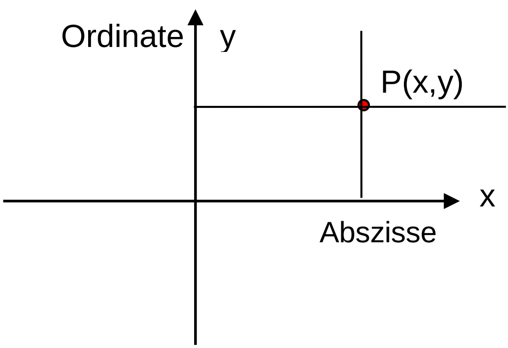
6 Analytische Geometrie

6.1 Ebene Koordinatensysteme

Das Prinzip der analytischen Geometrie besteht darin, geometrische Probleme mit Hilfe rechnerischen Methoden anstatt mit Lineal und Zirkel zu behandeln. Dies wird dadurch erreicht, dass man den Punkten der Ebene Zahlen zuordnet und ein geometrisches Gebilde als Menge von Punkten auffasst, zwischen denen gewisse Beziehungen bestehen.

Die Zuordnung von Punkten zu Zahlen geschieht durch ein Koordinatensystem. Ein Punkt auf einer Zahlengeraden wird durch eine einzige Zahl festgelegt. Um jeden Punkt der Ebene zahlenmäßig darstellen zu können, benötigt man zwei Zahlen, für einen Punkt im dreidimensionalen Raum drei Zahlen. Es liegt deshalb nahe, zur Beschreibung eines Punktes in der Ebene zwei Zahlengerade in zwei Richtungen zu benutzen, am einfachsten mit Hilfe von zwei Zahlengeraden, die aufeinander senkrecht stehen. Dies ist allerdings nicht zwingend notwendig. Für manche Probleme ist es zweckmäßig, ein schiefwinkliges Koordinatensystem zu definieren.



Folgende Bezeichnungen sind üblich:

Eine Richtung wird i.a. in die horizontale Richtung gelegt. Man nennt sie Abszisse. Die Zahlen des Zahlenpaars, die auf dieser Zahlengeraden abgetragen werden, bekommen oft die Bezeichnung x. **X** ist somit die Menge aller Werte in horizontaler Richtung, die die Punkte P(x,y) auf der geometrischen Figur annehmen können.

Die zweite Zahlgerade senkrecht zur Richtung x heißt Ordinate. Die Zahlen, die auf dieser Geraden abgetragen werden, tragen oft die Bezeichnung y. **Y** ist damit die Menge der Werte y , die die Punkte auf der geometrischen Figur annehmen können.

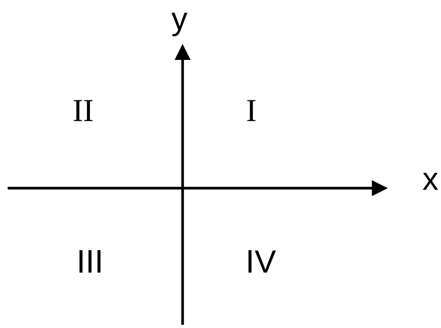
Der Schnittpunkt der beiden Zahlgeraden ist der Nullpunkt des Koordinatensystems. Zweckmäßiger Weise ist der Nullpunkt gleichzeitig Nullpunkt beider Zahlgeraden.

Die beiden Zahlengeraden nennt man Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems (nach René Descartes, franz. Mathematiker), die Zahlenwerte zur Beschreibung der Lage eines Punktes nennt man seine Koordinaten. Einen Punkt P der geometrischen Figur erreicht man dadurch, dass man den x-Wert auf der Abszisse abträgt und an dieser Stelle eine Parallele zur Ordinate zieht. Ebenso trägt man den y-Wert auf der Ordinate ab und zieht eine Parallele zur Abszisse. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist der Ort des Punktes P(x,y).

Entsprechend der häufigen Verwendung der Bezeichnungen x und y nennt man die Abszisse auch oft x – Achse und die Ordinate y – Achse.

Die beiden Zahlgeraden unterteilen die gesamte Ebene in vier Teile; man nennt sie Quadranten des Koordinatensystems.

Bei der Definition eines Winkels wird festgelegt, dass ein Drehsinn entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn einen positiven Winkel definiert. Entsprechend bedeutet ein Rechtskoordinatensystem, dass man die erste Achse (Abszisse) gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, um auf kürzestem Weg die Achse mit der Ordinate zur Deckung zu bringen.

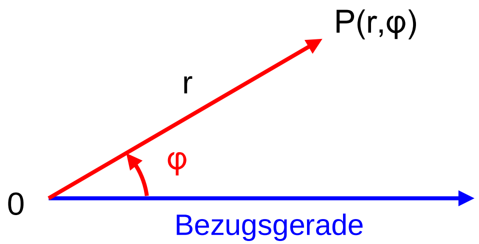


Entsprechend nummeriert man die vier Quadranten in der Reihenfolge, in der man sie bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn überfährt.

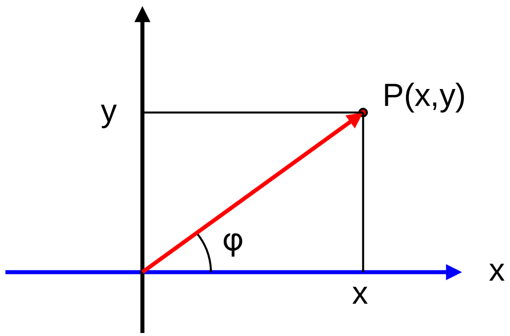
<u>Polarkoordinatensystem</u>

Ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem ist nicht die einzige Möglichkeit, Punkte in der Ebene darzustellen. Man kann dies auch durch Angabe eines Winkels und eines Abstands von einem Bezugspunkt erreichen.

Der Winkel wird von einer Bezugsgeraden aus im mathematisch positiven Sinn abgetragen. Auf dem Winkelstrahl kann man den Abstand vom Nullpunkt aus abtragen.



Hat man einen Zusammenhang in x – y – Koordinaten gegeben, dann kann man diesen leicht in Polarkoordinaten umrechnen. Man benutzt die x – Achse als Bezugsgerade für den Winkel und kann x ersetzen durch:



$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

Indem man alle vorkommenden x und y durch r und φ ersetzt, erhält man alle Punkte der geometrischen Figur in Abhängigkeit der neuen Variablen r und φ.

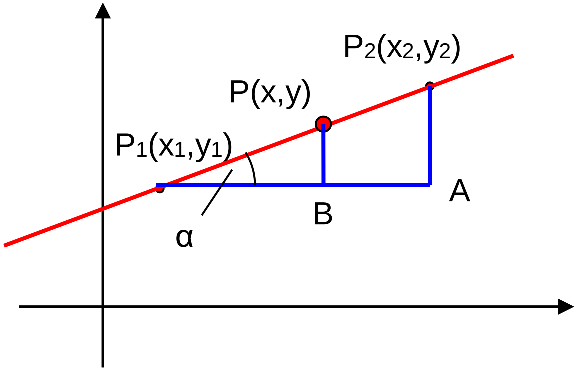
6.2 Geometrische Örter

In der analytischen Geometrie sucht man Funktionsgleichungen, die für Punktmengen mit ganz bestimmten Eigenschaften gelten. Im folgenden werden Probleme mit folgenden Fragestellungen behandelt:

- Gesucht ist eine Gleichung für den geometrischen Ort aller Punkte, die auf einer geraden Linie liegen und durch zwei gegebene Punkte gehen. (Gerade)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben. (Kreis)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt aus und von einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben. (Parabel)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist. (Ellipse)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist. (Hyperbel)

Die Methode, um solche Probleme zu lösen, besteht darin, einen Punkt mit variablen Koordinaten $P(x,y)$ oder $P(r,\varphi)$ zu definieren, der die geforderten Eigenschaften aufweist. Die gestellte Forderung wird durch Gleichungen (oder eine Gleichung) erfüllt, die für die Koordinaten des Punktes erfüllt sein müssen. Das einfachste Problem dieser Art ist die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte.

6.3 **Die Gleichung der Geraden**



Falls der Punkt P(x,y) auf der Verbindungsgeraden zwischen P_1 und P_2 liegen soll, müssen die beiden Dreiecke P_1 – A – P_2 und P_1 – B – P ähnlich sein, d.h. es muss gelten:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

aufgelöst nach y ergibt sich:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1$$

Dies nennt man die Zweipunkteform der Geradenglei-chung.

Der Faktor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist gleichzeitig der tan α, der Tan-gens des Anstiegswinkels der Geraden.

