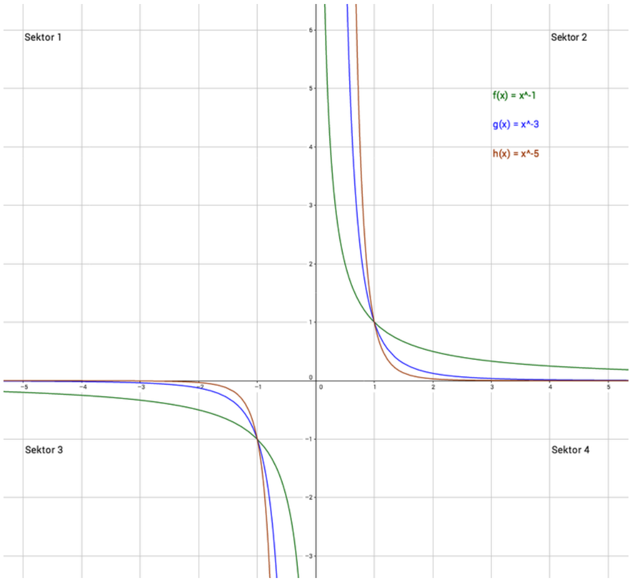
Potenzfunktionen gerade und negativ

4.Fall: ungerader, negativer Exponent

Merke

ungerade und negative Exponenten

Die **Grenzwerte** sind wie folgt:
Für x strebt gegen -|+ ∞, streben die y-Werte den Wert 0 an, somit ist die y-Achse eine Asymptote.
Für x strebt gegen 0, streben die y-Werte bei x 0 +∞.
Die **Funktionen** treffen sich in den Punkten $P_1(-1|-1)$, $P_2(1|1)$.
Es gibt **keine Nullstellen**.
Der **Definitionsbereich** und der **Wertebereich** sind D = W = ℝ\{0}.
Die Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Potenzfunktionen ungerade und negativ

Exponentialfunktionen

Bei Exponentialfunktionen steht die Variable im Exponenten.

Merke

$f(x)=n^x$

Exponentialfunktionen wachsen exponentiell an oder nehmen exponentiell ab. Das exponentielle Wachstum ist charakteristisch für Exponentialfunktionen. Wie du an der Abbildung sehen kannst, steigt die Funktion erst sehr langsam und dann sehr schnell an. Daher kommt auch die typische Form einer Exponentialfunktion:

