

Gleichungen und Äquivalenzumformungen

Freitag, 13. September 2019

Bei einer Gleichung gilt, dass zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ gleich sind. Steht x in der 1. Potenz, dann kann man durch sogenannte **Äquivalenzumformungen** x isolieren und so die Lösungsmenge IL der Gleichung bestimmen.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$$x - 3 = 2x + 5 \quad | +3$$

$$x = 2x + 8 \quad | -x$$

$$0 = x + 8 \quad | -8$$

$$x = -8$$

$$IL = \{-8\}$$

Polynome

Freitag, 13. September 2019

Polynome sind Terme, bei denen x in einer bestimmten Potenz vorkommt.
Die höchste Potenz von x bestimmt den Grad des Polynoms. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Gleichungen, in denen nur Polynome vorkommen.

Beispiele:

$$a \cdot x + b \quad \text{Polynom 1. Grades}$$

$$ax^2 + bx + c \quad \text{Polynom 2. Grades}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{Polynom 3. Grades}$$

$\vdots$

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + dx + e \quad \text{Polynom } n\text{-ten Grades}$$

Polynome 2. Grades

Freitag, 13. September 2019

Lernziel: Polynome 2. Grades faktorisieren und Gleichungen mit Polynomen 2. Grades lösen, Lösungsformel kennen und anwenden können, Satz von Vieta

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungsformel für quadrat. Gleichungen

$D = b^2 - 4ac$ „Diskriminante“

3. Fälle:
1. $D > 0$: 2 Lösungen
 2. $D = 0$: 1 Lösung
 3. $D < 0$: keine Lösung

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Beispiel ① $3x^2 + 6x = 0$

$$3x \cdot (x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -2$$

$$\mathbb{L} = \{-2; 0\}$$

Sonderfall „ $c = 0$ “

→ keine Lösungsformel anwenden,
sondern ausklammern

② $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x_{1/2} = -1$$

$$\mathbb{L} = \{-1\}$$

Sonderfall „binomische Formel“

$a=1 \quad b=4 \quad c=3$

③ $1x^2 + 4x + 3 = 0$

Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -3 \quad \mathbb{L} = \{-3; -1\}$$

Satz von Vieta: „Nullstellen raten“

$$x^2 + \textcircled{4}x + \textcircled{3} = (x + \textcircled{x_1})(x + \textcircled{x_2}) = (x + 1)(x + 3)$$

↖ muss das Produkt aus x_1 und x_2 sein.
↗ muss die Summe aus x_1 und x_2 sein.

Beispiel: $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

Anmerkung: Vieta funktioniert nur, wenn $a=1$ (a : Die Zahl vor dem x^2) ist.
Ansonsten: zuerst a ausklammern.

Übungen zu den Polynomen 2. Grades

Freitag, 13. September 2019

Faktorisieren sie die folgenden Polynome. Wenden sie dabei das geeignetste Verfahren an!

- a) $3x^2 - 12x + 12$ **Binomische Formel** $3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$
- b) $x^2 + 1x - 2$ **Vieta** $(x+2)(x-1)$
- c) $3x^2 + 2x - 1$ **Lösungsformel** $x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad 3(x+1)(x-\frac{1}{3})$
- d) $x^2 + 4x + 3$ **Vieta** $(x+1)(x+3)$
- e) $6x^2 + x - 2$ **Lösungsformel** $x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad 6(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})$
- f) $7x^2 - 21x$ **Ausklammern** $7x(x-3)$
- g) $4x^2 - 12x - 40$ **Ausklammern + Vieta** $4(x^2 - 3x - 10) = 4(x+2)(x-5)$
- h) $36x^2 + 108x + 81$ **Binomische Formel** $(6x+9)^2 = 9(2x+3)^2$
- i) $4x^2 - 16x + 16$ **Binomische Formel** $4(x^2 - 4x + 4) = 4(x-2)^2$

Polynome 3.Grades

Freitag, 13. September 2019

Lernziel: Mit Polynomen 3.Grades umgehen können, Gleichungen mit Polynomen 3. Grades lösen, Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sonderfall $d = 0$: $ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$
↳ Polynom 2. Grades

Sonst: Polynomdivision

Polynome 3. Grades - Polynomdivision

Freitag, 13. September 2019

Beispiel:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Schritt 1: Eine Nullstelle raten

Setze 1 ein : $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ passt (✓) → Zahl 1 geraten

Schritt 2: Ansatz hinschreiben

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline -5x^2 + 11x \\ - (-5x^2 + 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ - (6x - 6) \\ \hline - - \end{array}$$

Schritt 3:

Polynomdivision
durchführen

Schritt 4: Ergebnis $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Polynome 3.Grades - Polynomdivision

Freitag, 13. September 2019

Beispiel: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

① $1 - 2 - 1 + 2 = 0$ (✓) $x_1 = 1$

② $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1) = x^2 - 1x - 2$ ③

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ - (x^3 - x^2) \quad \downarrow \\ \hline -x^2 - x \\ - (-x^2 + x) \quad \downarrow \\ \hline -2x + 2 \\ - (-2x + 2) \\ \hline - \quad - \end{array} = (x+1)(x-2)$$