Fasst man die Terme etwas zusammen, erhält man die einfachere Form der Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + c$$

mit

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$c = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = y_1 - m \cdot x_1$$

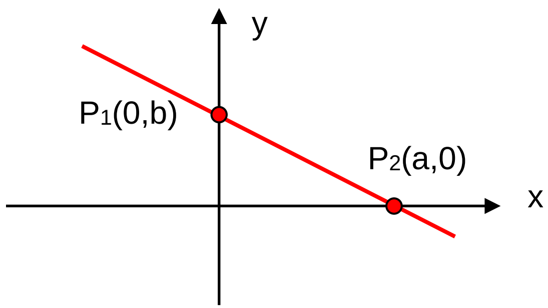
Die obige Form der Geradengleichung nennt man die kartesische Normalform der Geradengleichung. Es sind folgende Sonderfälle zu beachten:

c = 0: y = m·x
Die Gerade geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems

m = 0: Die Gerade hat die Steigung null und verläuft parallel zur x – Achse im Abstand c

x = c: Die Gerade verläuft parallel zur y – Achse im Abstand c

Aus der kartesischen Normalform kann man unmittel-



bar die Steigung $m = \tan \alpha$ der Geraden ablesen, Setzt man $x = 0$, erhält man unmittelbar die Stelle y, an der die Gerade die y – Achse schneidet.

Soll gleichzeitig auch der Schnittpunkt mit der x - Achse bequem aus der Geradengleichung ablesbar sein, kann man aus der Zweipunkt – Form ebenfalls eine passende Gleichung ableiten: angenommen, die Gerade soll durch die beiden Punkte $P_1(0,b)$ und $P_2(a,0)$ gehen:

$$\frac{y-b}{x-0} = \frac{0-b}{a-0} \qquad \frac{y-b}{-b} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Aus dieser Form der Gleichung sind die beiden Achsabschnitte a und b unmittelbar ablesbar.

Beispiel:

Die Geradengleichung $\quad y = \frac{3}{2} \cdot x - 2$

soll auf die Achsabschnittsform gebracht werden.

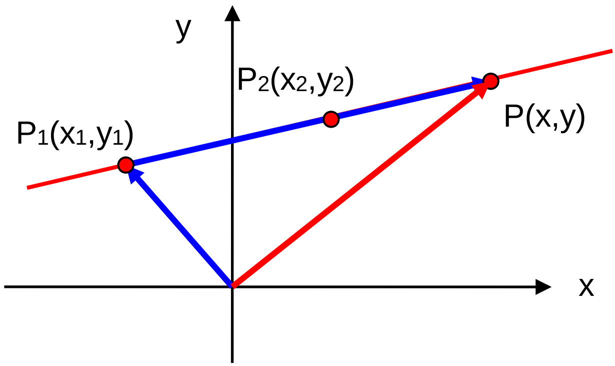
$$y = \frac{3}{2} \cdot x - 2 \quad \left| :2 \right.$$

$$\frac{y}{2} + 1 = \frac{3}{4} \cdot x$$

$$\frac{3}{4} \cdot x - \frac{y}{2} = 1$$

6.4 Die Geradengleichung in Vektorform

Gibt man wieder zwei Punkte in der Ebene vor, dann kann man jeden Punkt der Gerade dadurch erreichen, dass man zu einem Punkt vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus einen Vektor zieht und zu diesem einen zweiten Vektor addiert, der die Richtung der Geraden hat und mit einem Skalar multipliziert ist.



Einheitsvektor in Richtung der Geraden:

$$\vec{e}_G = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Betrag\ des\ Vektors}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Dabei ist α der Anstiegswinkel der Geraden bzw. der Winkel zwischen der x – Achse und der Geraden.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um zwei Gleichungen mit dem Parameter k. Eliminiert man k, erhält man wieder eine Geradengleichung:

$$x = x_1 + k \cdot \cos\alpha \qquad k = \frac{x - x_1}{\cos\alpha}$$

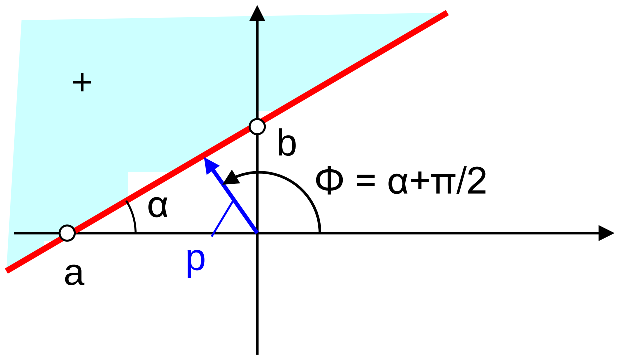
$$y = y_1 + k \cdot \sin\alpha \qquad y = y_1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot (x - x_1)$$

$$y = \tan\alpha \cdot x + c = m \cdot x + c$$

Durch die Festlegung des Einheitsvektors durch die Wahl und die Reihenfolge der beiden gegebenen Punkte hat die Gerade eine gewisse Orientierung erhalten, so dass es gerechtfertigt ist, von der linken und der rechten Seite der Geraden zu sprechen. Man bezeichnet die Seite der Geraden, die beim Passieren der Geraden auf der linken Seite liegt, als die positive Halbebene, die rechte Seite als die negative Halbebene.

6.5 Die Hesse’sche Normalform der Geradengleichung

In den bisher besprochenen Formen der Geradengleichung konnte entweder die Richtung und der Achsabschnitt auf der y – Achse oder die beiden Achsabschnitte auf der x- und y – Achse direkt abgelesen werden. Es ist gelegentlich zweckmäßig, eine Form der Geradengleichung zu ermitteln, bei der direkt der Abstand der Geraden vom Nullpunkt erscheint.



Geht man von der Achsabstandsform aus:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

dann kann man a und b ersetzen durch:

$$a\cdot\sin\alpha = p \qquad b\cdot\cos\alpha = p$$

$$a=\frac{p}{\sin\alpha} \qquad b=\frac{p}{\cos\alpha}$$

mit $\alpha=\varphi-\frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$$\sin\alpha=\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi$$

$$\cos\alpha=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi$$ eingesetzt:

$$\frac{x}{p}\cdot\cos\varphi+\frac{y}{p}\cdot\sin\varphi=1$$

$$x\cdot\cos\varphi+y\cdot\sin\varphi-p=0$$

Dies ist die Hesse'sche Normalform. In dieser Gleichung ist:

p : der Abstand vom Koordinatenursprung. Dieser kann positiv und negativ sein, je nach dem, ob er auf der positiven oder der negativen Seite der Geraden liegt.

φ der Winkel zwischen der Normalen auf die Gerade und der x – Achse.

Mit Hilfe der Hesse'schen Normalform kann man besonders bequem Parallelen zu einer gegebenen Geraden auffinden. Soll eine Parallele im Abstand d gefunden werden, muss man nur den Abstand p vergrößern oder verkleinern.

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - \left(p \pm d\right) = 0$$

Sucht man den Abstand eines beliebigen Punktes von der Geraden, dann legt man eine Parallele durch diesen Punkt und berechnet den neuen Abstand d.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte $P_1(5, 6)$, $P_2(-1, 2)$.
$P_3(3, 6)$ und $P_4(-4, -4)$

Gesucht ist die Gleichung der Geraden in der kartesischen Normalform und in der Achsabschnittsform, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht.

Wie groß ist der Abstand der Geraden zum Koordinatennullpunkt?

Wie lauten die Gleichungen der Parallelen zu der berechneten Geraden, die durch die beiden Punkte P_3 und P_4 gehen?

Wie groß sind die Abstände der Punkte P_3 und P_4 von der berechneten Geraden?