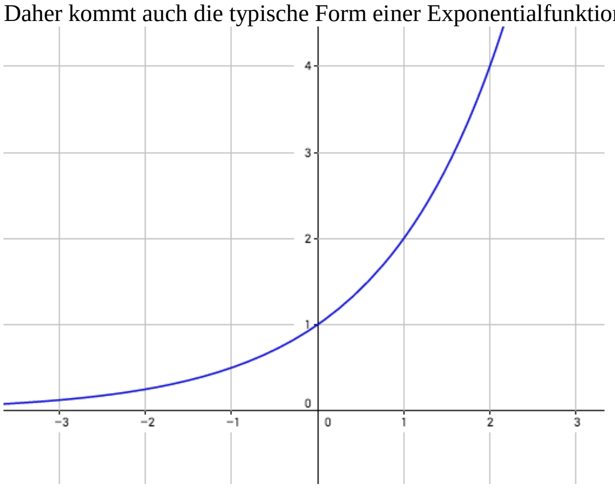


Abbildung: Exponentialfunktion $f(x)=2^x$

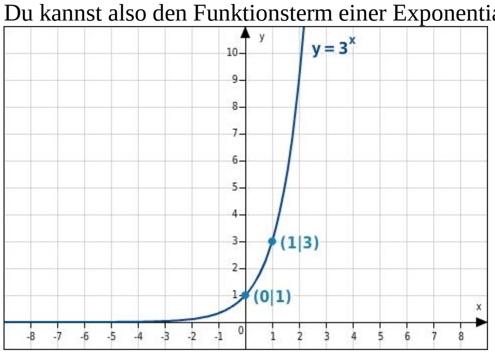
Allgemein bildet jede Exponentialfunktion eine Asymptote mit der x-Achse.
In der Mathematik bezeichnet man als Exponentialfunktion eine Funktion der Form x ↦ a x mit einer reellen Zahl a > 0 und a ≠ 1 als Basis (Grundzahl). In der gebräuchlichsten Form sind dabei für den Exponenten x {\displaystyle x} die reellen Zahlen zugelassen. Im Gegensatz zu den Potenzfunktionen, bei denen die Basis die unabhängige Größe (Variable) und der Exponent fest vorgegeben ist, ist bei Exponentialfunktionen der Exponent (auch Hochzahl) des Potenzausdrucks die Variable und die Basis fest vorgegeben. Darauf bezieht sich auch die Namensgebung. Exponentialfunktionen haben in den Naturwissenschaften, z. B. bei der mathematischen Beschreibung von Wachstumsvorgängen, eine herausragende Bedeutung (siehe exponentielles Wachstum).

Als die Exponentialfunktion im engeren Sinne (präziser eigentlich natürliche Exponentialfunktion) bezeichnet man die e-Funktion, also die Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl e = 2,718 281 828 459 … als Basis; gebräuchlich hierfür ist auch

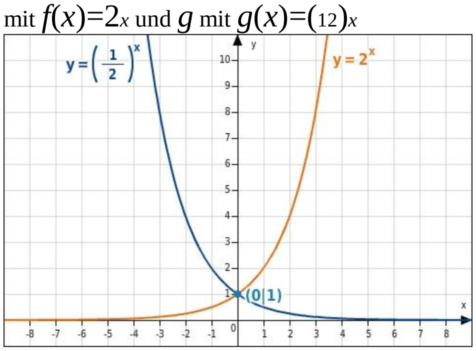
die Schreibweise x ↦ exp f_0 (x). Diese Funktion hat gegenüber den anderen Exponentialfunktionen besondere Eigenschaften. Unter Verwendung des natürlichen Logarithmus lässt sich jede Exponentialfunktion auf eine solche zur Basis e zurückführen. Deshalb befasst sich dieser Artikel im Wesentlichen mit der Exponentialfunktion zur Basis e {\displaystyle e} .
Bisweilen unterscheidet man im Deutschen auch zwischen exponentiellen Funktionen (allgemein) und der Exponentialfunktion (zur Basis e).

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Der Graph einer Exponentialfunktion $y=b^x$
mit b gt 0 , $b \neq 1$
enthält die Punkte 0 | 1 und 1 | b .
Du kannst also den Funktionsterm einer Exponentialfunktion schnell mit Hilfe des Graphen bestimmen.

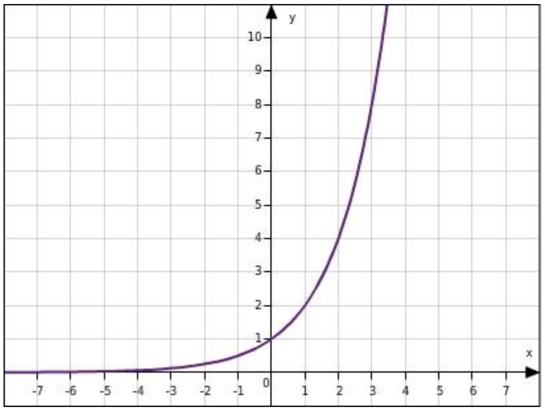


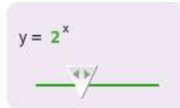
Der Graph enthält die Punkte 0 | 1 und 1 | 3 .Funktionsterm : $f(x)=3^x$
Der Definitionsbereich D
einer Exponentialfunktion ist ℝ, der kleinstmöglicheUnknown node type: a W ist 0 ; ∞ . Exponentialfunktionen haben also keine Unknown node type: a .
Die Funktionswerte nähern sich aber beliebig dicht der Null an. Die x-Achse bzw. die Gerade $y=0$ ist die waagerechte Unknown node type: a der Exponentialfunktion.
Exponentialfunktionen mit b gt 1 sind **monoton steigend**.Exponentialfunktionen mit 0lt$b$ lt 1 sind **monoton fallend**.
Die Graphen der Exponentialfunktionen $y=b^x$ und $y=(\frac{1}{b})^x=b^{-x}$
sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.
f
mit $f(x)=2^x$ und g mit $g(x)=(\frac{1}{2})^x$