④ $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 2$

Polynome 4.Grades

Freitag, 13. September 2019

Beispiel: $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Substitution: $u = x^2 \rightarrow x^4 = u^2$

$$u^2 + 4u + 3 = 0$$

$$(u + 3)(u + 1) = 0$$

$$u_1 = -3; u_2 = -1$$

Resubstitution: $u = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{u}$

$u_{1,2}$ sind negativ

$\rightarrow$ keine Lösung $\mathbb{L} = \{ \}$

Polynome 4. Grades

Freitag, 13. September 2019

Beispiel: $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

Subst.: $x^2 = u$

$$u^2 - 3u - 10 = (u+2)(u-5) = 0$$

$$u_1 = -2 ; u_2 = 5$$

Resubst.: $x = \pm\sqrt{u}$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \text{y}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$$

$$L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

Übungen zu den Polynomen höherer Ordnung

Freitag, 13. September 2019

Zerlegen Sie in Linearfaktoren:

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \quad x_1 = 4$

b) $-2x^3 + 20x^2 - 24x - 144$

c) $3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

Gleichungen mit Brüchen

Freitag, 13. September 2019

Beispiel 1: $\frac{x+52}{x+2} = 11$

Beispiel 2: $\frac{6x-24}{x-4} = 4$

Übungsaufgaben zu den Polynomen 3. Grades und

4. Grades 1

Freitag, 13. September 2019

Bestimmen Sie die Lösungen in $\mathbb{R}$

a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ $x(x^2 - 5x + 4) = x(x-4)(x-1) = 0$ $L = \{0; 1; 4\}$
 b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $u^2 - 13u + 36 = (u-4)(u-9) = 0$ $L = \{-3; -2; 2; 3\}$
 c) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$ $D = 169 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 5$ $u_{1/2} = \frac{13 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{3}{4} & x_{1/2} = \pm \frac{3}{2} \\ 1 & x_{3/4} = \pm 1 \end{cases}$

d) $\frac{9x+7}{5} - \frac{3x+2}{9} = \frac{3x+2}{3} - \frac{4x+2}{45}$ $HN: 45$ $\frac{9(9x+7)}{45} - \frac{5(3x+2)}{45} = \frac{15(3x+2)}{45} - \frac{4x+2}{45}$
 $9(9x+7) - 5(3x+2) = 15(3x+2) - (4x+2)$
 $81x + 63 - 15x - 10 = 45x + 30 - 4x - 2$
 $66x + 53 = 41x + 28 \quad | -41x - 53$
 $25x = -25$
 $x = -1$ $L = \{-1\}$

e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{2}\right)^2 - \left(\frac{13x}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = -(6x)^2 + 29$ $\frac{1 + 10x + 25x^2}{4} - \frac{169x^2 - 130x + 25}{4} = -36x^2 + 29 \quad | \cdot 4$
 $1 + 10x + 25x^2 - 169x^2 + 130x - 25 = -144x^2 + 116$
 $140x - 24 = 116 \quad | + 24$
 $140x = 140 \quad | : 140$
 $x = 1$ $L = \{1\}$

f) $\frac{3x+2}{2x-4} - \frac{3x^2+1}{2x^2-8} = \frac{16x+114}{4x^2+8x}$ $2x-4 = 2(x-2)$ $2x^2-8 = 2(x^2-4) = 2(x-2)(x+2)$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$
 $2x^2+4x = 2x \cdot (x+2)$
 $HN: 2x(x-2)(x+2)$

$\frac{(3x+2) \cdot x \cdot (x+2)}{2(x-2) \cdot x \cdot (x+2)} - \frac{(3x^2+1) \cdot x}{2(x-2)(x+2) \cdot x} = \frac{(8x+57)(x-2)}{2x(x+2)(x-2)}$
 $(3x+2) \cdot (x^2+2x) - (3x^3+1) \cdot x = (8x+57)(x-2)$
 $3x^3 + 6x^2 + 2x^2 + 4x - 3x^3 - x = 8x^2 - 16x + 57x - 114 \quad | -3x + 114$
 $114 = 38x \quad | : 38$
 $x = 3$ $L = \{3\}$

g) $\frac{x-4}{x+4} = \frac{1-x}{1+x}$ $HN: (x+4)(x+1)$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$
 $\frac{(x-4)(x+1)}{(x+4)(x+1)} = \frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x+4)}$

$$(x-4)(x+1) = (1-x)(x+4)$$

$$x^2 + x - 4x - 4 = x + 4 - x^2 - 4x$$

$$x^2 - 3x - 4 = -x^2 - 3x + 4 \quad | +x^2 + 3x - 4$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2(x^2 - 4) = 0$$

$$2(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_{1/2} = \pm 2$$

$$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$$