Lösung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{-1-5} = \frac{2}{3}$$

$$c = -m \cdot x_1 + y_1 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + 6 = \frac{8}{3}$$

kartesische Normalform: $y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{3}$

Achsabschnittsform: $\frac{y}{8/3} - \frac{x}{4} = 1$

$$a = -4; \qquad b = \frac{8}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} \qquad \alpha = 0{,}588$$

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

Hesse’sche Normalform:

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$$

Setzt man z.B. den Punkt P_1 ein, erhält man p:

$$p = 2{,}2188$$

Das ergibt die Gleichung:

$$-0{,}5547 \cdot x + 0{,}8320 \cdot y - 2{,}2188 = 0$$

Parallele zur Geraden:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - (2,2188 + d) = 0$$

Einsetzen Punkt P_3 (3,6):

Abstand der Geraden: $d = 1,1094$

Gleichung durch P_3:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - 3,3282 = 0$$

Gleichung durch P_4:

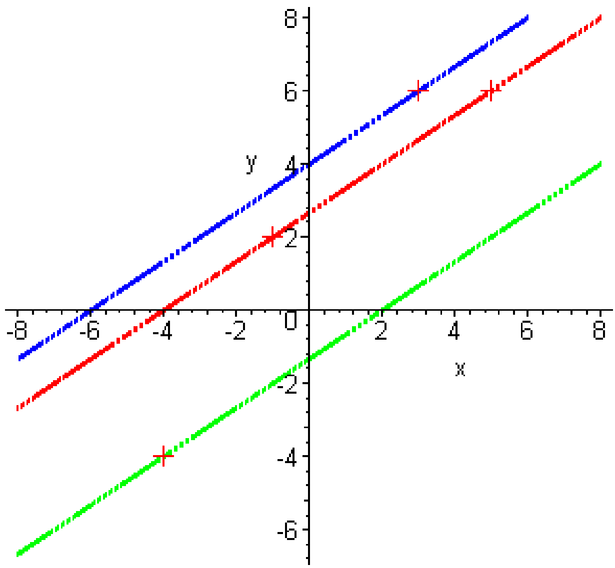
$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - 2,2188 - d = 0$$

Einsetzen des Punkts P_4 (-4,-4):

Abstand von der Geraden: $d = -3,3282$

Gleichung durch P_4:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y + 1,1094 = 0$$



Folgerungen:

- Das positive Vorzeichen für p ist folgendermaßen zu interpretieren;
  p ist dann positiv, wenn der Richtungsvektor der Geraden $\vec{e}_G$ mit dem Vektor der Normalen (Vektor mit der Länge p vom Nullpunkt zur Geraden) $\vec{n}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bildet.
  Ist p negativ, dann bildet $\vec{e}_G$ mit $\vec{n}$ ein Linkssystem.
  Der Nullpunkt liegt in der negativen Halbebene.
- Ist der Abstand d der Parallelen zur gegebenen Geraden positiv, dann ist der Abstand zum Nullpunkt größer als der der gegebenen Geraden.
- Ist d negativ, dann verkleinert sich der Abstand zum Nullpunkt gegenüber der gegebenen Gerade.

6.6 Die allgemeine Form der Geradengleichung

Die allgemeinste Form der Geradengleichung lautet:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Daraus lassen sich alle der bisher besprochenen Formen gewinnen.

- Division durch B und Auflösung nach y ergibt:
  $$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$
  Somit ist die Steigung der Geraden:
  $$m = \tan \alpha = -\frac{A}{B}$$

und der Achsabschnitt auf der y – Achse

$$c = -\frac{C}{B}$$

- Die Achsabschnittsgleichung erhält man durch Division durch – C:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

mit $a = -\frac{C}{A}$ $b = -\frac{C}{B}$

- Dividiert man die allgemeine Gleichung durch

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

erhält man

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Quadriert und addiert man die beiden Koeffizienten bei x und y, dann ergibt sich 1; man kann also den Koeffizienten bei x als $\cos\varphi$ eines Winkels und den Koeffizient bei y als $\sin\varphi$ interpretieren. Dies entspricht der Hesse'schen Normalform mit

$$p = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6.7 Schnittpunkt zweier Geraden, die Winkelhalbierende

Der Schnittpunkt zweier Geraden ist ein Punkt, der beiden geraden gemeinsam ist und für den beide Geradengleichungen gelten müssen. Hat man also zwei Gleichungen der allgemeinen Form, dann sucht man die Werte von x und y, die beiden Gleichungen gemeinsam sind, also die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = c_1$$
$$b_1 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$$

Es gibt zahlreiche Methoden, solch ein Gleichungssystem zu lösen, z.B. die Cramer'sche Regel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Im Zähler und im Nenner stehen jeweils zwei Determinanten:
Die Nennerdeterminante besteht aus den Koeffizienten der linken Seite des Gleichungssystems, in der Zählerdeterminante ist die Spalte, in der die Unbekannte steht, durch die rechte Seite ersetzt.

Beispiel:

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2 \cdot x - 5 \cdot y = 8$$
$$-4 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

Die Nennerdeterminante lautet:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14$$

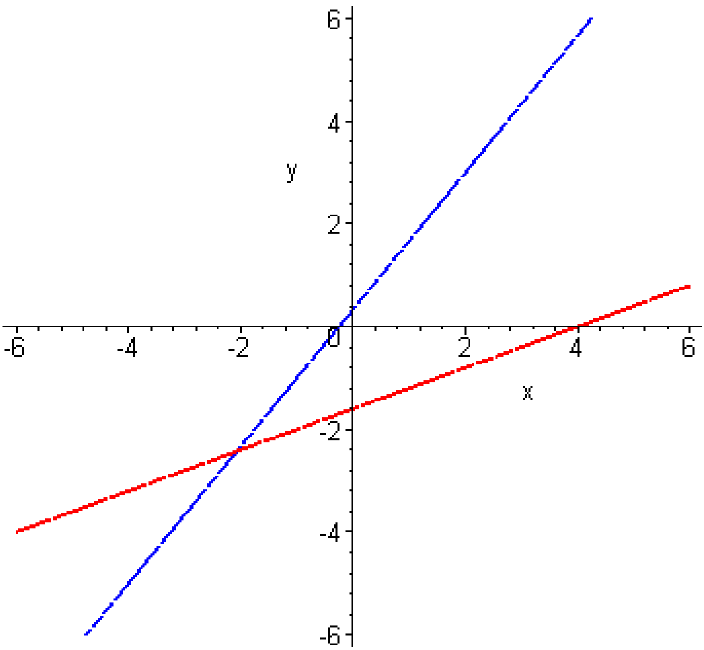
Die Zählerdeterminante für die x – Werte:

$$\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 29$$

Die Zählerdeterminante für die y – Werte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 34$$

Dies ergibt den Schnittpunkt $x = -\frac{29}{14}$ $\quad y = -\frac{34}{14}$



Der Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden lässt sich einfach aus der kartesischen Normalform berechnen, da diese direkt den Steigungswinkel der Geraden enthält:

$$y = m_1 \cdot x + c_1 = \tan\alpha_1 \cdot x + c_1$$
$$y = m_2 \cdot x + c_2 = \tan\alpha_2 \cdot x + c_2$$

Der Schnittwinkel ist die Differenz der beiden Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$. Aus einer Tabelle der Additionstheoreme entnimmt man

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Im vorigen Beispiel ist $m_1 = 0{,}4$ und $m_2 = 4/3$. Der Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden ist somit:

$$\tan\varphi = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{20-6}{15}}{\frac{23}{15}} = \frac{14}{23}$$

$$\widehat{\varphi} = 0{,}5468 \pm k \cdot \pi \qquad \varphi = 31{,}33° \pm k \cdot 180°$$

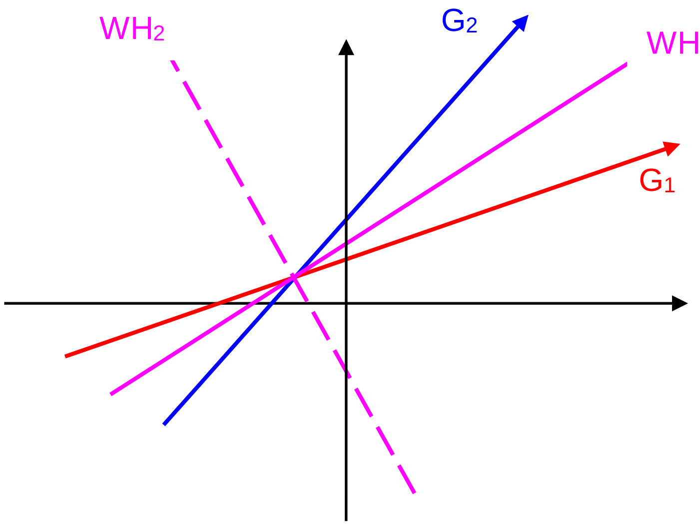
Vertauscht man die Reihenfolge und bildet $\alpha_1 - \alpha_2$, dann erhält man den stumpfen Winkel

$$\pi - \widehat{\varphi} = 2{,}5948 \qquad 180 - \varphi = 148{,}67°$$

Aus obiger Beziehung erhält man auch die Bedingung dafür, dass zwei Gerade sich unter dem Winkel von 90° schneiden. In diesem Fall geht der Tangens gegen unendlich, d.h. der Nenner gegen null. Es muss also sein: $1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden an jeder Stelle den gleichen Abstand haben.

Damit bietet es sich an, die Hesse’sche Normalform der beiden Geraden heranzuziehen und zum Abstand p der beiden Geraden jeweils einen zusätzlichen Ab-



stand d hinzuzuzählen, der für beide gerade gleich sein muss. Dafür gibt es allerdings zwei Möglichkeiten:

Wie im vorigen Absatz dargelegt, ist ein Abstand dann positiv, wenn er in Richtung der positiven Halbebene der Gerade geht. Zählt man zu den beiden gezeichneten gerichteten Geraden einen positiven Abstand d hinzu, dann berechnet man die Winkelhalbierende WH_2. Genau so erhält man WH_2, wenn man jeweils bei beiden Geraden einen Abstand d abzieht Will man die Winkelhalbierende WH_1, dann muss man bei einer Geraden d addieren und bei der anderen d abziehen.