Die allgemeine Exponentialfunktion

Du kennst die normale Exponentialfunktion mit $y=b^x$.





Durch die Verwendung von Parametern kannst du die Gleichung verändern, um z.B. verschiedene exponentielle Wachstumsvorgänge zu beschreiben oder zu modellieren.

Allgemein hat die Gleichung dann die Form: $y=a*b^x$

Der Parameter a wird auch Streckfaktor genannt, denn die Exponentialkurve der normalen Exponentialfunktion $y=b^x$ wird gestreckt a gt 1 oder gestaucht 0 lt a lt 1 .

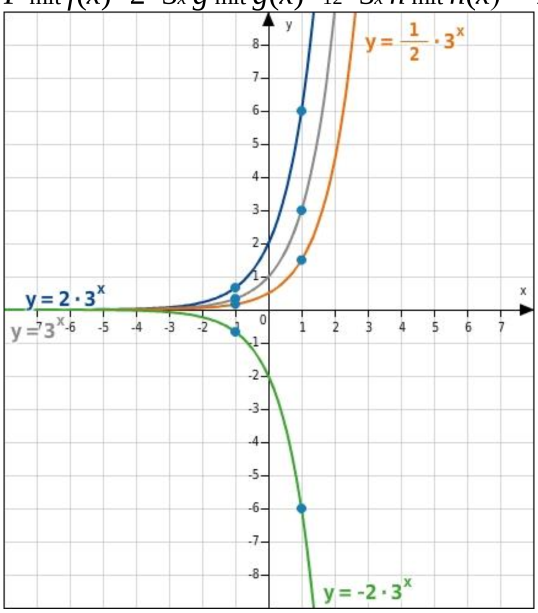
Ist a negativ, wird die Kurve zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.Die Graphen der allgemeinen Exponentialfunktionen enthalten die Punkte 0 | a und 1 | b * a .

Für a gt 0 ist der kleinstmögliche Wertebereich $W=]0;\infty[$, für a lt 0 ist $W=]-\infty;0[$.

Die Graphen haben also keine Nullstellen .

Die Funktionswerte nähern sich aber beliebig dicht der Null an. Die x-Achse bzw. die Gerade $y=0$ ist die waagerechte Asymptote der Exponentialfunktion.

F mit $f(x)=2*3^x$ g mit $g(x)=12*3^x$ h mit $h(x)=-2*3^x$



Verschiebung in y-Richtung

In der Funktionsgleichung $y=a*b^x+d$

bewirkt der Parameter d eine Verschiebung des Funktionsgraphen der allgemeinen Exponentialfunktion $y=a*b^x$ in y-Richtung.

Für d gt 0 erfolgt die Verschiebung nach oben, für d lt 0 nach unten.

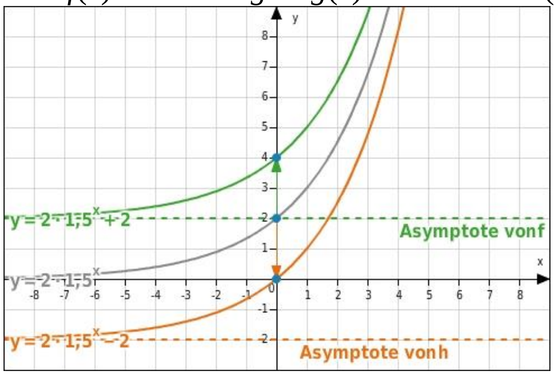
Durch die Verschiebung ändert sich im Fall a gt 0 der Wertebereich W zu d ; ∞ .

