Lineare Gleichungssysteme

Mittwoch, 18. September 2019

Definition

$$\text{I} \quad x + 2y = 4$$
$$\text{II} \quad 2x - y = 3$$

$\rightarrow$ $x = 4 - 2y$ in II

$$2 \cdot (4 - 2y) - y = 3$$
$$8 - 4y - y = 3$$
$$8 - 5y = 3$$

$\underline{y = 1}$ in I $\quad x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

$\underline{x = 2}$

Einsetzungsverfahren:
Eine (beliebige) Gleichung nach einer Unbekannten auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.

Einsetzungsverfahren

Mittwoch, 18. September 2019

Beispiel 1:
$$I\ x + y = 11$$
$$II\ 2x - 3y = -8$$

Beispiel 2:
$$I\ -x + y + z = 0$$
$$II\ x - 3y - 2z = 5$$
$$III\ 5x + y + 4z = 3$$

$x = 11 - y$ in II (für x)

$2 \cdot (11 - y) - 3y = -8$

$22 - 2y - 3y = -8 \quad | +8 + 5y$

$30 = 5y \quad | :5$

$\underline{y = 6}$ in I $\quad \underline{x = 5}$

Additionsverfahren

Mittwoch, 18. September 2019

Beispiel:
$$I\ \ -x + y + z = 0 \qquad |\cdot 5 \qquad -5x + 5y + 5z = 0$$
$$II\ \ x - 3y - 2z = 5$$
$$III\ \ 5x + y + 4z = 3$$

$$I + II \qquad -2y - z = 5 \qquad (A) \qquad |\cdot 3 \qquad -6y - 3z = 15$$

$$I + III \qquad 6y + 9z = 3 \qquad (B)$$

$$A + B \qquad 6z = 18$$

$$\underline{z = 3} \qquad \text{in } A$$

$$-2y - 3 = 5$$

$$-2y = 8$$

$$\underline{y = -4} \qquad \text{in } I$$

$$-x + (-4) + 3 = 0$$

$$-x - 1 = 0$$

$$\underline{x = -1}$$

Graphische Lösung linearer GLS mit 2 Unbekannten

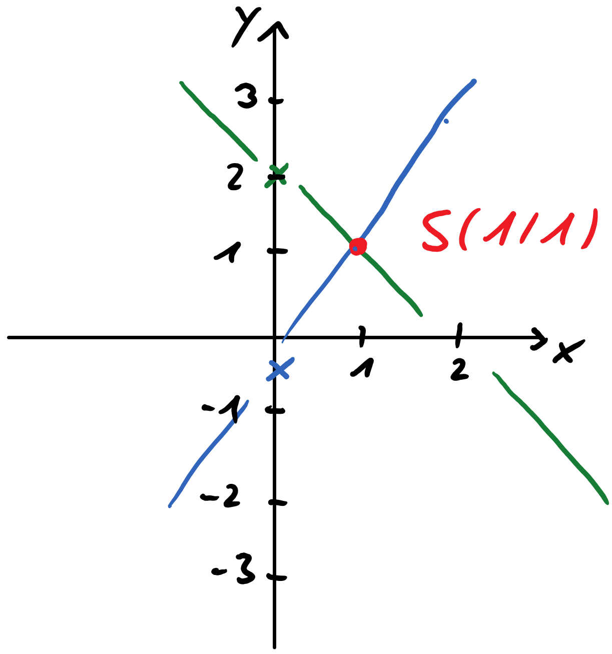
Mittwoch, 18. September 2019

Beispiel 1: $I \; x + y = 2$ $\quad | -x$
$II \; 3x - 2y = 1$ $\quad | -3x \; ; :(-2)$

$-2y = -3x + 1$

$I \quad y = -x + 2$

$II \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$



$\underline{x = 1}$

$\underline{y = 1}$

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (GLS)

Mittwoch, 18. September 2019

① Anzahl Gleichungen $\geq$ Anzahl Unbekannte

② Gleichungen müssen linear unabhängig sein.

$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot II = 0$ → λ_1 und λ_2 dürfen nur 0 sein.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} I & x + y = 2 \\ II & 2x + 2y = 4 \end{array}\right\}$$

GLS nicht eindeutig lösbar, denn $II = 2 \cdot I$

$-2I + 1 \cdot II = 0$

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{ll} I & x + y + z = 0 \\ II & 2x - y + 3z = 1 \\ III & 3x + 4z = 1 \end{array}\right\}$$

$1 \cdot I + 1 \cdot II = 1 \cdot III$

$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot II + \lambda_3 \cdot III = 0$

=> linear abhängige Gleichungen

GLS nicht eindeutig lösbar

Überbestimmtes GLS:

$I \quad x + y = 0$

$II \quad 2x - y = 5$

$III \quad 5x + 8y = 7$

$I + II \quad 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$; $y = -\frac{5}{3}$

einsetzen in III

$5 \cdot \frac{5}{3} + 8 \cdot (-\frac{5}{3}) = \frac{25}{3} - \frac{40}{3} = -\frac{15}{3} = 5 \neq 7$

GLS nicht lösbar

Übungsaufgabe Lineare Gleichungssysteme 1

Mittwoch, 18. September 2019

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ll}
I & u + 5v + w = -10 \quad | \cdot 3 \qquad 3u + 15v + 3w = -30 \\
II & -4u - 2v - 3w = -10 \\
III & 3u + v - w = -4
\end{array}
$$

I + III $\quad 4u + 6v = -14$

$2u + 3v = -7 \quad (A)$

I + II $\quad -u + 13v = -40 \quad (B) \quad | \cdot 2$

$-2u + 26v = -80$

A+B $\quad 29v = -87$

$\underline{v = -3}$ in (A)

$2u - 3 \cdot 3 = -7$

$2u - 9 = -7$

$2u = 2$

$\underline{u = 1}$ in I

$1 + 5 \cdot (-3) + w = -10$

$-14 + w = -10$

$\underline{w = 4}$

Strategie:

1. Eine Variable eliminieren, durch Addition / Subtraktion von Gleichungen. Koeffizienten entsprechend anpassen. Dazu jeweils zwei verschiedene Gleichungen gegeneinander verrechnen.

→ 2. Es entsteht ein neues Gleichungssystem mit nur noch 2 Gleichungen und 2 Unbekannten.

→ 3. Weiter wie 1. und die restl. Unbekannten durch Einsetzen errechnen.

Übungsaufgabe zu linearen Gleichungssystemen 2

Mittwoch, 18. September 2019

Beweisen Sie, dass das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt:

$I\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$ $\quad 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 0$
$II\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$
$III\ 4x_1 - 2x_2 = 0$

I − II $\quad 14x_2 - 7x_3 = 0$
$\quad 2x_2 - x_3 = 0 \quad (A)$

III − II $\quad 2x_2 - x_3 = 0 \quad (B)$

A − B $\quad 0 = 0 \quad (w)$

wahre Aussage, unabhängig von Variablen
→ GLS ist nicht eindeutig lösbar