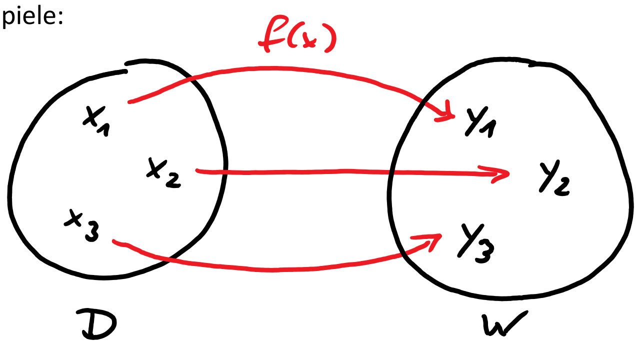
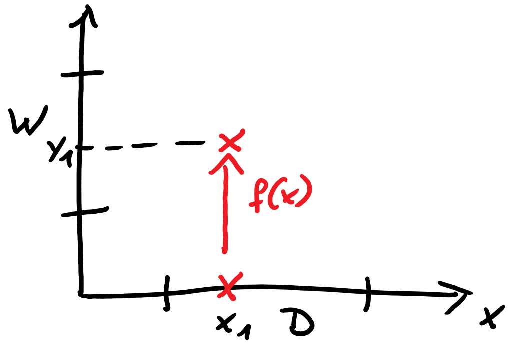
Grundlagen zum Funktionsbegriff

Montag, 16. September 2019

Funktionen sind eindeutige **Abbildungen**, bei denen jedem Element aus einer **Definitionsmenge** D **eindeutig** ein Element aus einer **Wertemenge** W zugeordnet wird.
Diese Zuordnung erfolgt immer gemäß einer **Funktionsvorschrift** f(x).

Beispiele:



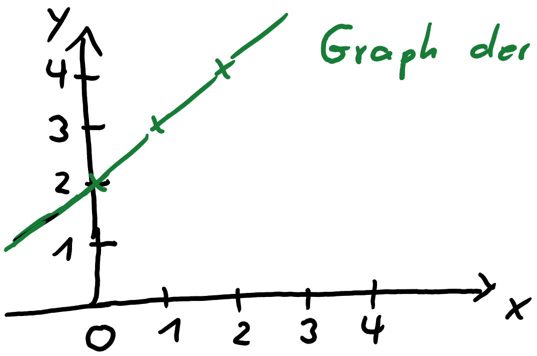


f(x) ist eine „Rechenvorschrift“ nach der jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.

Beispiel: $f(x) = x + 2$

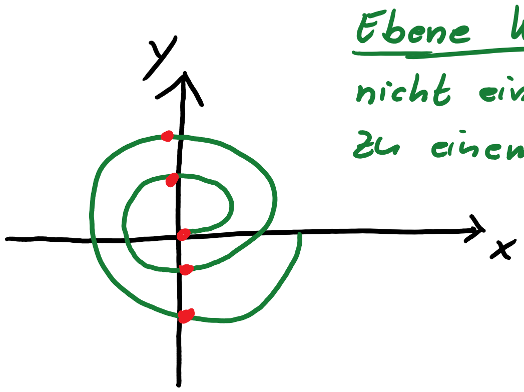
$D = \mathbb{R}$

$W = \mathbb{R}$



Graph der Funktion

Gegenbeispiel:



Ebene Kurve

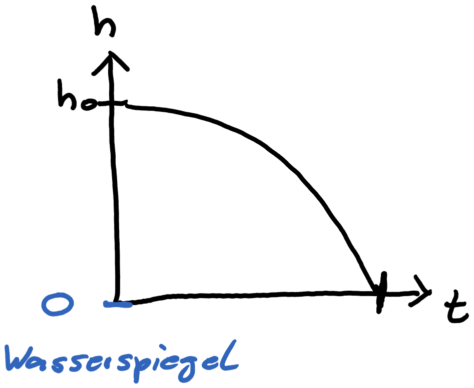
nicht eindeutig, d.h.
zu einem x-Wert gibt es mehr als einen y-Wert.

