5. Einführung in die Vektorrechnung

5.1 Begriffe

In der Physik treten zwei verschiedene Arten von Größen auf:

Skalare: Die physikalische Größe kann durch eine einzige Zahl beschrieben werden.
Beispiele: Temperatur, Masse, Arbeit

Vektoren: Zur vollständigen Beschreibung benötigt man die Angabe über die Größe und die Richtung, in der sie wirkt:

Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Magnetische Flussdichte.

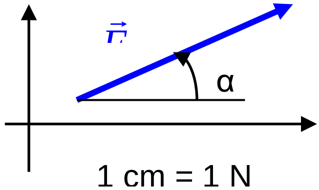
Um mit diesen richtungsabhängigen Größen rechnen zu können, benötigt man einen Satz von Regeln, die sich von denen des Zahlenrechnens unterscheiden.

Um die vektoriellen Größen von den skalaren Größen zu unterscheiden, kennzeichnet man Vektoren durch einen übergesetzten Pfeil oder als Kleinbuchstaben im Fettdruck:

$$\vec{F},\ \vec{a},\ \vec{s}$$

oder: **a, v, s**

In der zeichnerischen Darstellung von Vektoren verwendet man Pfeile, deren Länge ein Maß für den Betrag der Größe ist und deren Richtung die Wirkungsrichtung der physikalischen Größe darstellt.



Die Länge des Vektors in physikalischen Einheiten nennt man den Betrag des Vektors:

$$|\vec{a}|, \quad |\vec{F}|$$

Dabei hat man anzugeben, in welchem Maßstab der Betrag des Vektors aufgezeichnet ist und auf welches Bezugssystem sich die Angabe der Richtung bezieht. Als Bezugssystem bietet sich dabei i.a. ein kartesisches Koordinatensystem an.

Ein solchermaßen definierter Vektor hat einen bestimmten Anfangspunkt und ist deshalb in der Ebene oder im Raum fixiert. Einen solchen Vektor nennt man einen „gebundenen" Vektor.

Kann man dagegen einen Vektor beliebig längs seiner Wirkungslinie verschieben, ohne seine physikalische Wirkung zu ändern, nicht jedoch parallel, dann spricht man von einem „linienflüchtigen" Vektor. Kräfte in der Starrkörperstatik sind linienflüchtige Vektoren.

Falls es bei der physikalischen Wirkung der Vektorgröße nicht darauf ankommt, an welchem Ort sie wirkt, spricht man von einem „freien" Vektor. Ein freier Vektor darf also beliebig längs seiner Wirkungslinie und parallel zu sich verschoben werden.

In der mathematischen Theorie über Vektoren werden immer freie Vektoren behandelt. Für gebundene oder linienflüchtige Vektoren müssen zusätzliche Regeln eingeführt werden.

Die Rechenregeln über Vektoren müssen folgende Forderungen erfüllen:

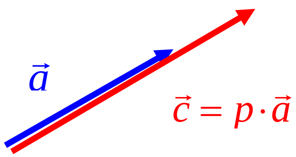
- Sie müssen an die realen Bedürfnisse der Physik angepasst sein.

- Sie müssen widerspruchsfrei sein zu den Gesetzen der Mathematik. Das bedeutet ins besonders:
  Wirken Vektoren nur in einer Richtung, d.h. längs einer Geraden, dann müssen Vektoroperationen zu den gleichen Ergebnissen führen wie die Operationen des Zahlenrechnens, die auf einer Zahlengeraden dargestellt werden.