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - \left(p + d\right) = 0$$
$$d = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p$$

Die beiden Abstände sind gleich:

$$x \cdot \cos\varphi_1 + y \cdot \sin\varphi_1 - p_1 = x \cdot \cos\varphi_2 + y \cdot \sin\varphi_2 - p_2$$

Gleichung der Winkelhalbierenden WH_2:

$$x \cdot \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right) + y \cdot \left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) - \left(p_1 - p_2\right) = 0$$

Falls d_2 gleich $-d_1$ gesetzt wird:

Gleichung der Winkelhalbierenden WH_1:

$$x \cdot \left(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + y \cdot \left(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\right) - \left(p_1 + p_2\right) = 0$$

Beispiel:

Zu den beiden Geraden des vorigen Beispiels sollen die Winkelhalbierenden gesucht werden:

$$1.) \qquad 2 \cdot x - 5 \cdot y = 8$$
$$2.) \qquad -4 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

Lösung:

Hesse’sche Normalform

Gleichung 1: $$\frac{2}{\sqrt{4+25}} \cdot x - \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot y - \frac{8}{\sqrt{29}} = 0$$

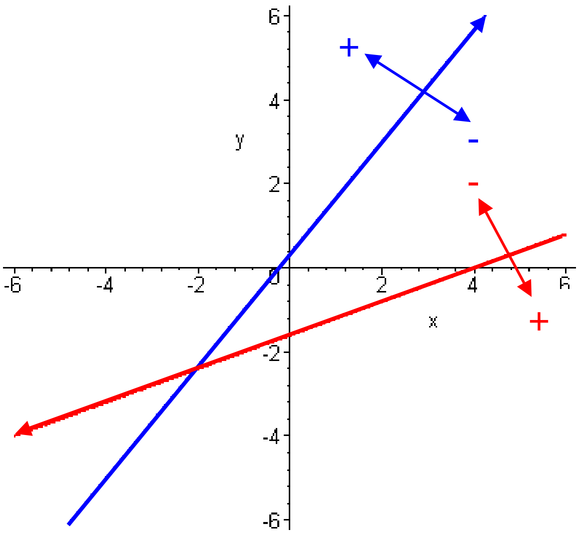
$$\cos\varphi_1 = 0{,}3714 \qquad \sin\varphi_1 = -0{,}9285 \qquad p_1 = 1{,}4856$$

Gleichung 2:

$$-\frac{4}{\sqrt{25}}\cdot x+\frac{3}{5}\cdot y-\frac{1}{5}=0$$

$$\cos\left(\varphi_2\right)=-0{,}8 \qquad \sin\left(\varphi_2\right)=0{,}6 \qquad p_2=\frac{1}{5}$$

Die Orientierung der Geraden wird dadurch bestimmt, dass in die Hesse'sche Normalform der Geradengleichungen jeweils ein Punkt zu beiden Seiten der Geraden eingesetzt wird. Ergibt sich ein positiver Wert, befindet man sich auf der positiven Seite der Geraden.



Probeweises Einsetzen des Punkts (-2, 2) ergibt die skizzierte Orientierung.

Verwendet man die erste Form der Hesse'schen Normalform, d.h. rechnet man mit gleichen Abständen, dann geht die Winkelhalbierende durch den kleineren der beiden Winkel.

<u>$d_1 = d_2$:</u>

$$x\cdot\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right)+y\cdot\left(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2\right)-\left(p_1-p_2\right)=0$$

$$x\cdot\left(0,37130+0,8\right)+y\cdot\left(-0,92848-0,6\right)-\left(p_1-p_2\right)=0$$

Winkelhalbierende 1:

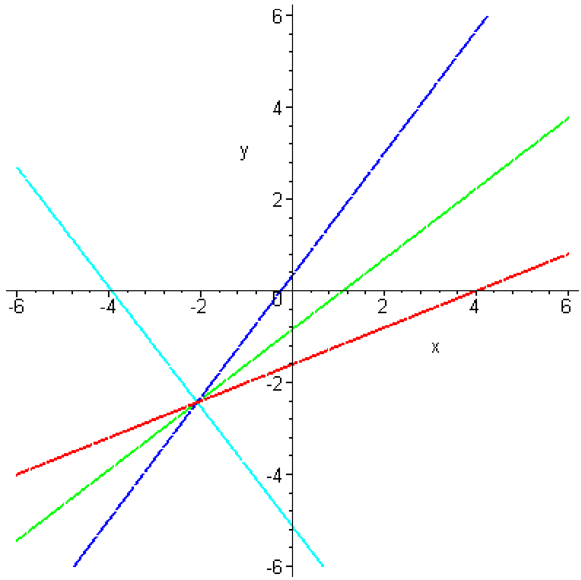
$$1,1714\cdot x-1,5285\cdot y-1,285=0$$

<u>$d_1 = -d_2$:</u>

$$x\cdot\left(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2\right)+y\cdot\left(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2\right)-\left(p_1+p_2\right)=0$$

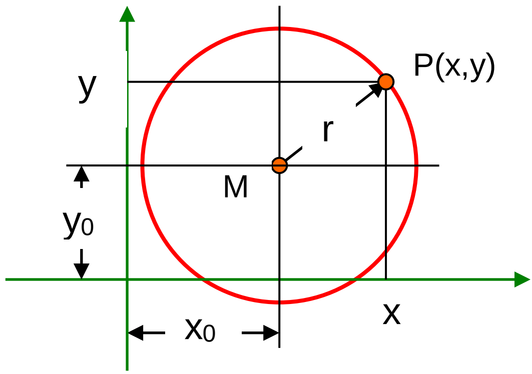
Winkelhalbierende 2:

$$-0,4286\cdot x-0,3285\cdot y-1,6855=0$$



6.8 Der Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M (x_0, y_0) den gleichen Abstand r haben.



Damit lautet die Kreisgleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Für den Spezialfall, dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt, also $x_0 = y_0 = 0$ ist, gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Liegt der Mittelpunkt auf einer der Koordinatenachsen, z.B. der x – Achse, dann ist $y_0 = 0$.

Löst man die Kreisgleichung nach y auf, erkennt man, dass die Funktion nicht eindeutig ist. Gibt man einen bestimmten x – Wert von, erhält man zwei y – Werte:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0$$

da ein oberer und ein unterer Kurvenzweig existiert.

Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden:

Soll ein Kreis mit einer Geraden zum Schnitt gebracht werden, muss x und y aus den beiden Gleichungen

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$y=m\cdot x+c$$

bestimmt werden. Dies führt immer auf eine quadratische Gleichung in x (oder y), aus der

- zwei reelle Lösungen oder
- eine reelle Lösung oder
- keine reelle Lösung

hervorgeht.

Beispiel:

Wie ist die Größe c zu wählen, damit die Gerade

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+c$$

den Kreis: $(x-3)^2+y^2=16$

- in zwei Punkten schneidet?
- gerade berührt?
- passiert?

Lösung:

$$x^2-6\cdot x+9+\frac{1}{4}\cdot x^2+x\cdot c+c^2-16=0$$

$$\frac{5}{4}\cdot x^2+(c-6)\cdot x+c^2-7=0$$

Dies ergibt die Schnittpunkte:

$$x_{1,2} = -\frac{2\cdot c}{5} + \frac{12}{5} \pm \frac{2\cdot\sqrt{71-4\cdot c^2 - 12\cdot c}}{5}$$

Wenn die Diskriminante unter der Wurzel gleich null ist, ergibt sich nur eine Lösung, d.h. es handelt sich um einen Berührungspunkt:

$$71-4\cdot c^2 - 12\cdot c = 0$$

- für

  $$c_1 = -\frac{3}{2} + 2\cdot\sqrt{5} \qquad c_2 = -\frac{3}{2} - 2\cdot\sqrt{5}$$

  $$c_1 = 2{,}9721 \qquad c_2 = -5{,}9721$$

  ergeben sich Berührungspunkte

- Im Bereich $-5{,}9721 < c < 2{,}9721$

  ergeben sich zwei Schnittpunkte.

