

Vektoren

Donnerstag, 19. September 2019

Definition des Vektors, Spaltenschreibweise, parallele, antiparallele, kollineare Vektoren

Definition des Vektors: Ein Vektor $\vec{a}$ ist eine Größe, die durch eine Maßzahl (Länge) und eine Richtungsangabe beschrieben ist.

$|\vec{a}|$: Betrag (Länge) des Vektors

Skalare

Masse m

Zeit t

Energie E

Vektoren

Kraft $\vec{F}$

$$|\vec{F}| = F$$

Geschwindigkeit $\vec{v}$

Magnetfeld $\vec{B}$

parallele Vektoren:



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

senkrechte Vektoren:



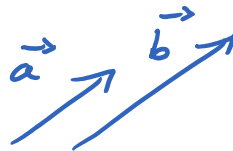
$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

gleiche Vektoren:



$$\vec{a} = \vec{b}$$

kollineare (parallele) Vektoren:



$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

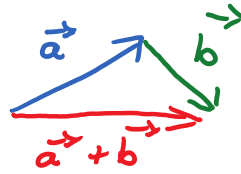
Rechenregeln für Vektoren

Donnerstag, 19. September 2019

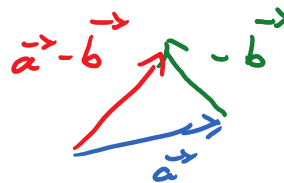
Vektoroperationen: Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation

Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

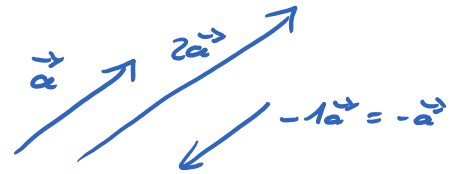


Subtrahieren: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Skalare Multiplikation: $\lambda \cdot \vec{a}$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}$$

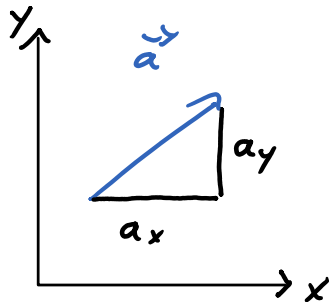


Komponentendarstellung, Betrag des Vektors

Donnerstag, 19. September 2019

Komponentendarstellung, durch 2 Punkte festgelegte Vektoren, Betrag des Vektors

Vektoren im Koordinatensystem:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{„Spaltenschreibweise“}$$

Betrag (Länge) des Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

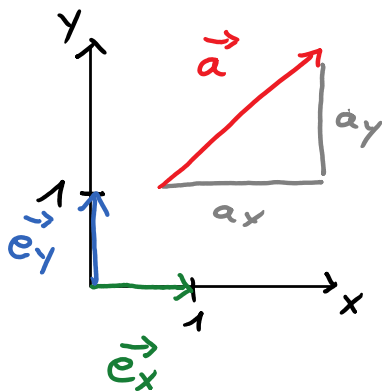
Festlegung durch 2 Punkte (nicht zwingend):

Anfangspunkt $A(x_A | y_A)$, Endpunkt $B(x_B | y_B)$

„Spitze minus Fuß“ $\rightarrow$ Vektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Komponentendarstellung und Einheitsvektoren:



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

„Einheitsvektoren“

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$
$$a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

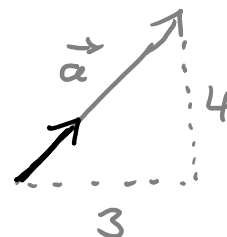
„Normierung“ eines Vektors: $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Beispiel, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Betrag (Länge) des Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



$\frac{1}{5} \vec{a}$ Normierter Vektor $\vec{a}$
„auf die Länge 1“

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

"auf die Länge 1
zurechtgeschnitten"

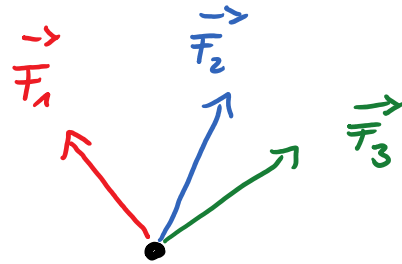
Rechenbeispiel

Donnerstag, 19. September 2019

An einen Massepunkt greifen gleichzeitig drei Kräfte an:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -3 \text{ N} \\ 2 \text{ N} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \text{ N} \\ 4 \text{ N} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Welche resultierende Kraft greift an dem Massepunkt an?