Beispiel: Stein fliegt in einen Brunnen

Flughöhe: $h(t) = h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ Ortsfaktor

h_0: Starthöhe

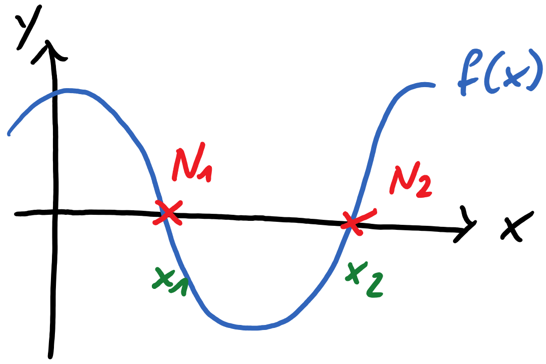


h_0 : Starthöhe

Grundlegende Begriffe

Montag, 16. September 2019

Nullstellen
Implizite und explizite Darstellung von Funktionen



Nullstellen $f(x)=0$

$N_1(x_1|0)$

$N_2(x_2|0)$

$y=f(x)$ explizite Darstellung, z.B. $f(x)=x+2$

$y=x+2$

$y-f(x)=0$ implizite Darstellung $y-x-2=0$

Geradengleichungen

Montag, 16. September 2019

Wenn die Funktionsvorschrift f(x) ein Polynom 1.Grades ist, dann ist der Graph der Funktion einer Gerade im Koordinatensystem.

$f(x) = ax + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$ fest „lineare Funktionen"

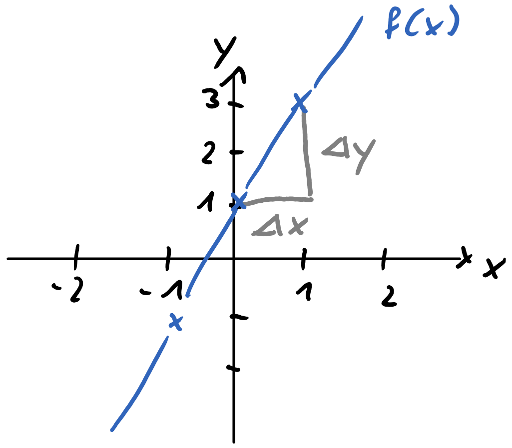
Beispiel: $y = f(x) = 2x + 1$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

m: Steigungsfaktor

t: y-Achsenabschnitt



$$\boxed{y = m \cdot x + t}$$

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel Geradengleichung 1

Montag, 16. September 2019

2 Handy-Tarife:
Tarif A: 8 c pro Gespräch pauschal plus 4 c pro Minute
Tarif B: 6 c pro Minute
Beide Tarife rechnen sekundengenau ab. Für wen ist welcher Tarif am besten? Lösen Sie rechnerisch und grafisch!

$P_A(t) = 4 \cdot t + 8$ t: Zeit in min

$P_B(t) = 6 \cdot t$

$f(x) = 4x + 8$

$g(x) = 6x + 0$

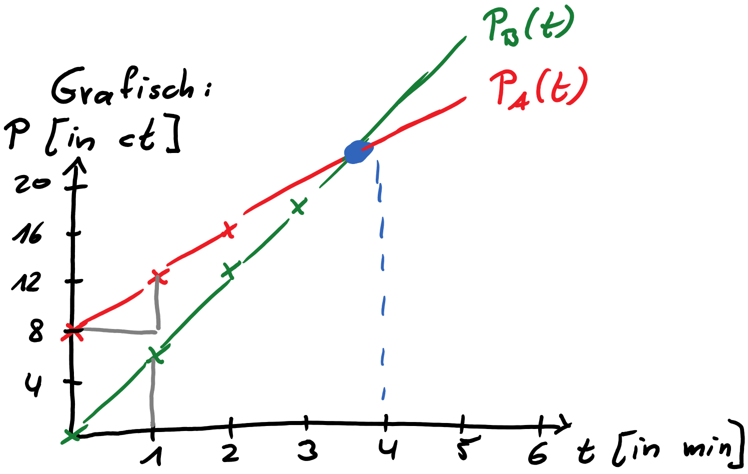
Gleichsetzen: $4t + 8 = 6t \quad | -4t$

$2t = 8 \quad | :2$

$t = 4$

Bis 4min: Tarif B
Ab 4min: Tarif A

Grafisch:



Beispiel Geradengleichung 2

Montag, 16. September 2019

Hans startet eine Reise mit 60 km/h. Sabine startet eine Viertelstunde später mit einer 50% höheren Geschwindigkeit. Wann und nach wie vielen km holt Sabine Hans ein? Lösen Sie grafisch und rechnerisch!