- Für $c < -5{,}9721$ und $c > 2{,}9721$

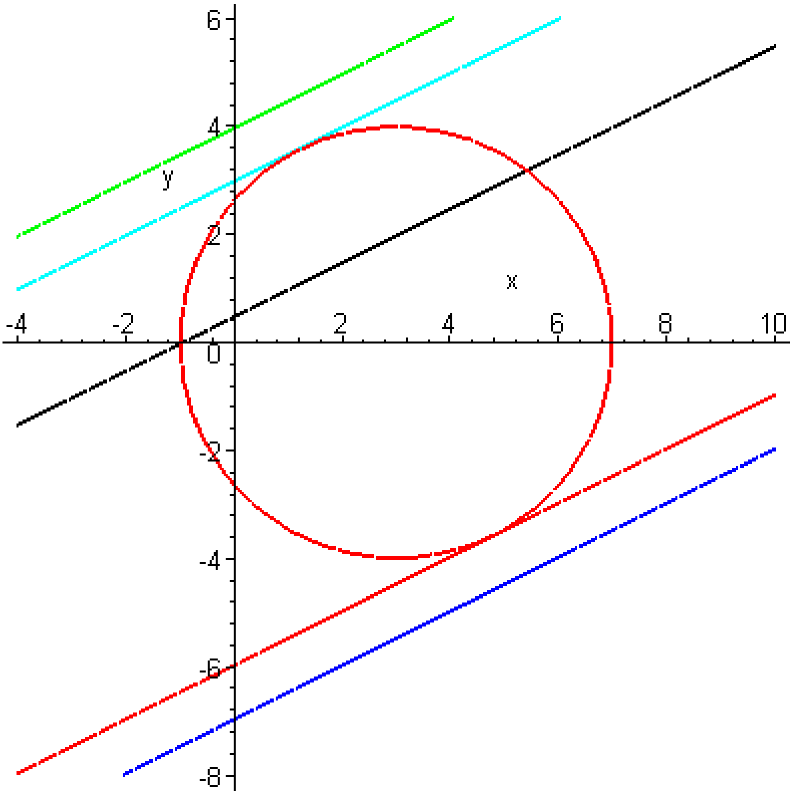
  gibt es keine Schnittpunkte.

Die folgende Graphik zeigt den Kreis und Gerade mit

$$c_1 = -1 + 2\cdot\sqrt{5} \qquad c_2 = -\frac{3}{2} + 2\cdot\sqrt{5}$$

$$c_3 = -\frac{5}{2} + 2\cdot\sqrt{5} \qquad c_4 = -\frac{3}{2} - 2\cdot\sqrt{5}$$

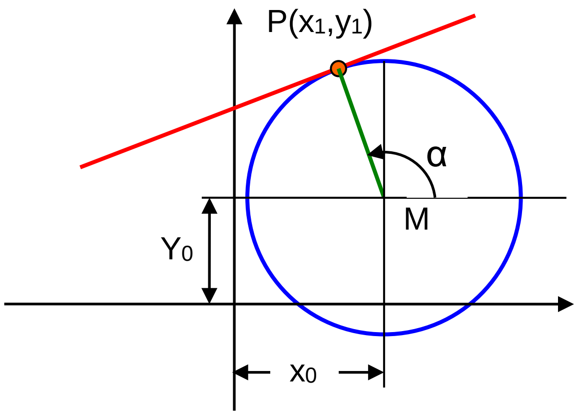
$$c_5 = -2 - 2\cdot\sqrt{5}$$



Weitere Probleme im Zusammenhang mit Kreis und Gerade sind:

- Berechnung einer Tangente an einen gegebenen Punkt des Kreises
- Berechnung einer Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises.

<u>Tangente an einen gegebenen Punkt eines Kreises.</u>



Zunächst wird die Steigung α der Normalen berechnet.

$$\tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Tangente und Normale stehen aufeinander senkrecht, d.h.

$$\tan\alpha_G = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

$$y = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Die Gleichung kann man noch umformen und man erhält die für manche Zwecke praktischere Form:

$$(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_1 - y_0) = r^2$$

Falls der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt, vereinfacht sich die Gleichung:

$$y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

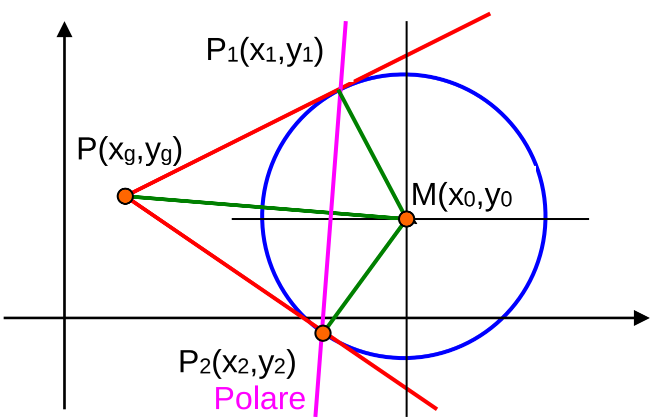
$$y \cdot y_1 = -x \cdot x_1 + x_1^2 + y_1^2$$

Da der Punkt P auf dem Kreis liegt, gilt: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Gleichung der Tangente:

$$y \cdot y_1 + x \cdot x_1 = r^2$$

<u>Gleichung der Tangente von einem außerhalb gelegenen Punkt:</u>



Angenommen, die Berührungspunkte seien bekannt, dann kann man die Geradengleichungen durch diese Punkte nach obiger Formel angeben:

$$\left(x-x_0\right)\cdot\left(x_1-x_0\right)+\left(y-y_0\right)\cdot\left(y_1-y_0\right)=r^2$$
$$\left(x-x_0\right)\cdot\left(x_2-x_0\right)+\left(y-y_0\right)\cdot\left(y_2-y_0\right)=r^2$$

Beide Geraden müssen durch den Punkt $P(x_g,y_g)$ gehen

$$\left(x_g-x_0\right)\cdot\left(x_1-x_0\right)+\left(y_g-y_0\right)\cdot\left(y_1-y_0\right)=r^2$$
$$\left(x_g-x_0\right)\cdot\left(x_2-x_0\right)+\left(y_g-y_0\right)\cdot\left(y_2-y_0\right)=r^2$$

Diese beiden Gleichungen kann man nun allerdings auffassen, als hätte man in eine Geradengleichung für x und y die beiden Punkte $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ eingesetzt. Ersetzt man x_1 und y_1 durch x und y, erhält man die Gleichung der sog. Polaren:

$$\left(x_g-x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\left(y_g-y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)=r^2$$

Bringt man diese Gerade mit dem Kreis zum Schnitt, kann man die beiden Berührungspunkte berechnen und mit der Zweipunkteformel die Gleichungen der Tangenten berechnen.

Beispiel:

Vom Punkt P(-4,-3) aus sollen die beiden Tangenten an den Kreis

$$\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$$

berechnet werden.

Lösung:

Aus der Kreisgleichung liest man ab:

$$x_0 = 3; \qquad y_0 = 2$$

Mit $x_g = -4;\ y_g = -3;$ erhält man die Gleichung der Polaren:

$$(-4-3)\cdot(x-3)+(-3-2)\cdot(y-2)=4$$
$$-7\cdot x+21-5\cdot y+10=4$$
$$7\cdot x+5\cdot y=27$$

Eingesetzt in die Kreisgleichung ergeben sich die beiden Lösungen:

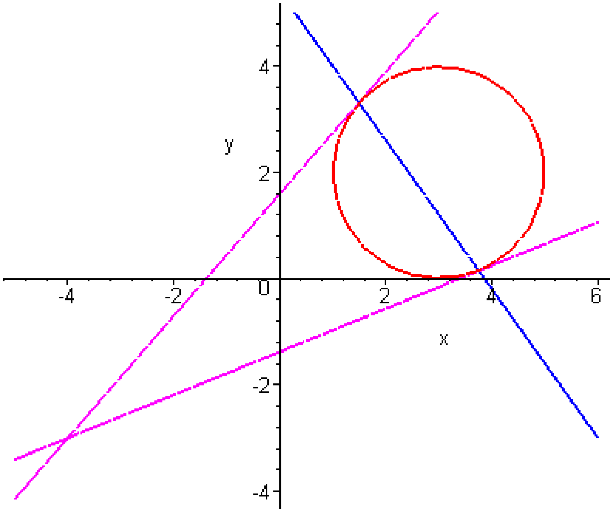
$$P_1 = (1,491; 3,3126) \qquad P_2 = (3,7522; 0,14686)$$

Die Tangenten durch die Punkte P_1 und P_2 lauten somit:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_g - y_1}{x_g - x_1}$$

T_1: $y = 1,1496\cdot x + 1,5985$

T_2: $y = 0,4059\cdot x - 1,3763$

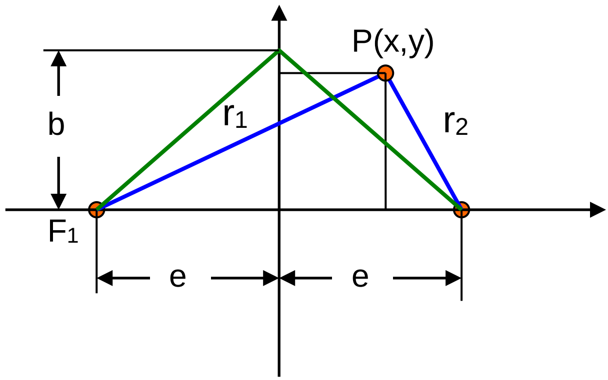


6.9 Die Ellipse

Die Ellipse gehört, wie der Kreis, zu den Kegelschnitten. Sie entsteht dadurch, dass man einen geraden Kreiskegel schräg anschneidet. Sie lässt sich jedoch auch als geometrischer Ort definieren, wobei mehrere Definitionen möglich sind. Die folgende bezeichnet man als „Gärtnerkonstruktion“, da sie sehr einfach mit einer Schnur ausgeführt werden kann:

Der Kegel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.