5.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, Betrag eines Vektors, Einheitsvektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, einer Zahl p, wird so definiert, dass der Betrag des Vektors mit dem Faktor p multipliziert wird und die Richtung des Vektors unverändert bleibt.

$$\vec{c} = p \cdot \vec{a}$$



In der graphischen Darstellung wird also nur die Länge des Vektorpfeils, geändert, nicht die Richtung.
Dies entspricht der Konvention in der Physik:
Wenn die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs verdoppelt wird, soll sich nicht die Richtung des Fahrzeugs ändern.
Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrwert seines Betrags, erhält man einen Vektor der Länge eins mit der Richtung des ursprünglichen Vektors. Diesen Vektor nennt man „Einheitsvektor“.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

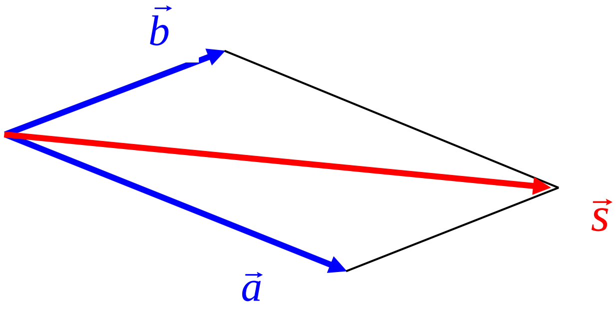
Damit kann man jeden Vektor darstellen als Produkt eines Einheitsvektors, der die Richtung des Vektors angibt, und seiner Länge und damit die beiden Größen Richtung und Betrag voneinander trennen:

$$\vec{a} = \vec{e}_a \cdot |\vec{a}|$$

Die Multiplikation mit einer negativen Zahl ist zunächst noch nicht definiert, da der Betrag einer physikalischen Größe immer positiv ist. Ein negativer Faktor lässt sich jedoch mit Hilfe der Vektorsubtraktion erklären.

5.3 Addition und Subtraktion zweier Vektoren

Entsprechend den Bedürfnissen der Mechanik definiert man die Summe zweier Vektoren mit Hilfe des sog. Parallelogrammaxioms:

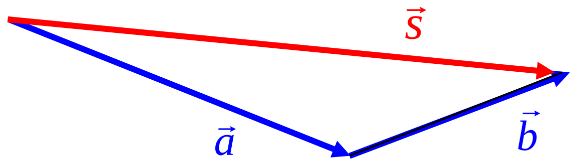


Demnach ist die Summe der beiden Vektoren

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

in der graphischen Darstellung der Vektor, der, ausgehend vom Anfangspunkt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und

$\vec{b}$, zur gegenüberliegenden Spitze des Parallelogramm führt. Die Addition kann aber auch so ausgeführt werden, dass der Vektor $\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt parallel bis zur Spitze des Vektors $\vec{a}$ verschoben wird. Der Summenvektor ist dann der Pfeil, der den Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ mit der Spitze des Vektors $\vec{b}$ verbindet.

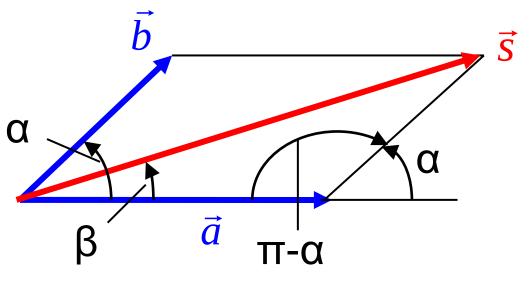


Die Konstruktion lässt sich auf die Addition beliebig vieler Vektoren erweitern.

Aus der Parallelogrammkonstruktion sieht man unmittelbar, dass die Vektoraddition kommutativ ist, d.h. dass die Reihenfolge der beiden Vektoren vertauscht werden darf:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

<u>Rechnerische Ausführung der Addition:</u>



Den Betrag des Vektors $\vec{s}$ kann man mit Hilfe des cos-Satzes der Trigonometrie berechnen:

$$\left|\vec{s}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \underbrace{\cos\left(\pi - \alpha\right)}_{= -\cos\alpha}$$

$$\left|\vec{s}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Der Winkel β wird mit Hilfe des sin-Satzes berechnet:

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{s}\right|}{\sin\left(\pi - \alpha\right)}$$

$$\sin\beta = \frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{s}\right|} \cdot \sin\alpha$$

<u>Vektorsubtraktion:</u>

Ganz analog zum Zahlenrechnen lässt sich auch die Vektoraddition umkehren. In der Beziehung:

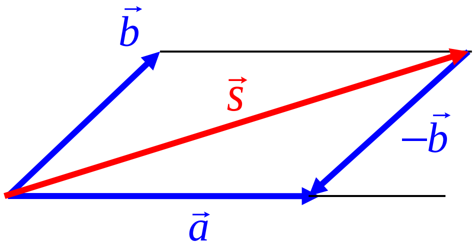
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

in der die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{b}$ bekannt sind, kann man fragen:

Welchen Vektor muss man zu $\vec{s}$ addieren, damit man $\vec{a}$ erhält?