Die Asymptote wird verschoben nach $y=d$

.

Durch die Verschiebung nach unten kommt eine Nullstelle hinzu.

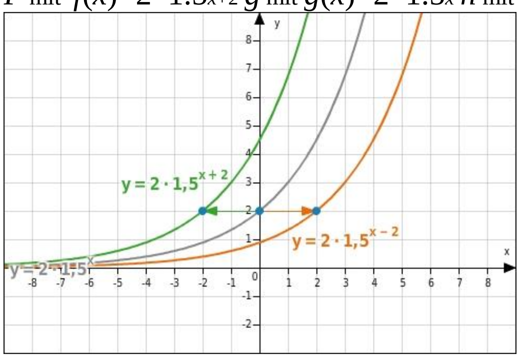
F mit $f(x)=2*1.5^{x}+2$ g mit $g(x)=2*1.5^{x}$ h mit $h(x)=2*1.5^{x}-2$



Verschiebung in x-Richtung

In der Funktionsgleichung $y=a*b^{x+c}$ bewirkt der Parameter c eine Verschiebung der Exponentialkurve $y=a*b^{x}$ in x-Richtung.
Für c gt 0 erfolgt die Verschiebung nach links, für c lt 0 nach rechts.
Durch die Verschiebung ändert sich der Wertebereich W nicht.

F mit $f(x)=2*1.5^{x+2}$ g mit $g(x)=2*1.5^{x}$ h mit $h(x)=2*1.5^{x-2}$



Funktionen der Form $y=a*b^{x+c}$ sind auch allgemeine Exponentialfunktionen , denn eine Verschiebung in x-Richtung kann auch als Streckung oder Stauchung beschrieben werden.

Für $y=a*b^{x}$ mit b gt 1 entspricht die Verschiebung um c Einheiten nach links einer Streckung mit dem Faktor b^{c} , denn $a*b^{x+c}=a*b^{x}*b^{c}$.

Die Verschiebung um c Einheiten nach rechts entspricht einer Stauchung mit dem Faktor $(\frac{1}{b})^{c}$, denn
$a*b^{x-c}=a*b^{x}*b^{-c}=a*b^{x}*(\frac{1}{b})^{c}$
.
Die Verschiebung der Exponentialkurve $y=2^{x}$
um 3 Einheiten nach links entspricht einer Streckung mit dem Faktor 8.
$y=2^{x+3}=8*2^{x}$

Mit Hilfe von Potenzgesetzen erhältst du

$$\begin{aligned} y &= 2^{x+3} \\ &= 2^{x} \cdot 2^{3} \\ &= 8 \cdot 2^{x} \end{aligned}$$

Die Stauchung der Exponentialkurve $y=2^{x}$
mit dem Faktor 14 entspricht einer Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts.

$y=\frac{1}{4}*2^{x}=2^{x-2}$

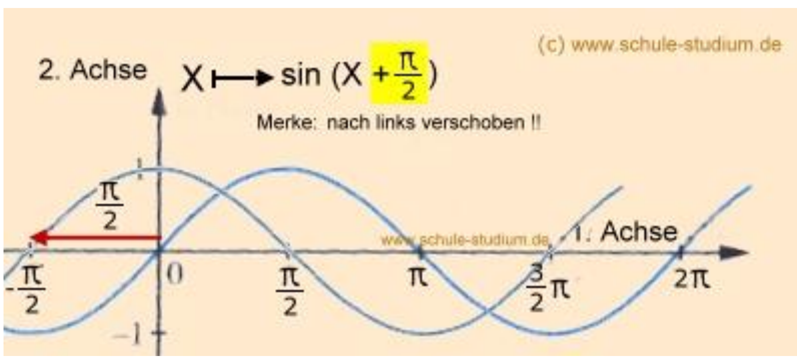
Mit Hilfe von Potenzgesetzen erhältst du

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}\cdot 2^x \\ &= \frac{1}{2^2}\cdot 2^x \\ &= 2^{-2}\cdot 2^x \\ &= 2^{x-2} \end{aligned}$$

Sinus- und Cosinusfunktionen

1. Phasenverschiebung:

Man erhält den Graphen einer Funktion der Form $X \mapsto \sin(X + \varphi)$, indem man den Graphen der Funktion in Richtung der X-Achse um φ nach links verschiebt.

