

Beträge

Mittwoch, 18. September 2019

Definition des Betrags, rechnen mit Beträgen

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel: $|2| = 2$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$; $|x^2| = x^2$

Beim Rechnen: **Fallunterscheidung**

Fall 1 : Positiver Fall

$\rightarrow \mathbb{L}_1$

Fall 2 : Negativer Fall

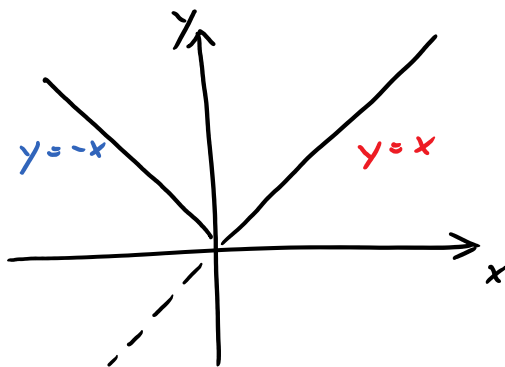
$\rightarrow \mathbb{L}_2$

Ergebnis: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$

Betragsfunktion

Mittwoch, 18. September 2019

$$f(x) = |x| \quad \text{„Betragsfunktion“}$$



$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{wenn } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{wenn } x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Alle negativen Kurvenstücke werden an der x-Achse gespiegelt.

Betragsgleichungen

Mittwoch, 18. September 2019

Beispiel: $|x - 2| = x^2$

Fallunterscheidung:

Fall 1: $x - 2 \geq 0$

$$\textcircled{x \geq 2}$$

$$x - 2 = x^2 \quad | -x + 2$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \text{keine Lösung}$$

keine Lösung

$$\mathbb{L}_1 = \{ \}$$

Fall 2: $x - 2 < 0$

$$\textcircled{x < 2}$$

$$-(x-2) = x^2 \quad | + (x-2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

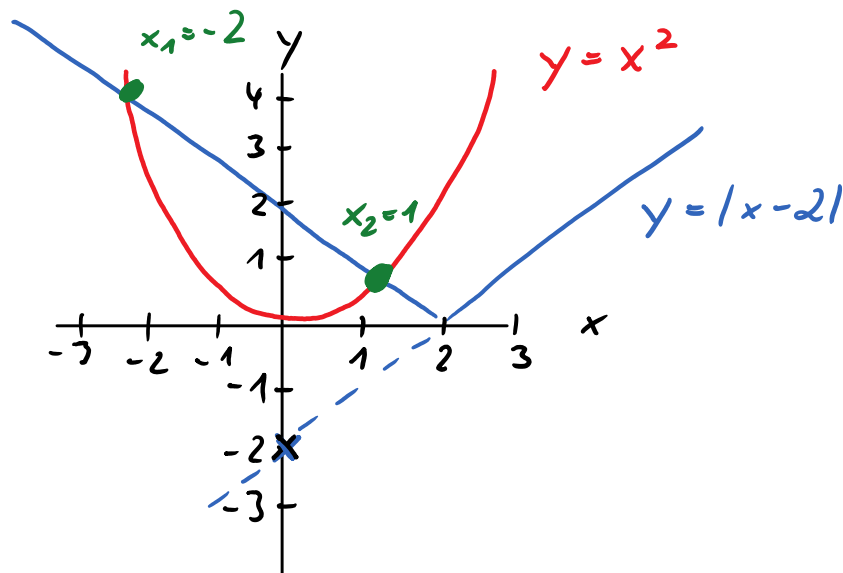
$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

$$\mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$$

Grafische Lösung:

$$|x - 2| = x^2$$



Übungsaufgaben zu Beträgen

Mittwoch, 18. September 2019

Lösen Sie folgenden Betragsgleichungen:

a) $|x + 2| - 2|x - 3| = 4$

b) $|2x + 4| = -x^2 + x + 6$

b) 1. Fall: $2x + 4 \geq 0$

$x \geq -2$

$2x + 4 = -x^2 + x + 6 \quad | +x^2 - x - 6$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\mathbb{L}_1 = \{-2; 1\}$