Antwort: $\vec{a} = \vec{s} - \vec{b}$

Oder: $\vec{a} = \vec{s} + \left(-\vec{b}\right)$



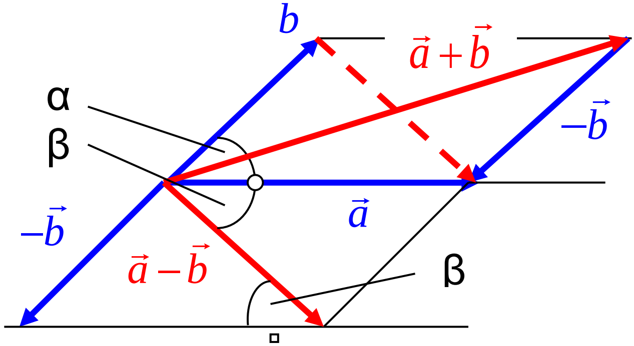
Man hat also einen Vektor zu addieren, der gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist, als der ursprüngliche Vektor $\vec{b}$.

Damit erhält man eine Interpretation des negativen Vorzeichens eines Vektors oder der Multiplikation eines Vektors mit dem Faktor (-1):

Der Vektor $-\vec{b}$ *ist zu einem positiv definierten Vektor* $+\vec{b}$ *entgegengesetzt gerichtet und hat den gleichen Betrag.*

Ein negatives Vorzeichen eines Vektors ist also nur in Verbindung mit einem positiven Vektor definiert.

Für die Differenz der Vektoren $\vec{a}-\vec{b}$ ergibt sich eine einfache Konstruktion an einem Parallelogramm:



Die Differenz der beiden Vektoren $\vec{a}-\vec{b}$ entspricht der zweiten Diagonalen im Parallelogramm.

Die Richtung des Vektors $\vec{a}-\vec{b}$ geht von der Pfeilspitze von $\vec{b}$ zur Pfeilspitze von $\vec{a}$

Rechnerisch ergibt sich, wieder mit Hilfe des sin- und cos-Satzes:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|a^2\right| + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}{\sin\alpha} \qquad \sin\beta = \sin\alpha\cdot\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}$$

<u>Mehrfache Addition:</u>

Beim Zahlenrechnen existiert das sog. assoziative Gesetz:

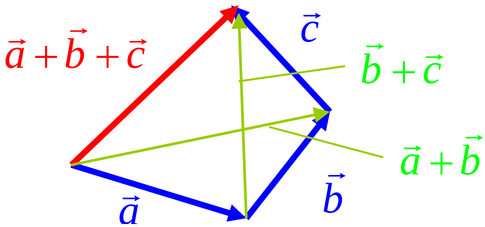
$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

d.h. die Reihenfolge der Addition ist gleichgültig.

Die analoge Regel gilt auch in der Vektorrechnung:

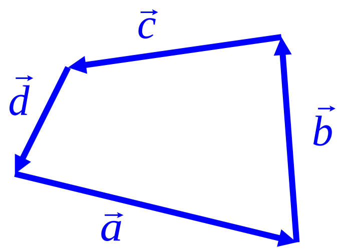
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

Anstatt bei jeder Addition das vollständige Parallelogramm zu zeichnen, ist es zweckmäßig, einfach wieder die Pfeile aneinander zu fügen:



<u>Sonderfall:</u>

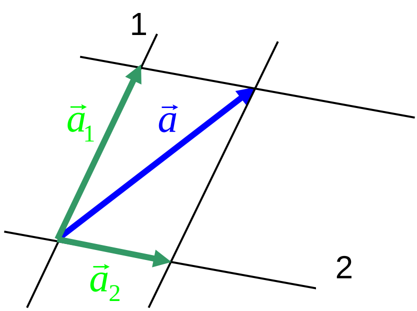
Die Summe mehrerer Vektoren kann auch null sein, obwohl keiner der beteiligten Vektoren null ist. Dies passiert dann, wenn sich das (räumliche) Vieleck schließt. Das Ergebnis ist der Nullvektor, der die Länge null hat und dessen Richtung beliebig ist.