Der Einfachheit halber werden die beiden Fixpunkte auf der x – Achse platziert, symmetrisch zur y – Achse im Abstand 2·e



Die Summe der beiden Abstände r_1 und r_2 soll konstant sein:

$$r_1 + r_2 = 2 \cdot a$$

Außerdem kann man an den beiden rechtwinkligen Dreiecken ablesen:

$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (e-x)^2 + y^2$$

Falls der Punkt P auf die y – Achse rückt, soll y = b sein; in diesem Fall ist

$$r_1^2 = r_2^2 = a^2 = b^2 + e^2$$

Mit $r_2 = 2 \cdot a - r_1$

Erhält man: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2 \cdot a - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$

Quadrieren auf beiden Seiten ergibt:

$$(x-e)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x+e)^2 + y^2 - 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}=4\cdot a^2+(x+e)^2-(x-e)^2$$

$$=4\cdot a^2+4\cdot e\cdot x$$

$$a^2\cdot\left((x+e)^2+y^2\right)=a^4+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+e^2\cdot x^2$$

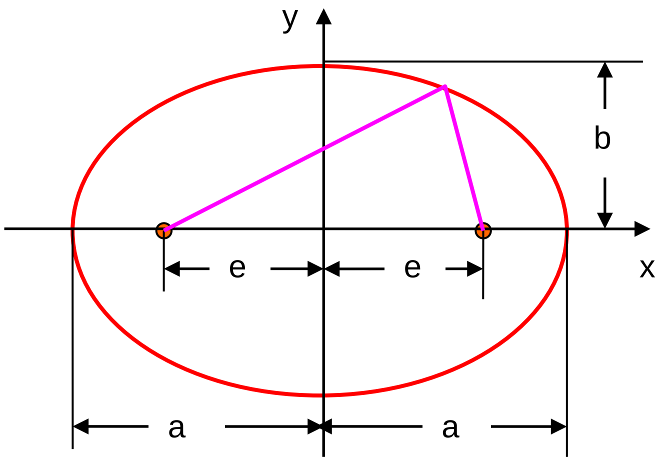
$$a^2x^2+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+a^2\cdot e^2+a^2\cdot y^2=a^4+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+e^2\cdot x^2$$

$$a^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-e^2\cdot x^2=a^4-a^2\cdot e^2=a^2\cdot\left(a^2-e^2\right)$$

$$a^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\cdot x^2=a^2\cdot b^2$$

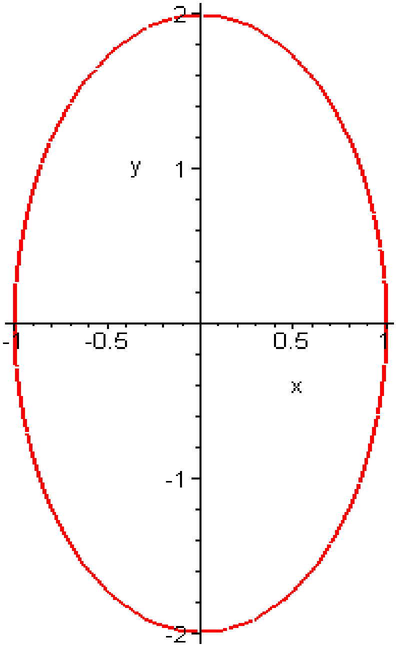
$$a^2\cdot y^2+b^2\cdot x^2=a^2\cdot b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

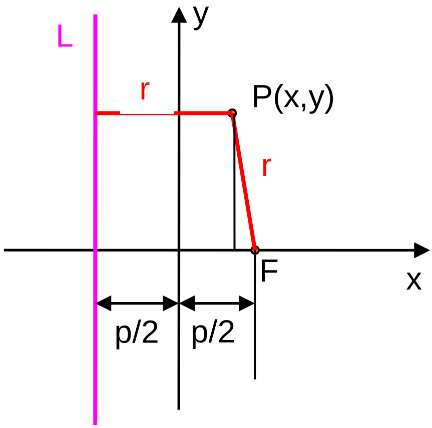


Aus der Gleichung der Ellipse geht hervor, dass man die Ellipse auffassen kann als Kreis, der in einer Richtung gedehnt wurde. Setzt man a = b = R, dann erhält man die Gleichung eines Kreises.

Vertauscht man die beiden Variablen, erhält man eine Ellipse mit der längeren Seite in der y – Richtung. Die beiden Fixpunkte liegen dann auf der y – Achse:



6.10 Die Parabel



Die Parabel ist der geometrische Punkt aller Punkte, deren Abstand von einem gegebenen Punkt aus und von einer Geraden (sog. Leitlinie) aus den gleichen Abstand haben.

Um möglichst einfache Verhältnisse zu erhalten, wird die Leitlinie zunächst parallel zur y – Achse gelegt. Dann muss die Parabelkurve durch den Koordinaten-nullpunkt gehen, da auch im Nullpunkt der Abstand 0 - F = 0 – L ist.

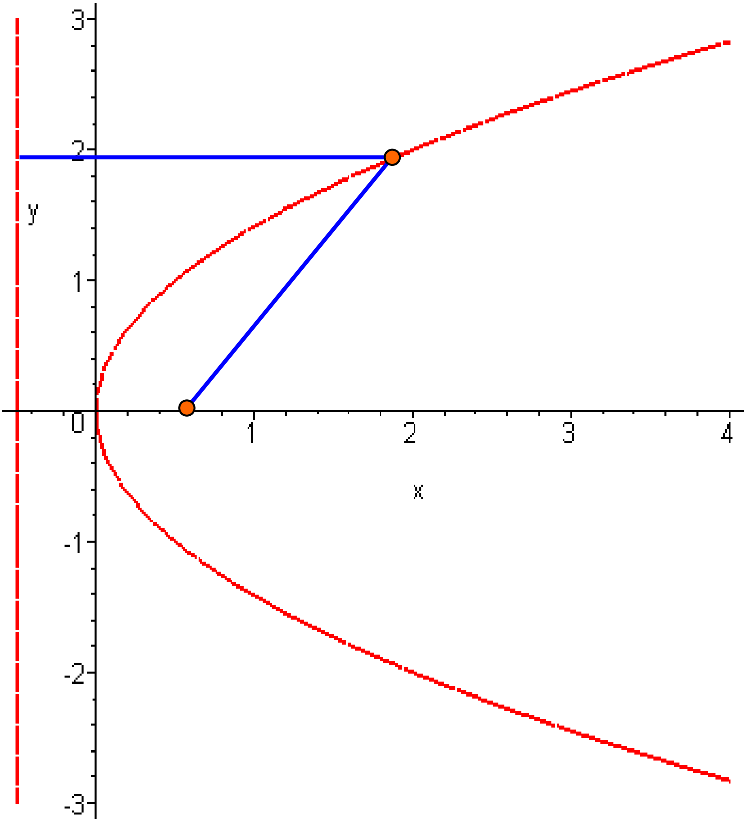
Damit gilt für den Punkt P(x,y):

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \Big|^2$$

$$x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4} = x^2 - p \cdot x + \frac{p^2}{4} + y^2$$

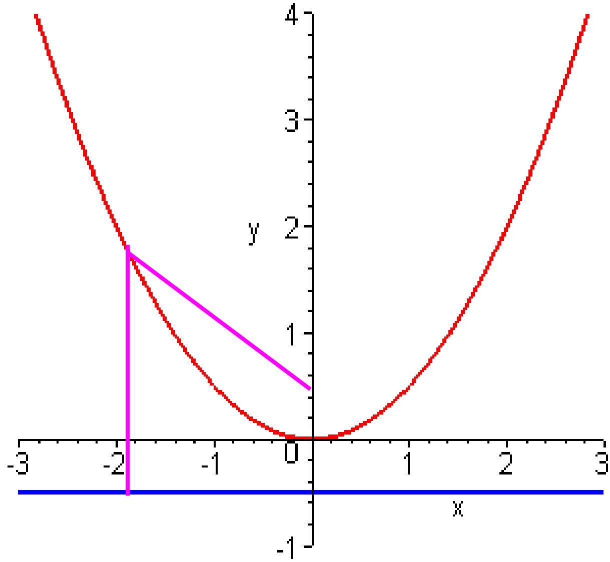
$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