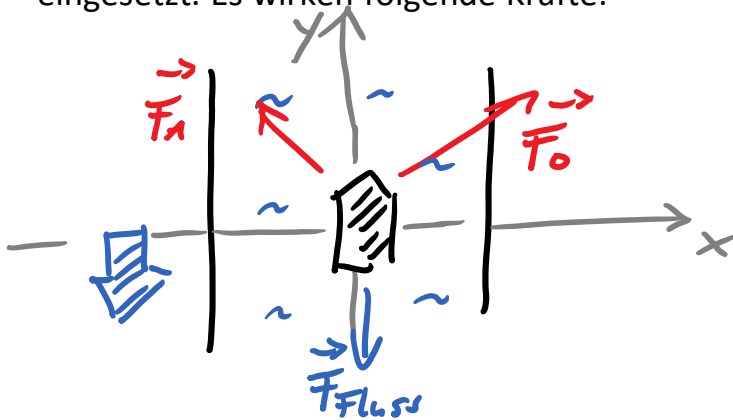
$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{res}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ &= \begin{pmatrix} -3 \text{ N} \\ 2 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \text{ N} \\ 4 \text{ N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \text{ N} \\ 5 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \text{ N} \\ 11 \text{ N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$F_{\text{res}} = |\vec{F}_{\text{res}}| = \sqrt{(3 \text{ N})^2 + (11 \text{ N})^2} = \sqrt{130 \text{ N}^2} = \underline{\underline{\sqrt{130} \text{ N}}}$$

Rechenbeispiel

Donnerstag, 19. September 2019

Asterix und Obelix ziehen ein ägyptisches Schiff, welches mit Steinen beladen ist, den Nil flussaufwärts. Dabei werden Seile von beiden Ufern aus eingesetzt. Es wirken folgende Kräfte:



$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -1500 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_O = \begin{pmatrix} 1500 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{Fluss}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ N} \\ -3000 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Welche resultierende Kraft erfährt das Schiff? In welche Richtung zeigt die resultierende Kraft?

Skalarprodukt

Donnerstag, 19. September 2019

Definition, Rechenregeln, orthogonale Vektoren, Winkel zwischen 2 Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y \quad \text{„Skalar“}$$

Eigenschaften: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ „orthogonale Vektoren“

Winkel zwischen Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \varphi: \text{Zwischenwinkel } \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Rechenbeispiel

Donnerstag, 19. September 2019

- a) Beweisen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \quad (\checkmark)$$

- b) Für welchen Wert von x stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$9 + 3x = 0$$

$$\underline{x = -3}$$

- c) Welche Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen ein?

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

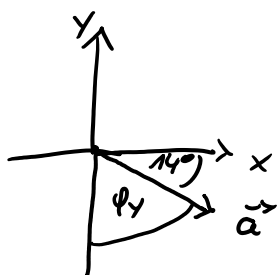
$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{e}_x| = 1$$

$$\cos \varphi_x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_x \approx \underline{14^\circ}$$

$$\varphi_y = 90^\circ - 14^\circ = \underline{76^\circ}$$



Linear unabhängige Vektoren

Donnerstag, 19. September 2019

Vektoren sind linear unabhängig, wenn kein Vektor aus einer Linearkombination der restlichen Vektoren hervorgeht.

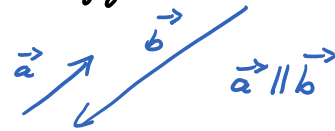
$$\text{In 2 Dimensionen: } \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{alternativ: } \lambda_1 \vec{a} = \lambda_2 \vec{b}$$

Heißt: Wenn nur die Möglichkeit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ existiert:

$\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig, sonst linear abhängig.

$$\text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} -3\vec{a} &= 1 \cdot \vec{b} & 3\vec{a} + 1\vec{b} &= 0 \\ \lambda_1 &= 3 & \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Es existieren λ_1 und $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

In 2 Dimensionen gilt: Linear abhängige Vektoren sind parallel.