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

5.4 Zerlegung eines Vektors, die Komponentendarstellung eines Vektors

Man kann die Additionsaufgabe auch so umkehren, dass man sich das Ergebnis vorgibt und fragt:
Wie groß sind die Vektoren mit vorgegebener Richtung, die als Summe den gegebenen Vektor ergeben.

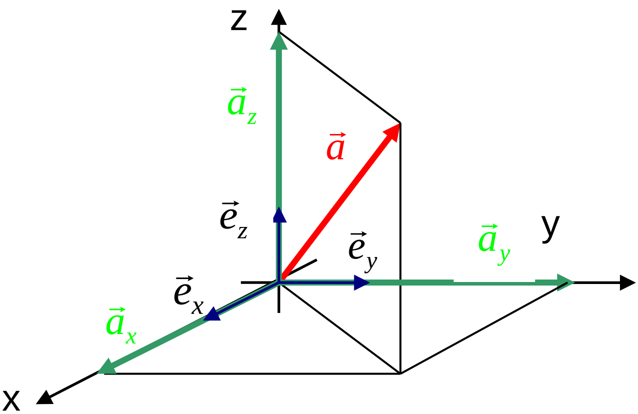


Die Lösung erfolgt durch Umkehrung der Parallelogrammkonstruktion. Man nennt die beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ in Richtung 1 und 2. Gibt man die Richtungen 1 und 2 in Form der beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ vor (Vektoren der Länge 1 in Richtung 1 bzw. 2), dann lässt sich der Vektor $\vec{a}$ darstellen als:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 \cdot |\vec{a}_1| + \vec{e}_2 \cdot |\vec{a}_2|$$

Man kann mit Hilfe der später einzuführenden Vektormultiplikation nachweisen, dass man in der Ebene einen Vektor nur in zwei Richtungen eindeutig zerlegen kann. Entsprechend kann man einen dreidimensionalen Vektor im Raum in drei Richtungen eindeutig zerlegen.

Besonders zweckmäßig für die numerische Rechnung mit Vektoren ist die Zerlegung eines Vektors in die Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems.



Ein dreidimensionaler Vektor $\vec{a}$ lässt sich damit darstellen als Summe seiner Projektionen in Richtung der Koordinatenachsen:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Bezeichnet man die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen mit $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ und die Beträge der Projektionen mit a_x, a_y und a_z , dann lässt sich der Vektor $\vec{a}$ darstellen als

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

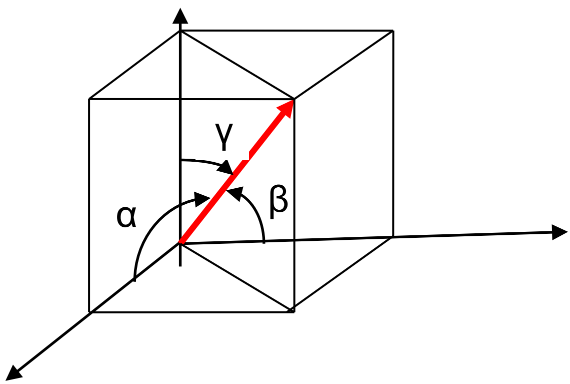
oder in der abgekürzten Schreibweise:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$ [1]

Die Zahlen a_x, a_y, a_z bezeichnet man als Komponenten des Vektors in einem kartesischen Koordinatensystem. Mit Hilfe der Komponenten erhält man den Betrag des Vektors:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

<u>Die Richtungen des Vektors bezogen auf die Achse</u>



[1] In der linearen Algebra unterscheidet man zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren. Diese Unterscheidung ist in der physikalischen Vektorrechnung nicht notwendig