Übungsaufgaben zu Geradengleichungen 1

Montag, 16. September 2019

Welche der Punkte liegen auf der Geraden g(x)=y=4x-5

a) $A\ (1; 1)$ b) $B\ (2; 4)$ c) $C\ (20; 75)$ d) $D\ (732{,}2; 2933)$

(v)

in g(x) einsetzen

Übungsaufgaben zu Geradengleichungen 2

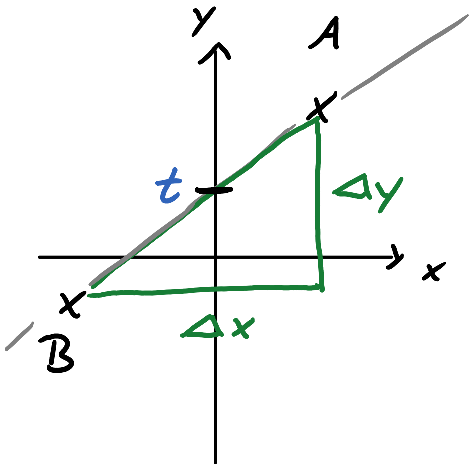
Montag, 16. September 2019

Ermitteln Sie die Geradengleichung der Gerade, die durch die Punkte geht, sowie die Schnittpunkte mit X bzw. Y-Achse

a) $A\ (2;1)\ B\ (-5;-13)$ b) $C\ (0;2)\ D\ (20;52)$

c) $E\ (-3;2)\ F\ (-4;-1)$

(a) $y = m \cdot x + t$



① $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-(-13)}{2-(-5)} = 2$

② y-Achsenabschnitt t bestimmen

beliebigen Geradenpunkt einsetzen

(hier A)

$1 = 2 \cdot 2 + t \rightarrow t = -3$

Gerade g: $\underline{y = 2x - 3}$

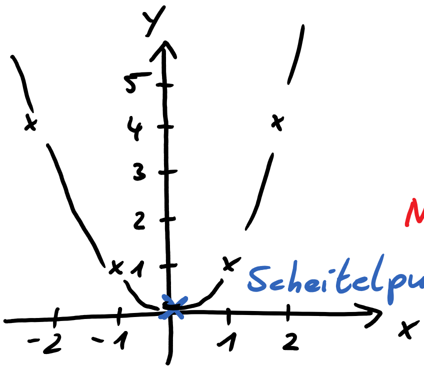
Quadratische Funktionen

Montag, 16. September 2019

Lernziel: Definition der quadratischen Funktion, Nullstellen bestimmen können

$f(x) = ax^2 + bx + c$ → Graph: Parabel

$f(x) = x^2$



Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

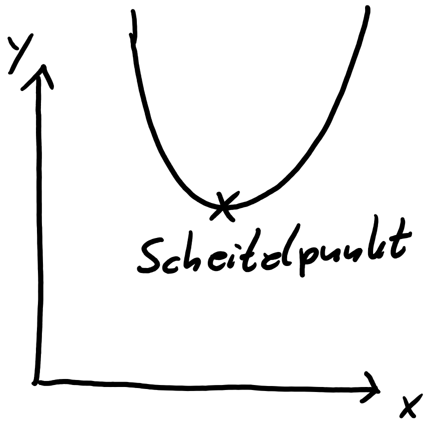
Normalparabel: Graph der Funktion $f(x) = x^2$

Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ → $N_1(x_1 / 0)$, $N_2(x_2 / 0)$ wenn $D > 0$

Quadratische Ergänzung und Scheitelpunkte

Montag, 16. September 2019

Beispiel: Bringen Sie folgenden quadratischen Term auf Scheitelpunktsform und zeichnen Sie den Graphen:
$x^2 - 6x + 7$



Strategie: Binomische Formel „basteln"
(quadratische Ergänzung)