Beispiel: Beweise: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vektorgleichung}$$

$$\text{I } \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{II } 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

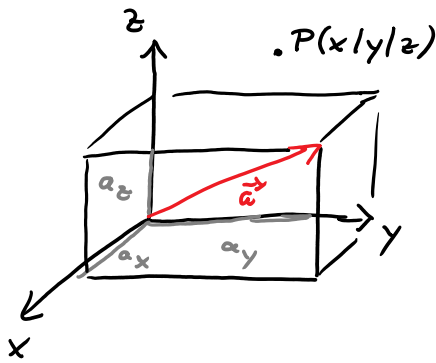
$$\text{II} - \text{I} \quad 4\lambda_1 = 0 \rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \quad \underline{\lambda_2 = 0} \quad \text{linear unabhängig}$$

Es existiert kein λ , sodass $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ ist.

Dreidimensionale Vektoren

Donnerstag, 19. September 2019

Definition, Rechenregeln, Betrag



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Betrag: } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\text{Addition: } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalare Multiplikation: } \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

Nur wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ möglich ist: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig
sonst: linear abhängig

Geometrisch: Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind, sind sie komplanar (liegen in einer Ebene)

Beispiel: Beweisen sie, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen!

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\text{II } 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\text{III } 4\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \quad | :2 \quad 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\text{II} - \text{III} \quad 0 = 0 \quad \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Setze $\lambda_1 = 1$ fest

$$\rightarrow \text{Aus II folgt: } \underline{\lambda_3 = -2}$$

$$\rightarrow \text{Aus I folgt: } \underline{\lambda_2 = 1}$$

Also: Es existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$,

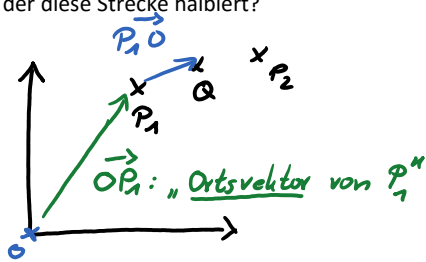
$$\text{so dass } \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}.$$

$\rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig / komplanar.

Rechenbeispiele

Donnerstag, 19. September 2019

- a) Wie lange ist die Strecke zwischen den Punkten $P_1(-4; 3; 2)$ und $P_2(1; 0; 4)$ und welche Koordinaten besitzt der Punkt Q, der diese Strecke halbiert?



$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \vec{OP_1} + \vec{P_1Q} \\ \vec{P_1P_2} &= \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 0 - 3 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{P_1Q} &= \frac{1}{2} \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{OQ} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ Q &(-1,5/1,5/3)\end{aligned}$$

- a) Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Standardweg: $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$
 $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{linear unabhängig}$

$$\begin{array}{l} \text{I } 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{II } -\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4\lambda_1 + 16\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 = 0 \end{array}$$

- c) Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

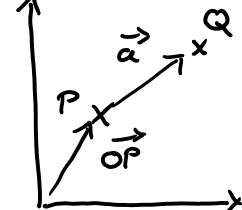
$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} &= \vec{0} & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{I } 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 & 1 \cdot (-2) - 6\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ \text{II } 4\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 & 2\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \text{III } 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\text{I} + \text{III} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \quad (4)$$

$$\text{II} - 4 \quad \lambda_1 = 0; \lambda_3 = 0; \lambda_2 = 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

- d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkt P = (3;1;-5) in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 20

Längeneinheiten entfernt liegt.



$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50} \quad \vec{PQ} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 20$$

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \frac{20}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{20}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \frac{20}{\sqrt{50}} \approx 3$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Q(12/-14/7)$$

Rechenbeispiel 1

Donnerstag, 19. September 2019

a) Wie lange sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$?

b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die Länge 1!