Die Richtungen lassen sich folgendermaßen berechnen

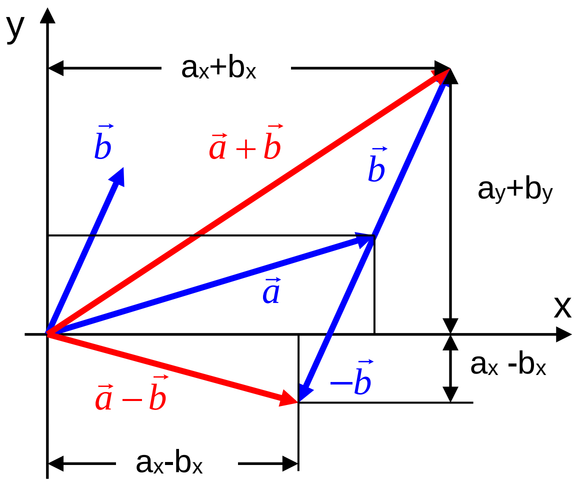
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

5.5 Addition und Subtraktion in Komponenten-schreibweise

Die Darstellung erfolgt wegen der einfacheren Visualisierung in ebenen Koordinaten. Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist einfach durchzuführen.



Aus der Figur ist ersichtlich:

Die Addition und die Subtraktion geschieht so, dass die gleichgerichteten Komponenten der beiden Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden.

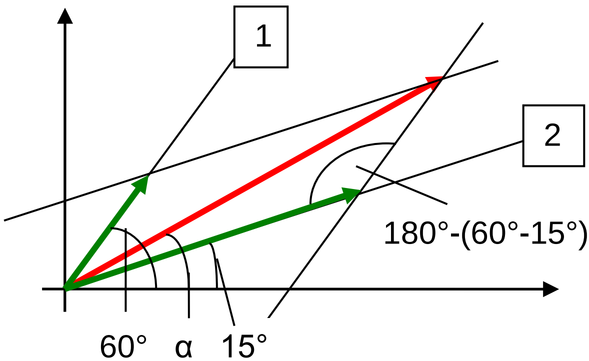
$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y\right)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x, a_y-b_y\right)$$

5.6 Beispiele

1. Beispiel

Der Vektor $\vec{a}=\left(5;3\right)$ soll in zwei Komponenten zerlegt werden, die einen Winkel von 60° und 15° zur Horizontalen bilden. Die Lösung soll graphisch und rechnerisch erfolgen.



Rechnerische Lösung:

Berechnung mit sin-Satz:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5^2+3^2}=5{,}83$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=0{,}8575; \quad \alpha=30{,}96°$$

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin(135°)} = \frac{|a_1|}{\sin(\alpha - 15°)} \qquad |a_1| = 2,268$$

$$a_{1x} = |\vec{a}_1| \cdot \cos(60°) = 1,134$$

$$a_{1y} = |\vec{a}_1| \cdot \sin(60°) = 1,964$$

$$\vec{a}_1 = (1,134; 1,964)$$

ebenso:

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin(135°)} = \frac{|\vec{a}_2|}{\sin(60° - \alpha)} \qquad |\vec{a}_2| = 4,002$$

$$\vec{a}_2 = (3,866; 1,036)$$

2. Beispiel

Gegeben sind die beiden Vektoren:

$$\vec{a} = (3;\ 1;\ 4) \qquad \vec{b} = (4; -3; -3)$$

Welchen Vektor muss man zu den beiden Vektoren dazu addieren, damit die Summe der drei Vektoren mit der y-Achse zusammenfällt und den Betrag 1 hat?