2. Fall: $x < -2$

$-(2x + 4) = -x^2 + x + 6 \quad | +x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 - 2x - 4 = 0$

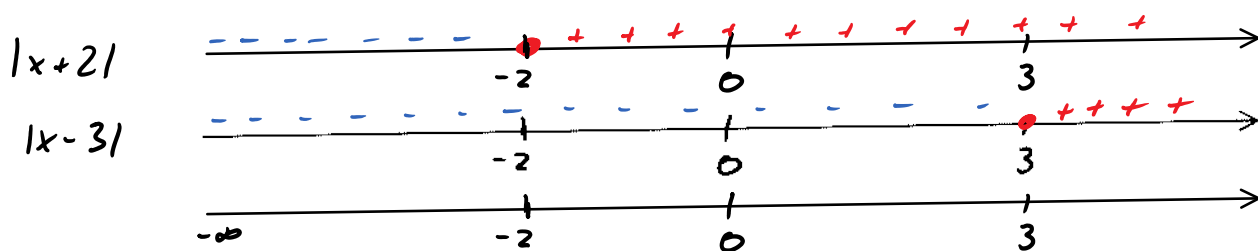
$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x + 2)(x - 5) = 0$

$x_1 = -2; x_2 = 5 \quad \mathbb{L}_2 = \{ \}$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-2; 1\}$

a) $|x + 2| - 2|x - 3| = 4$



Fall 1

$x \in]-\infty; -2[$

$|x + 2| < 0$

$|x - 3| < 0$

$-(x + 2) - 2 \cdot [-(x - 3)] = 4$

$-x - 2 + 2(x - 3) = 4$

$-x - 2 + 2x - 6 = 4$

$x - 8 = 4$

$x = 12$

$\mathbb{L}_1 = \{ \}$

Fall 2

$x \in [-2; 3[$

$|x + 2| \geq 0$

$|x - 3| < 0$

$x + 2 - 2 \cdot [-(x - 3)] = 4$

$x + 2 + 2(x - 3) = 4$

$x + 2 + 2x - 6 = 4$

$3x - 4 = 4$

$3x = 8$

$x = \frac{8}{3}$

$\mathbb{L}_2 = \{ \frac{8}{3} \}$

Fall 3

$x \in [3; \infty[$

$|x + 2| \geq 0$

$|x - 3| \geq 0$

$x + 2 - 2(x - 3) = 4$

$x + 2 - 2x + 6 = 4$

$-x + 8 = 4$

$-x = -4$

$x = 4$

$\mathbb{L}_3 = \{4\}$

$\mathbb{L} = \{ \frac{8}{3}; 4 \}$

Ungleichungen

Mittwoch, 18. September 2019

Beispiele: $x > 2$ $x \geq 2$
 $\mathbb{L} =]2; \infty[$ $\mathbb{L} = [2; \infty[$

$$5x + 1 > 3 \quad | -1$$

$$5x > 2 \quad | :5$$

$$x > \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{L} =]\frac{2}{5}; \infty[$$

$$-5x + 1 > 3 \quad | -1$$

$$-5x > 2 \quad | :(-5)$$

$$x < -\frac{2}{5}$$

Multiplikation/
ACHTUNG: Bei Division durch negative Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\mathbb{L} =]-\infty; -\frac{2}{5}[$$