Rechenbeispiel 2

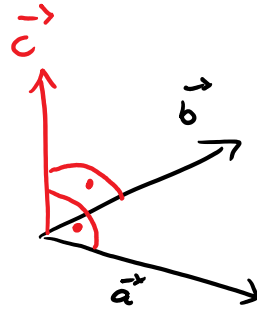
Donnerstag, 19. September 2019

Welche Koordinaten besitzt der Punkt Q , der die Strecke zwischen den Punkten $P_1(-4; 3; 2)$ und $P_2(1; 0; 4)$ halbiert?

Vektorprodukt

Donnerstag, 19. September 2019

Definition, Eigenschaften, Flächeninhalte



Berechnung des Vektorprodukts (Kreuzprodukt):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Eigenschaften: ① $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 ; \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

② Geometrische Deutung:

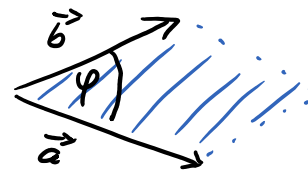
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Fläche des **Parallelogramms**, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

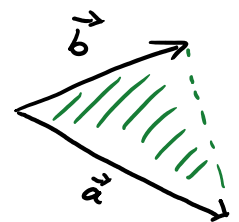
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Fläche des **Dreiecks**, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$



Parallelogramm



Dreieck

③ Kolineare Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ sind kolinear (parallel)}$$

④ Rechengesetze

$$\text{I } \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\text{II } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$$

Rechenbeispiel 3

Donnerstag, 19. September 2019

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen

Sie folgende Vektorprodukte:

- $\vec{a} \times \vec{b}$
- $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c})$
- $((\vec{a} + 2\vec{c}) \times (-\vec{b})) \times (3\vec{c})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$(a) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(b) \vec{0} \times (3\vec{c}) = 0$$

$$(c) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \times 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -78 + 6 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} \times 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} \times 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -36 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} \times 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \\ -432 - 75 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \\ -507 \end{pmatrix}$$

Rechenbeispiel 4

Donnerstag, 19. September 2019

Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 1 = 2\lambda_2 \quad \rightarrow \quad \underline{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$$

$$\text{II } \lambda = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\text{III } \underline{-2 = 3\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\text{II } \lambda = 2\lambda_1 + 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$\text{III } -2 = 3\lambda_1 + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{2} = 3\lambda_1 \quad \rightarrow \quad \underline{\lambda_1 = -\frac{5}{6}}$$

Rechenbeispiel 5

Donnerstag, 19. September 2019

Rechenbeispiel 6

Donnerstag, 19. September 2019

Durch die drei Punkte $A(1;4;2)$, $B(3;1;0)$ und $C(-1;1;2)$ werden die Ecken eines Dreiecks festgelegt. Berechnen Sie die Länge der drei Seiten und den Flächeninhalt des Dreiecks.

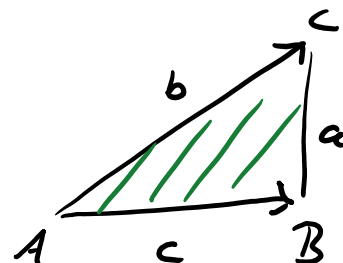
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

$$a = |\vec{BC}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$b = |\vec{AC}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$$



Rechenbeispiel 7

Donnerstag, 19. September 2019

Die vier Punkte $A(0;4;1)$, $B(0;8;1)$, $C(4;8;1)$ und $D(4;4;1)$ bilden die Grundfläche einer Pyramide. Die Spitze S der Pyramide liegt in positiver z -Richtung senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $ABCD$. Das Volumen der Pyramide beträgt 48 Volumeneinheiten.

- a) Skizzieren Sie die Pyramide qualitativ. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die Punkte A , B , C und D ?
- b) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ein Quadrat ist (Hinweis: Weisen sich nach, dass alle Seiten gleich lang sind und die Seiten senkrecht aufeinander stehen.).
- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S und geben Sie die Höhe der Pyramide an
Hinweis:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Spatprodukt

Donnerstag, 19. September 2019