Lösung:

$$a_x + b_x + c_x = 0$$

$$a_y + b_y + c_y = 1$$

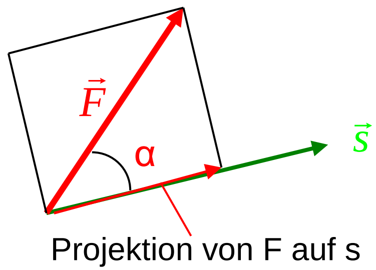
$$a_z + b_z + c_z = 0$$

$$c_x = -7; \quad c_y = 3; \quad c_z = -1$$

5.7 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

In der Physik ist die Größe „Arbeit“ definiert als das Produkt aus Kraft und Weg. Beide Größen sind Vektoren, die Arbeit ist nicht richtungsabhängig und somit eine skalare Größe. Es ist also eine Definition eines Produkts zweier Vektoren notwendig, die einen Skalar ergibt.

Dabei ist offensichtlich, dass nur die Komponente einer Kraft, die in Richtung des Wegs wirkt, eine Arbeit verrichten kann.



Man definiert deshalb als Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

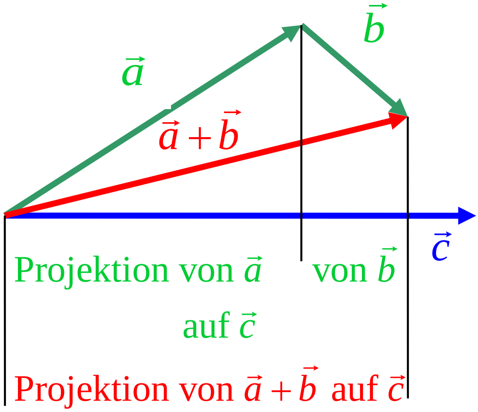
<u>Eigenschaften des Skalarprodukts:</u>

Aus der Definitionsgleichung geht hervor, dass man die beiden Vektoren vertauschen darf. Das Skalarprodukt ist kommutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Außerdem gilt das distributive Gesetz:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$



$$\left|\vec{a}+b\right|\cdot\cos\varphi=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha+\left|b\right|\cos\beta \quad \Big|\cdot\left|\vec{c}\right|$$

$$\underbrace{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi}_{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}=\underbrace{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha}_{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\underbrace{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\beta}_{\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

Es gilt jedoch nicht das assoziative Gesetz der Zahlenalgebra $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,. Denn

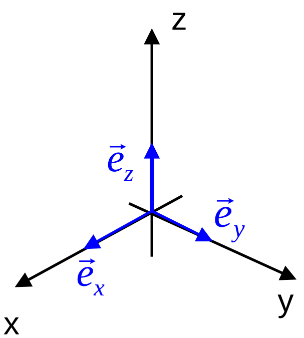
$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ist ein Vektor in Richtung $\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ ist ein Vektor in Richtung $\vec{a}$

Stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren null, obwohl keiner der beiden Vektoren null ist:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Das Skalarprodukt in Komponentenschreibweise



In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ lauten die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z$$

Multipliziert man die beiden Vektoren, dann treten folgende Produkte der Einheitsvektoren auf:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \qquad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

Somit ergibt die Multiplikation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z\right) \cdot \left(b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Fasst man die beiden Definitionen des Skalarprodukts zusammen, ergibt sich eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) \cdot \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)}}$$

5.8 Beispiele

1. Beispiel

Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = (-3, 2, 2) \qquad \vec{b} = (2, 1, 2)$$

a) Bilden Sie die Skalarprodukte

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$$

b) Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren miteinander ein?

c) Wie groß ist die Konstante k zu wählen, damit der Vektor

$$\vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

senkrecht auf dem Vektor $\vec{c} = (1, 1, 0)$ steht?

Lösung:

a)

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 17$$

mit $\vec{b}^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 9$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

damit ist $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 26$

b) Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander

$$\left(\vec{a} + k \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$$

c) $\vec{a} \cdot \vec{c} + k \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$$k = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}}$$

In diesem Ausdruck darf man nicht kürzen! Eine Division von Vektoren ist nicht erlaubt!