3 Typen:

① x steht in der 1. Potenz, z.B. $3x + 5 < 2x + 1$

Lösungsstrategie: Nach x auflösen

② x steht in einer höheren Potenz, z.B. $x^2 - 5x + 6 < 0$

Nach 0 auflösen, dann faktorisieren, dann Vorzeichentabelle

③ Bruchungleichung, z.B. $\frac{1}{x+2} < 5$

Definitionsmenge, Fallunterscheidung bezüglich Vorzeichen des Nenners

Ungleichungen Übungsaufgaben

Mittwoch, 18. September 2019

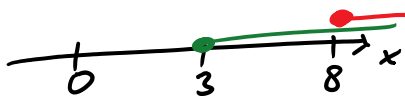
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichungen
a) $|x - 3| \geq 5$ b) $x^2 - 5x + 6 < 0$
- Für welche Werte gelten die Ungleichungen:
a) $x + 2 \geq 2x + 3$ b) $\frac{x+2}{x-1} \leq 4$ c) $x^3 - 6x^2 > 6 - 11x$ d) $\frac{1}{x+2} > 1$

1a) $|x - 3| \geq 5$

Fall 1: $x - 3 \geq 0$
 $x \geq 3$

$x - 3 \geq 5$

$x \geq 8$



$\mathbb{L}_1 = [8; \infty[$

Fall 2: $x - 3 < 0$
 $x < 3$

$-(x - 3) \geq 5$

$-x + 3 \geq 5 \quad | -3$

$-x \geq 2 \quad | \cdot (-1)$

$x \leq -2$



$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -2]$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; -2] \cup [8; \infty[$

1b) $x^2 - 5x + 6 < 0$

$(x - 2)(x - 3) < 0$

Vorzeichen-tabelle:



$\mathbb{L} =]2; 3[$

$\frac{x+2}{x-1} \leq 4$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Merke: Bei Ungleichungen mit Beträgen und Brüchen
ist (in der Regel) eine Fallunterscheidung nötig!!!!

1. Fall: Nenner positiv

2. Fall: Nenner negativ

1. Fall: Nenner positiv

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

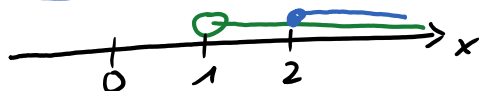
$$\frac{x+2}{x-1} \leq 4 \quad | \cdot (x-1)$$

$$x+2 \leq 4(x-1)$$

$$x+2 \leq 4x-4 \quad | -x; +4$$

$$6 \leq 3x \quad | :3$$

$$x \geq 2$$



$$\mathbb{U}_1 = [2; \infty[$$

2. Fall: Nenner negativ

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

$$\frac{x+2}{x-1} \leq 4 \quad | \cdot (x-1)$$

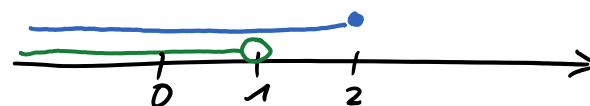
$$x+2 \geq 4(x-1)$$

$$x+2 \geq 4x-4 \quad | -x; +4$$

$$6 \geq 3x \quad | :3$$

$$2 \geq x$$

$$x \leq 2$$



$$\mathbb{U}_2 =]-\infty; 1[$$

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 =]-\infty; 1[\cup [2; \infty[= \mathbb{R} \setminus [1; 2[$$

Betragsungleichungen und Bruchungleichungen

Mittwoch, 18. September 2019

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

- a) $2x - 8 > |x|$
- b) $|x - 2| \geq x^2$ (Auch grafisch lösen)
- c) $|x| \leq x - 2$

d) $\frac{1}{5x^2 - 25x + 30} < 0$

e) $\frac{1}{x-1} > 2$

$|x - 2| \geq x^2$

b) Fallunterscheidung:

1. Fall: $x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$x - 2 \geq x^2 \quad | -x + 2$

$x^2 - x + 2 \leq 0$

$D < 0 \rightarrow \text{keine Lsg.}$

$\mathbb{L}_1 = \{ \}$

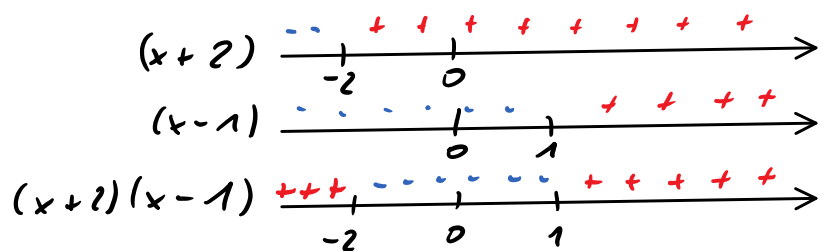
2. Fall: $x - 2 < 0$

$x < 2$

$-(x - 2) \geq x^2$

$x^2 + x - 2 \leq 0$

$(x + 2)(x - 1) \leq 0$



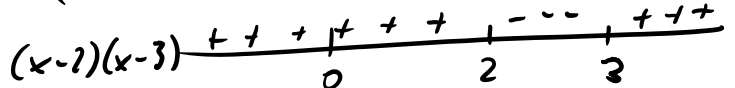
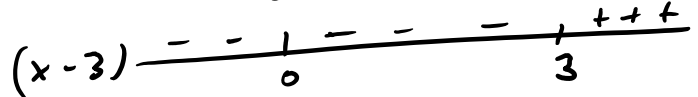
$\mathbb{L}_2 = [-2; 1]$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 = [-2; 1]$

d) $\frac{1}{5x^2 - 25x + 30} < 0$

$\frac{1}{5(x^2 - 5x + 6)} < 0$

$\frac{1}{5(x-2)(x-3)} < 0$



$\mathbb{L} =]2; 3[$

e) $\frac{1}{x-1} > 2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x - 1 > 0$

$x > 1$

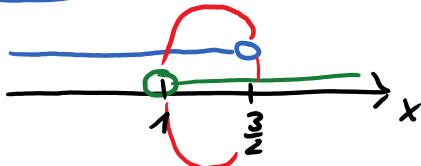
$$\frac{1}{x-1} > 2 \quad | \cdot (x-1)$$

$$1 > 2(x-1)$$

$$1 > 2x - 2 \quad | +2$$

$$3 > 2x \quad | :2$$

$x < \frac{3}{2}$



$\mathbb{L}_1 =]1; \frac{3}{2}[$

2. Fall: $x - 1 < 0$

$x < 1$

$$\frac{1}{x-1} > 2 \quad | \cdot (x-1)$$

$$1 < 2 \cdot (x-1)$$

$$1 < 2x - 2$$

$$x > \frac{3}{2}$$

$\mathbb{L}_2 = \{ \}$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 =]1; \frac{3}{2}[$

$$\frac{1}{|x-1|} > 2$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$1 > 2|x-1|$$

$$|x-1| < \frac{1}{2}$$

Fallunterscheidung: ...

$$\frac{x^2}{4x-6} \leq 1$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$

1. Fall: $4x - 6 > 0$

$x > \frac{3}{2}$

$$x^2 \leq 4x - 6 \quad | -4x + 6$$

$$x^2 - 4x + 6 \leq 0$$

$D < 0 \rightarrow$ keine Lösung

$\mathbb{L}_1 = \{ \}$

2. Fall: $4x - 6 < 0$

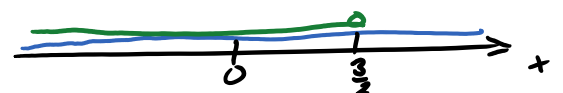
$x < \frac{3}{2}$

$$x^2 \geq 4x - 6$$

$$x^2 - 4x + 6 \geq 0$$

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

$D < 0$



$$U_2 =]-\infty; \frac{3}{2}[$$

$$U = U_1 \cup U_2 =]-\infty; \frac{3}{2}[$$

Betragsungleichungen 2

Mittwoch, 18. September 2019

Bestimmen Sie die reellen Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $|x - 1| \geq |x + 2|$

b) $-x^2 \leq |x + 4|$

c) $|x + 2| \geq x^2$