Für p = 1 erhält man damit folgenden Graphen:



Die Parabelfunktion in der errechneten Art ist nicht eindeutig. Zu einem gewählten x – Wert gehören zwei y – Werte. Löst man die Parabelgleichung nach y auf, erhält man zwei Kurvenzweige. Man kann den Graphen um 90° drehen, wenn man in der Parabelgleichung x und y vertauscht. Der Abstand der Leitlinie vom Fixpunkt soll dabei erhalten bleiben:

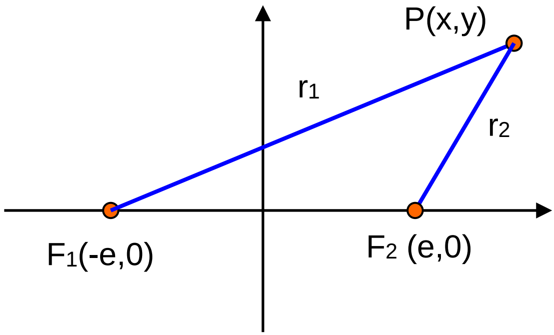
$$y = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot x^2$$



Der Fixpunkt F der Parabel heißt auch „Brennpunkt“. Parallel einfallende Lichtstrahlen oder andere elektromagnetische Wellen werden auf den Brennpunkt fokussiert. Eine im Brennpunkt angeordnete Lampe sendet paralleles Licht aus. Aus diesem Grund werden Antennen für elektromagnetische Strahlung mit einem sog. Parabolspiegel versehen, um Licht- und andere elektromagnetische Strahlung gerichtet auszusenden oder auf eine Stelle zu konzentrieren.

6.11 Die Hyperbel

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten die konstante Differenz 2·a haben.



Zunächst wird angenommen, dass die beiden Fixpunkte F_1 und F_2 symmetrisch zur y – Achse liegen.

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$r_1 - r_2 = 2 \cdot a \qquad r_1 = 2 \cdot a + r_2$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2 \cdot a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \qquad \Big|^2$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x-e)^2 + y^2 + 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$4 \cdot e \cdot x - 4 \cdot a^2 = 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$e^2 \cdot x^2 - 2 \cdot e \cdot x \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot e \cdot x + e^2 + y^2\right)$$

Auch bei der Hyperbel kann man eine Beziehung analog zur Ellipse aufstellen:

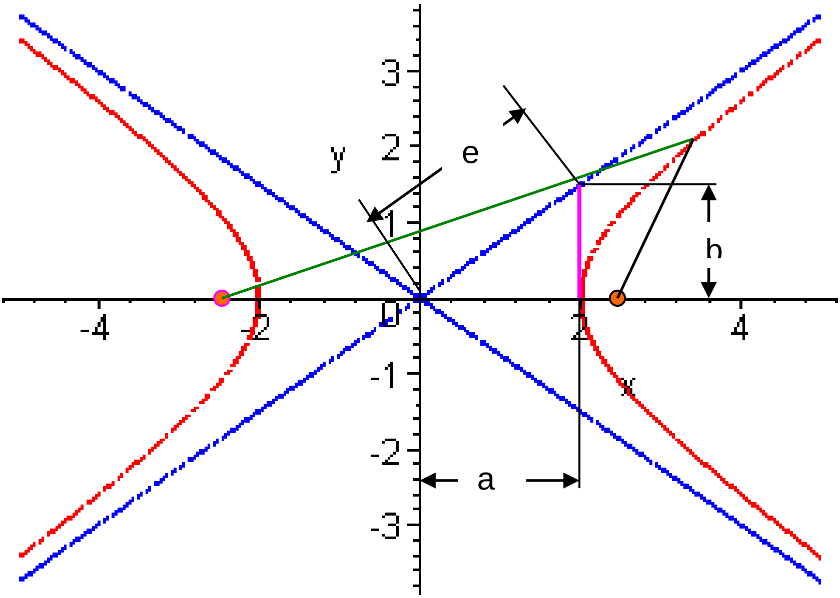
$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 \cdot \left(e^2 - a^2\right) - y^2 \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot e^2 = a^2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)$$

$$x^2 \cdot b^2 - y^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für a = 2; b = 1,5 ergibt sich folgender Graph



Die blau gezeichneten Linien sind die sog. Asymptoten der Hyperbel. Deren Bedeutung sieht man nach folgender Umformung der Hyperbelgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \qquad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}}$$

Wenn x sehr groß wird (positiv oder negativ), dann geht der zweite Ausdruck unter der Wurzel gegen null und es bleibt:

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}$$

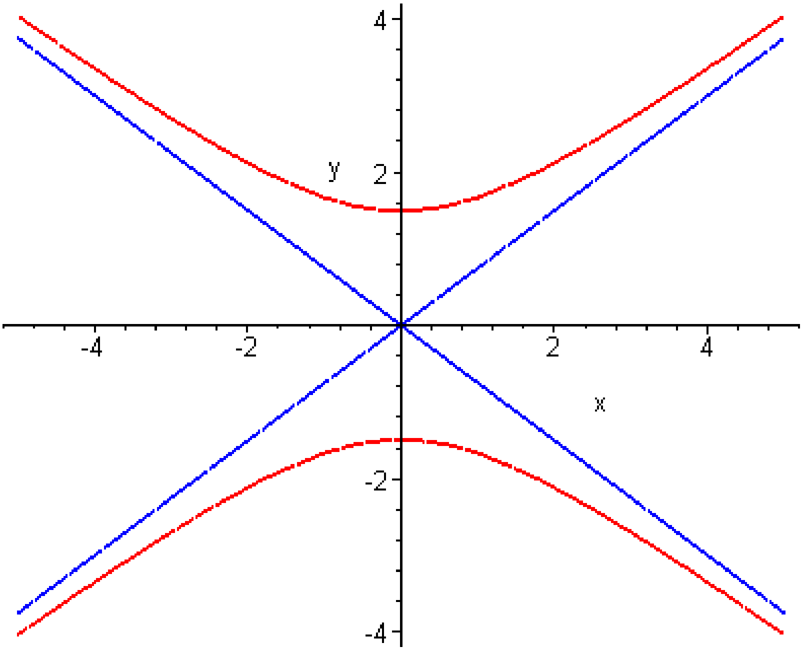
Dies sind die beiden blau gezeichneten Geraden. Gegen diese Geraden strebt die Hyperbelkurve für große x.

Für y = 0 ist x = ± a. Zeichnet man von diesem Punkt ausgehend ein rechtwinkliges Dreieck, erkennt man, dass die Beziehung

$$e^2 = a^2 + b^2$$

erfüllt ist, wenn e die Hypotenuse des Dreiecks und b die zweite Kathete ist. Das Verhältnis $\frac{b}{a}$ ist gleichzeitig die Steigung der beiden Asymptoten.

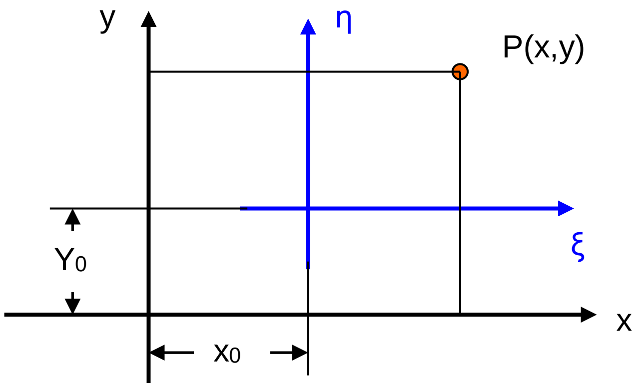
Vertauscht man die beiden Variablen x und y, dann erhält man Hyperbeln, die um 90° gedreht sind, Die Fixpunkte liegen dann auf der y – Achse.