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \qquad k = \frac{1}{3}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

2. Beispiel

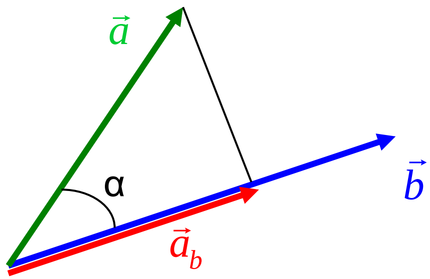
Gegeben sind die beiden Vektoren:

$$\vec{a} = (4, 4, 1) \qquad \vec{b} = (2, 1, 2)$$

Berechnen Sie die in Richtung von $\vec{b}$ fallende Komponente von $\vec{a}$

Lösung:

Veranschaulicht am ebenen Fall ergibt sich:



$$\vec{a}_b = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \cdot \text{Einheitsvektor in Richtung } \vec{b}$$

$$\vec{a}_b = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \qquad \text{erweitert mit } |\vec{b}|$$

$$\vec{a}_b = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{b} \cdot |\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}$$

$$\vec{a}_b = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha}{\vec{b}^2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a}_b == \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \cdot \vec{b}$$

Der Ausdruck darf <u>nicht</u> gekürzt werden!

$$\vec{a}_b = \frac{14}{9} \cdot (2, 1, 2) = \left(\frac{28}{9}, \frac{14}{9}, \frac{28}{9} \right)$$

5.9 Das Vektorprodukt

In der Physik treten Produkte von Vektoren auf, die als Ergebnis wieder einen Vektor liefern.

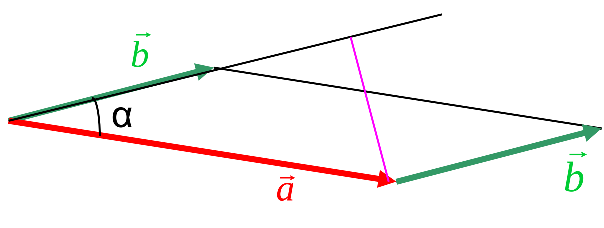
1. Beispiel: Drehmoment einer Kraft. Die drehende Wirkung einer Kraft ist abhängig von der Größe der Kraft und dem Hebelarm, an dem sie wirkt, genauer: vom senkrechten Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Drehpunkt. Im Fall der unbehinderten Drehung steht dabei die Drehachse senkrecht auf der Ebene, die vom Kraftvektor und dem Abstandsvektor gebildet wird.

2. Beispiel: Fließt durch einen elektrischen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, ein Strom, dann wirkt auf den Leiter eine Kraft, die senkrecht zu Stromrichtung und Feldrichtung wirkt.

Die beiden Beispiele legen es nahe, ein Vektorprodukt zu definieren, das einen Vektor liefert, der auf den beiden Faktoren senkrecht steht. Dieses Vektorprodukt heißt „Kreuzprodukt“ und wird geschrieben:

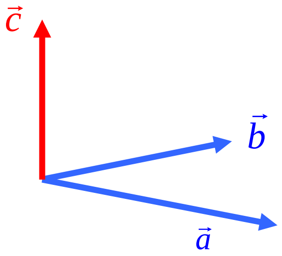
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Die Anwendung in der technischen Mechanik (Drehmoment) zeigt, dass es zweckmäßig ist, den Absolutbetrag des Vektorprodukts als das Produkt aus senkrechtem Abstand zu einem Bezugspunkt und einem Vektor zu berechnen



$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

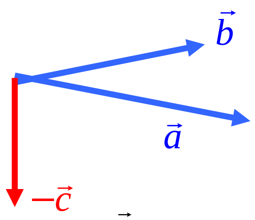
$\vec{a}$ ist dabei der Vektor vom Drehpunkt zum Lastangriffspunkt der Kraft, $\vec{b}$ der Vektor der Kraft.



Das Vektorprodukt entspricht gleichzeitig dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramm.

Die Richtung des Ergebnisvektors wird so festgelegt, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden:

Dreht man den ersten Vektor $\vec{a}$ auf kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektors $\vec{b}$ und führt gleichzeitig eine Rechtsschraubbewegung durch, dann soll die Bewegung in die Richtung des Ergebnisvektors $\vec{c}$ gehen.