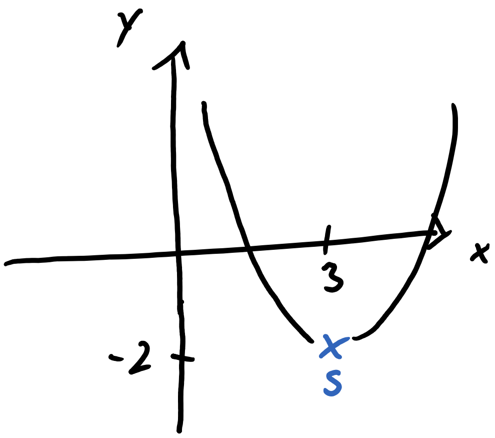
$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 7 = (x-3)^2 - 2$$

$\downarrow$ $\uparrow$ $\searrow x_s$ $\searrow y_s$

„durch 2 & quadrieren"

Scheitelpunkt $S(x_s / y_s)$

$S(3/-2)$



Quadratische Funktionen zeichnen

Montag, 16. September 2019

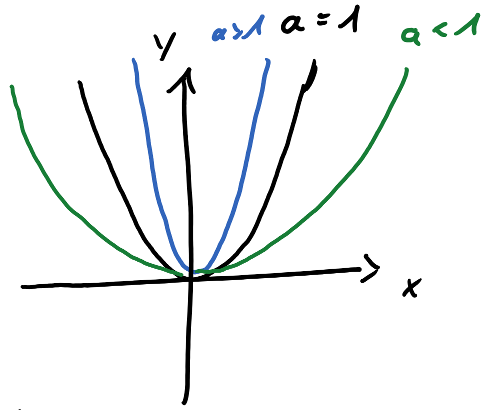
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Wenn $a = 1$: Verschobene Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$.

Wenn $a \neq 1$: a ausklammern, Scheitelpunkt in der Klammer berechnen.

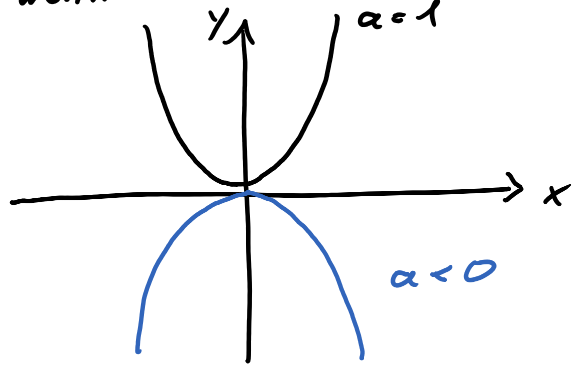
Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 18x + 21 = 3(x^2 - 6x + 7)$

Wenn $a > 1$: Normalparabel wird gestaucht



a : Öffnungsfaktor

Wenn $a < 0$:



Öffnung nach unten

Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen 1

Montag, 16. September 2019

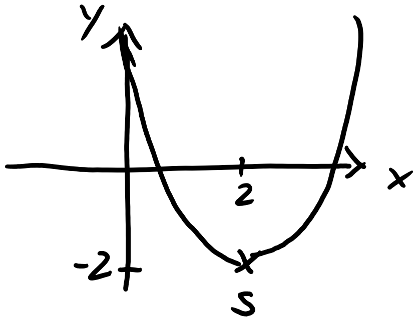
Bringen sie die quadratischen Funktionen auf Scheitelpunktsform und zeichnen sie die Graphen:

a) $x^2 - 4x + 2$
b) $3x^2 - 18x + 30$

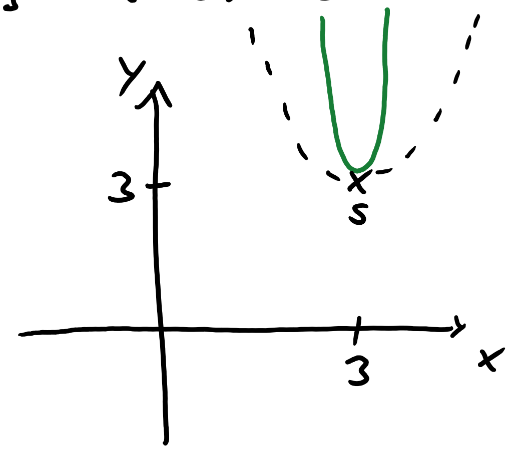
$x_s = 2$ $\quad$ $y_s = -2$

(a) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2 \rightarrow S(2|-2)$

quadr. Ergänzung $\quad$ Scheitelpunktsform $\quad$ Scheitelpunkt



(b) $3x^2 - 18x + 30 = 3(x^2 - 6x + 10) = 3(x^2 - 6x + 9 - 9 + 10) =$
$3[(x-3)^2 + 1] = 3(x-3)^2 + 3$ $\quad$ S(3/3)



Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen

Montag, 16. September 2019

a) Welche quadratische Funktion ist durch die Punkte A(0|4), B(2|0) und C(3|1) festgelegt?
b)

(a) $y = ax^2 + bx + c$

Punkte A, B und C einsetzen:

I $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow \underline{c = 4}$

II $0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

$0 = 4a + 2b + 4 \quad |:2$

$0 = 2a + b + 2 \rightarrow b = -2a - 2$

III $1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

$1 = 9a + 3b + 4 \quad |-1$

$0 = 9a + 3b + 3 \quad |:3$

$0 = 3a + b + 1$

einsetzen

$0 = 3a - 2a - 2 + 1$

$0 = a - 1$

$\underline{a = 1}$

$\underline{b = -4}$

Ergebnis: $y = 1x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 + 0$

b) Ein Stein wird in einen Brunnen fallen gelassen. Es dauert 2 Sekunden, bis der Stein auf der Wasseroberfläche am Grund des Brunnens einschlägt. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Fallstrecke s des Steins in Abhängigkeit von der Zeit durch Bewegungsgleichung $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ beschrieben wird? Wie lange fällt der Stein in einem 40m tiefen Brunnen ($g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$)?

$s(t=2) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = \underline{20\ [m]}$

$40 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \quad |:5$

$t^2 = 8 \quad |\sqrt{\ }$

$\underline{t = \sqrt{8}\ [s]}$

Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen 2

Montag, 16. September 2019

Gegeben sind: 1. Die Gerade $g(x) = 2x + 5$ und 2. die quadratische Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.
Beweisen Sie, dass g(x) und f(x) keine Schnittpunkte haben!

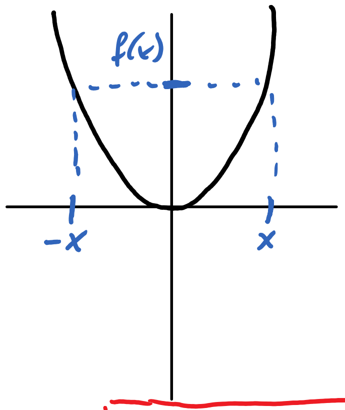
$f(x) = g(x)$

$-x^2 + 4x - 4 = 2x + 5 \quad | +x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 2x + 9 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 4 - 36 = -32 < 0$ q.e.d.

Achsensymmetrie bzgl. y-Achse



Kriterium: $\boxed{f(-x) = f(x)}$

Achsensymmetrie

Beispiel: $f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 3x^0$

$f(-x) = 4(-x)^4 + 5(-x)^2 - 3$

$= 4x^4 + 5x^2 - 3 = f(x)$

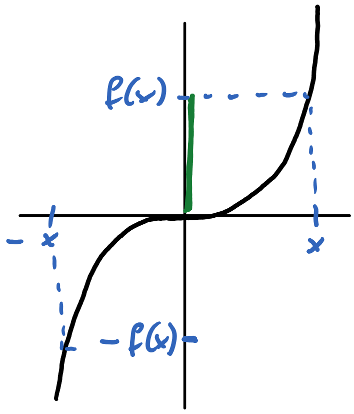
→ Achsensymm. bzgl. y-Achse

Gerade Funktionen:

nur gerade Exponenten

→ immer achsensymm. zur y-Achse

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung



z.B. $f(x) = x^3$

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Punktsymmetrie zum Ursprung

$f(x) = x^5 + 2x$

$f(-x) = (-x)^5 + 2\cdot(-x) =$

$= -x^5 - 2x = -\underbrace{(x^5 + 2x)}_{f(x)}$

$= -f(x)$

→ Punktsymm. zum Ursprung

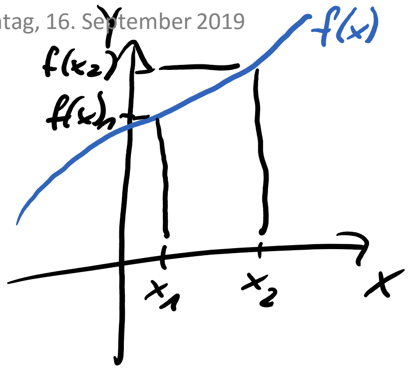
Ungerade Funktionen:

nur ungerade Exponenten

→ immer Punktsymmetrie

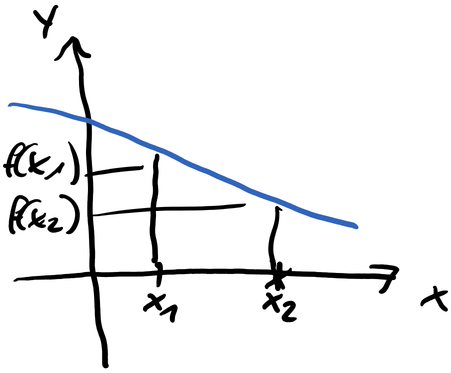
Monotonie

Montag, 16. September 2019



streng monoton wachsende Funktion

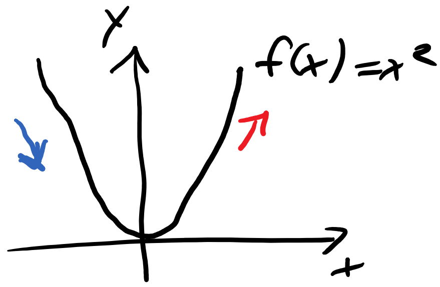
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



streng monoton fallende Funktion

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Beispiel: Monotonieverhalten von $f(x) = x^2$

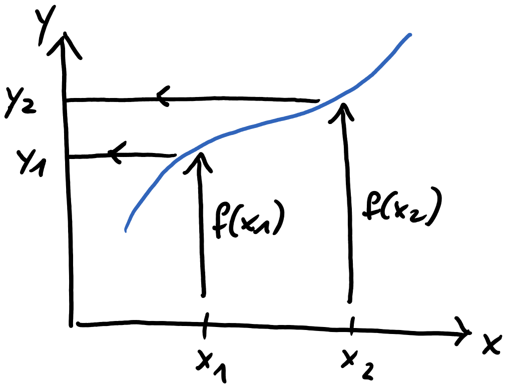


Wenn $x \in]-\infty; 0[$: $f(x)$ streng monoton fallend

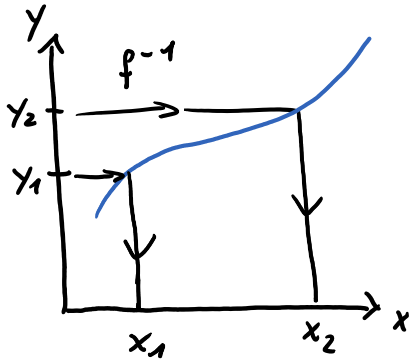
Wenn $x \in]0; \infty[$: $f(x)$ streng monoton wachsend

Umkehrfunktion

Montag, 16. September 2019



Funktion f



Umkehrfunktion f^{-1} (inverse Funktion)

f ist nur dann umkehrbar, wenn f eine streng monotone Funktion ist.

Wie erstelle ich f^{-1}?

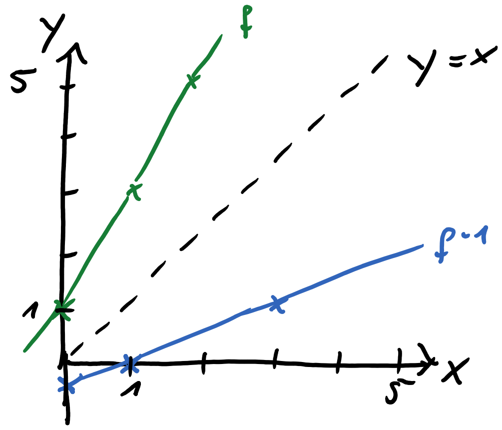
① $y = f(x) \xrightarrow[\text{nach } x \text{ auflösen}]{\text{Funktionsgleichung}} x = g(y)$

② $x = g(y) \xrightarrow[\text{vertauschen}]{x \text{ und } y} y = g(x) = f^{-1}(x)$

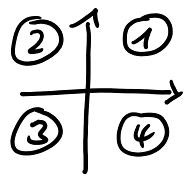
Beispiel: $f: y = 2x + 1 \quad | -1; :2$