6.12 Koordinatentransformationen

Häufig erhält man als geometrischen Ort Kegelschnitte, die verschoben oder gedreht sind und deshalb eine komplizierte Gleichung liefern und nicht erkennbar ist, um welchen Kegelschnitt es sich handelt. Wenn es gelingt, den Graphen des Kegelschnitts oder das Koordinatensystem so zu verschieben oder zu drehen, dass die Normalform erscheint, erhält man eine wesentlich einfachere Gleichung. Diesen Vorgang nennt man Koordinatentransformation.

a) Parallelverschiebung des Koordinatensystems



Um den Punkt P(x,y) in den neuen Koordinaten darzu-stellen, muss man x und y ersetzen durch:

$$x = \xi + x_0 \qquad y = \eta + y_0$$

oder: $$\xi = x - x_0 \qquad \eta = y - y_0$$

Man kann die Transformationsvorschrift auch so inter-pretieren:

Tritt x und y immer in der Kombination

$$(x - x_0), \quad (y - y_0)$$

auf, dann ist ein Graph in Richtung der positiven Ach-sen verschoben. Man hat also neues Koordinatensys-tem einzuführen, das nach rechts und nach oben ver-schoben ist, um z.B. einen Kegelschnitt in die Normal-form (in diesem Fall ohne x_0 und y_0) zu überführen-

Beispiel:

Bei der Funktion $2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 4 = 0$

handelt es sich um einen Kegelschnitt. Gesucht ist die Gleichung in Normalform.

$$2\cdot x^2-6\cdot x+4\cdot y^2+8\cdot y-4=0$$

$$2\cdot\left(x^2-3\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+4\cdot\left(y^2+2\cdot y+1\right)-4\cdot 1=4$$

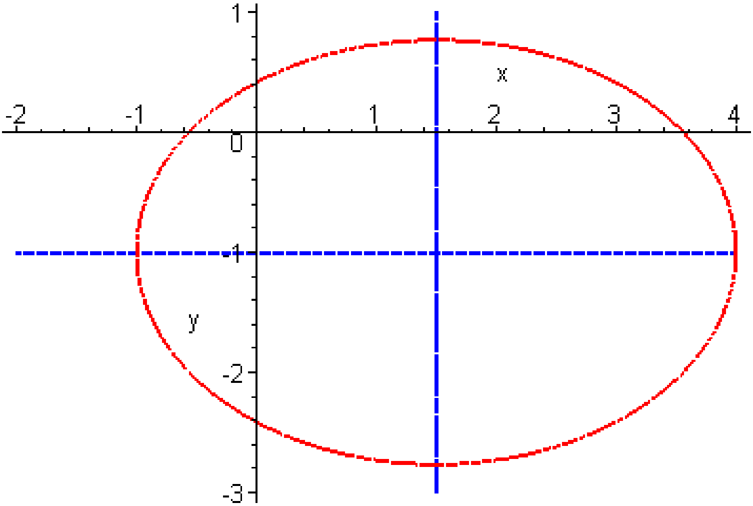
$$2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4\cdot(y+1)^2=4+\frac{9}{2}+4=\frac{25}{2}$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{8}}=1$$

Es handelt sich um eine Ellipse, die um $\frac{3}{2}$ nach rechts und um 1 nach unten verschoben ist, mit den Halbachsen $a=\frac{5}{2},\quad b=\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}$. Macht man die Substitutionen: $x-\frac{3}{2}=\xi \qquad y+1=\eta$

Dann erhält man die Ellipsengleichung in der Normalform:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}\right)^2}=1$$



Im vorliegenden Fall wurden die Transformationsgleichungen durch quadratische Ergänzung gefunden. Falls diese nicht erkannt werden, kann man allgemein die Substitution $x = \xi + x_0 \qquad y = \eta + y_0$ vornehmen und x_0 und y_0 so bestimmen, dass in der Gleichung die linearen Glieder der Variablen verschwinden und ξ und η nur noch quadratisch vorkommen.

Obiges Beispiel:

$$2 \cdot (\xi + x_0)^2 - 6 \cdot (\xi + x_0) + 4 \cdot (\eta + y_0)^2 + 8 \cdot (\eta + y_0) - 4 = 0$$

$$2 \cdot \xi^2 + 4 \cdot \xi \cdot x_0 + 2 \cdot x_0^2 - 6 \cdot \xi - 6 \cdot x_0 + 4 \cdot \eta^2 + 8 \cdot \eta \cdot y_0 + 4 \cdot y_0^2$$

$$+8 \cdot \eta + 8 \cdot y_0 - 4 = 0$$

Alle Koeffizienten bei ξ sollen verschwinden:

$$4 \cdot x_0 - 6 = 0 \qquad x_0 = \frac{3}{2}$$

Koeffizienten bei η:

$$8 \cdot y_0 + 8 = 0 \qquad y_0 = -1$$

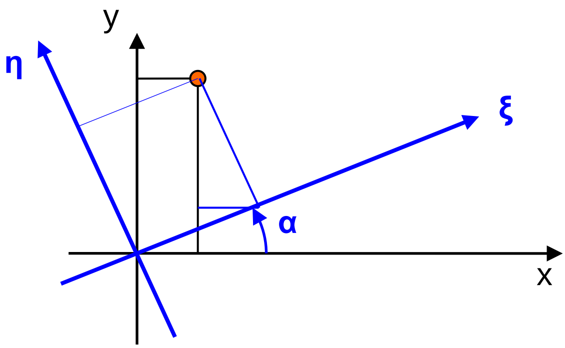
Setzt man diese Werte in obige Gleichung ein, erhält man:

$$2 \cdot \xi^2 + 4 \cdot \eta^2 - \frac{25}{2} = 0$$

Division durch $\frac{25}{2}$ liefert die Normalform.

b) Drehung des Koordinatensystems

Oft ist es notwendig, ein gegenüber dem x – y - System gedrehtes Koordinatensystem einzuführen. Dies ist bei Kegelschnittgleichungen dann notwendig, wenn gemischte Glieder x · y auftreten und man möchte den Kegelschnitt in Normalform darstellen. Aus der Figur kann man folgende Transformationsgleichungen ablesen:



$$x = \xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha$$

$$y = \xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha$$

Dabei kann man den Winkel α so bestimmen, dass die gemischten Glieder $\xi \cdot \eta$ herausfallen.

Beispiel:

Gesucht ist die Normalform des Kegelschnitts:

$$2 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y - x^2 - 17 = 0$$

Die obigen Transformationsgleichungen werden eingesetzt:

$$2 \cdot \left(\xi^2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \eta^2 \cdot \cos^2\alpha\right)$$

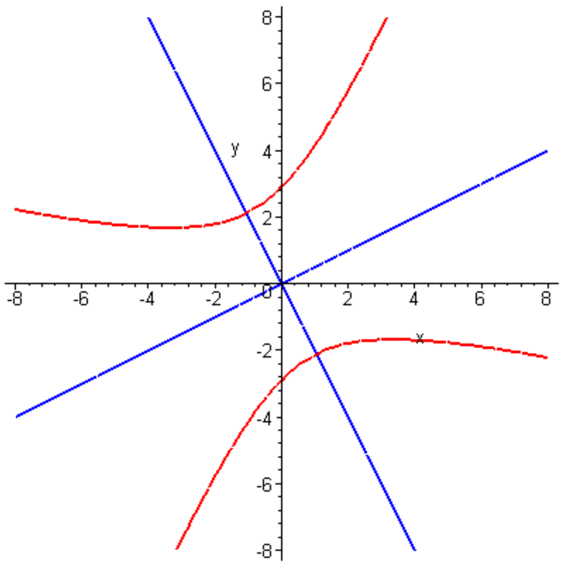
$$-4 \cdot \left(\xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha\right)$$

$$-\left(\xi^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \eta^2 \cdot \sin^2\alpha\right) - 17 = 0$$

$$\xi^2 \cdot \left(2 \cdot \sin^2 \alpha - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha\right) +$$
$$+\eta^2 \cdot \left(2 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha\right) +$$
$$\xi \cdot \eta \cdot \left(6 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin^2 \alpha\right)$$
$$-17 = 0$$

Der Term bei $\xi \cdot \eta$ soll null werden:

$$4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$
$$3 \cdot \sin(2\alpha) - 4 \cdot \cos(2\alpha) = 0$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{4}{3} \qquad 2 \cdot \alpha = \arctan \frac{4}{3} \pm k \cdot \pi$$
$$\alpha = 0{,}5 \cdot \arctan \frac{4}{3} \pm k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \widehat{\alpha} = 0{,}4636 \pm \frac{\pi}{2}$$
$$\alpha° = 26{,}57° \pm 90°$$



6.13 Die allgemeine Kegelschnittgleichung

Jede quadratische Funktion der Form:

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x \cdot y + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

ist ein Kegelschnitt, falls er sich durch eine Parallelverschiebung oder durch eine Drehung des Koordinatensystems in eine der Normalformen bringen lässt. Dies ist immer möglich, falls es sich nicht um einen entarteten Kegelschnitt handelt, d.h. falls die Gleichung für keine Wertekombination gültig ist.

Fehlt eines der quadratischen Glieder, handelt es sich um eine Parabel. Fehlt das gemischte Glied und sind die Faktoren von den quadratischen Gliedern gleich, handelt es sich um einen Kreis, sonst um eine Ellipse oder Hyperbel.