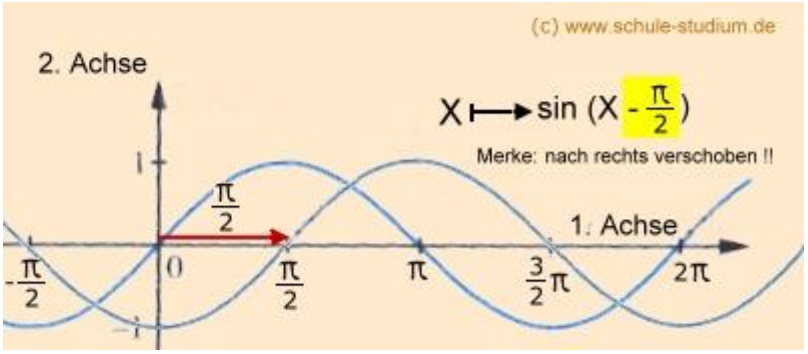


Merke:

Eine Verschiebung nach links entspricht: $X \mapsto \sin(X + \varphi)$

Man erhält den Graphen einer Funktion der Form $X \mapsto \sin(X + \varphi)$, indem man den Graphen der Funktion in Richtung der X-Achse um φ nach links verschiebt.

Verschiebung der Sinuskurve um: $\frac{\pi}{2}$



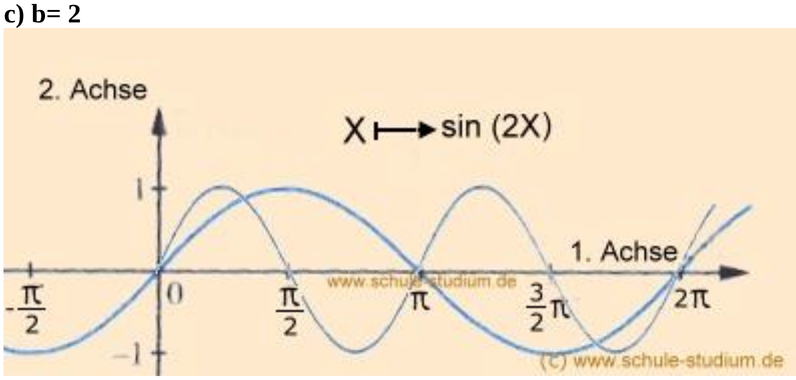
Merke:

Eine Verschiebung nach rechts entspricht: $X \longmapsto \sin(X - \varphi)$

2. Veränderung der Periodenlänge:

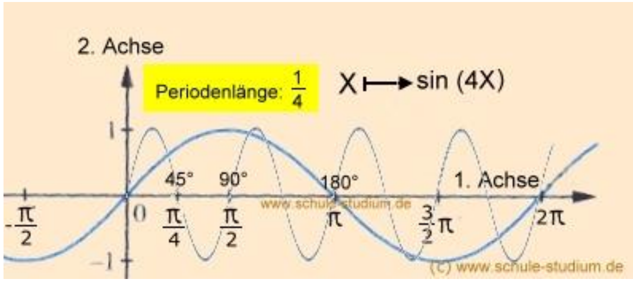
Man erhält den Graphen einer Funktion der Form $X \longmapsto \sin(bx)$, indem man den Graphen der Sinusfunktion in Richtung der X-Achse um den Faktor $\frac{1}{b}$ streckt.