$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

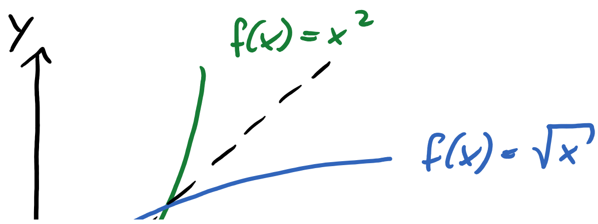


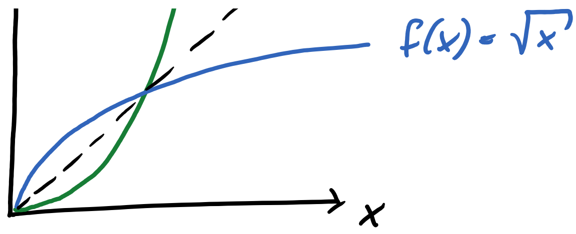
$f(x) \to f^{-1}(x)$: Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten



Beispiel: $f: y = x^2 \quad (x > 0)$

1. $x = \overset{+}{(-)}\sqrt{y}$
2. $f^{-1}: y = \sqrt{x}$




$f(x) = \sqrt{x}$
x

Übungen zu Umkehrfunktionen

Montag, 16. September 2019

Wie lautet die Umkehrfunktion von

a) $y = 2x + 1$

b) $y = \frac{1}{2x}$ $(x > 0)$

(b) 1 $y = \frac{1}{2x}$ $\quad | \cdot 2x$

$2x \cdot y = 1 \quad | : 2y$

$x = \frac{1}{2y}$

2 $f^{-1}: y = \frac{1}{2x}$

$f(x) = f^{-1}(x)$

Übungen zu Funktionen

Montag, 16. September 2019

Symmetrieverhalten Funktionen
Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen und den maximalen Definitionsbereich.

a) $y = 4x^2 + 16$

b) $y = 3x^5 + 2x$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ $\quad f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x) \quad D = \mathbb{R}$

→ Punktsymm. zum Ursprung

Nullstellen
Wo haben die folgenden Funktionen Nullstellen?

a) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \quad N_1(-3|0) \quad N_2(3|0)$

b) $y = x^4 - 4x^2 - 45$

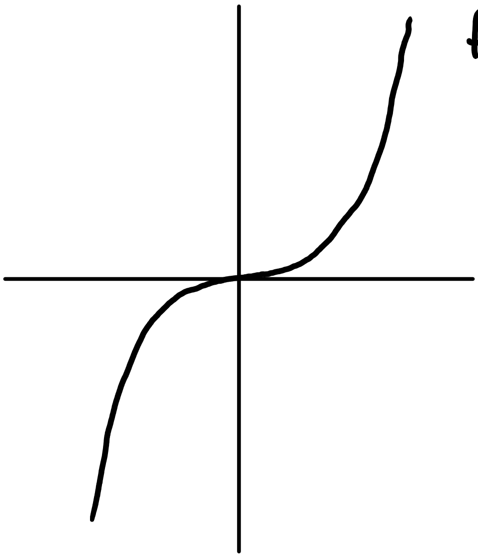
Übungsaufgaben zu quadratischen Funktionen

Montag, 16. September 2019

a) Welche relative Lage im Koordinatensystem haben die Funktionen $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ und $y = (x-2)^2 + 3$?

b) Welches Monotonieverhalten hat die Funktion $y = x^3$? Zeichen Sie den Graphen!

(b)



$f(x) = x^3$

monoton steigend

Proportionalitäten

Montag, 16. September 2019

Direkte Proportionalität, indirekte Proportionalität, Schreibweisen für allgemeine Proportionalitäten

Direkte Proportionalität: 1 Faktor wird vervielfacht →
2 Faktor wird genauso vervielfacht

Graph: Ursprungsgerade $f(x) = ax$ $f(x) \sim x$

Indirekte Proportionalität: 1 Faktor wird vervielfacht
→ 2 Faktor wird entsprechend geteilt

Graph: Hyperbel $f(x) \sim \frac{1}{x}$

Proportionalitätszeichen

Andere Proportionalitäten:

z.B. Fallen eines Steins $s(t) \sim t^2$

z.B. exponentielle Vermehrung von Bakterien $n(t) \sim 2^t$