c) b= 2



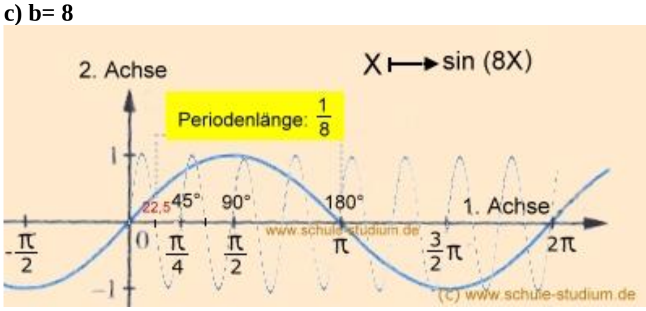
b= 2 -> sin (bx) ist hier bereits bei 90° ($\frac{\pi}{2}$) = 0

c) b= 4



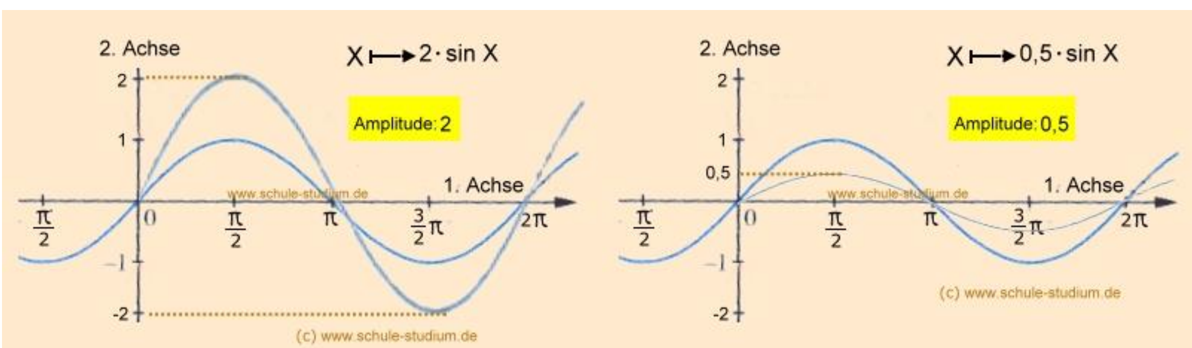
b= 4 -> sin (bx) ist hier bereits bei 45° ($\frac{\pi}{4}$) = 0

c) b= 8



3. Veränderung der Amplitude:

Man erhält den Graphen einer Funktion der Form $X \longmapsto \sin\ a \cdot (\sin x)$, indem man den Graphen der Sinusfunktion in Richtung der y-Achse um den Faktor **a** streckt:

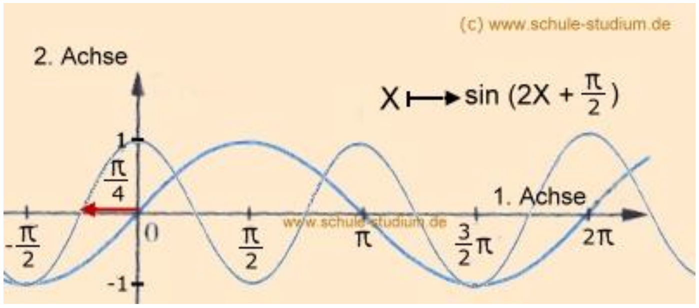


Natürlich lassen sich bei der Sinusfunktion die Veränderung der Amplitude,
Veränderung der Periodenlänge sowie die Phasenverschiebung

auch kombinieren wie folgendes Beispiel zeigt:

Die Verschiebung ist zu ermitteln, indem man den Offset (hier Pi/2) durch den Faktor vor dem x dividiert. So ergibt sich eine Verschiebung nicht um pi/2, sondern um Pi/4

nach links. Daraus ergibt sich eine Nullstelle bei - $\frac{\pi}{4}$.


(c) www.schule-studium.de
2. Achse
$X \longmapsto \sin\left(2X + \frac{\pi}{2}\right)$
1
$\frac{\pi}{4}$
1. Achse
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
-1
www.schule-studium.de