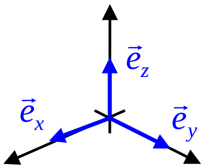


$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

Diese Festlegung bedeutet, dass das Kreuzprodukt nicht kommutativ sein kann. Denn vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren, dann erhält man einen Ergebnisvektor, der in die umgekehrte Richtung von $\vec{c}$ geht; man erhält $-\vec{c}$.

Aus der ursprünglichen Definition des Vektorprodukts ergibt sich, dass dieses null ist, wenn die beiden Faktoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind, also wenn α = 0 oder α = π ist.

Zur Ausführung der Multiplikation in Komponenten kann man sich wieder, wie bei der skalaren Multiplikation, das Verhalten der Einheitsvektoren überlegen:



$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

Für das Vektorprodukt ergibt sich somit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z\right) \times \left(b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z\right)$$

Beim Ausmultiplizieren geht man davon aus (ohne Beweis), dass das Vektorprodukt distributiv ist, dass also gilt:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = {} & a_x \cdot b_x \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_x \cdot b_y \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_x \cdot b_z \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_z + \\ & + a_y \cdot b_x \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_x + a_y \cdot b_y \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_y + a_y \cdot b_z \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_z + \\ & + a_z \cdot b_x \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_x + a_z \cdot b_y \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_y + a_z \cdot b_z \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z\end{aligned}$$

Mit den Festlegungen über die Kreuzprodukte der Einheitsvektoren erhält man:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{e}_x + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{e}_y +$$
$$+ (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{e}_z$$

Dieses Ergebnis lässt sich in Form einer dreireihigen Determinante darstellen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

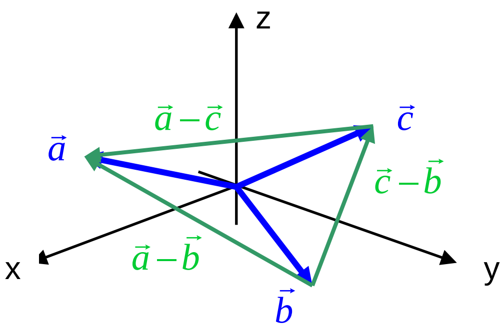
Die drei Vektoren:

$$\vec{a} = (2, 0, 4) \qquad \vec{b} = (0, 5, -2) \qquad \vec{c} = (-1, 2, 0)$$

zeigen jeweils auf die Ecke eines Dreiecks.

a) Wie groß ist die Fläche dieses Dreiecks?

b) Wie lautet der Einheitsvektor, der auf der Dreiecksfläche senkrecht steht und in Richtung des Koordinatenursprungs zeigt?



Lösung:

a) Die Dreiecksfläche ist die halbe Parallelogrammfläche, die von jeweils zwei Dreieckseiten gebildet wird. Die Parallelogrammfläche wird mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnet.

$$\vec{a}-\vec{b}=(2,-5,6) \qquad \vec{c}-\vec{b}=(-1,-3,2)$$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 2 & -5 & 6\\ -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(8,\ -10,-11)$$

$$\left|\vec{A}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8^2+10^2+11^2}=\frac{16,88}{2}$$

$$\left|\vec{A}\right|=8,44\ Fe$$

b) Der Vektor $\vec{A}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{c}-\vec{b}$ definierten Fläche und weist in Richtung des Koordinatenursprungs. Der dazu gehörende Einheitsvektor ist:

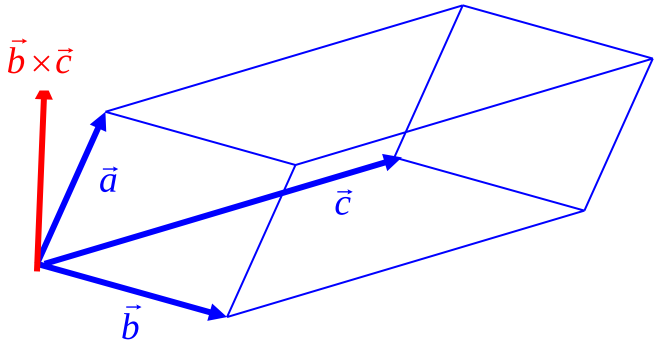
$$\vec{e}=\left(\frac{8}{16,88},-\frac{10}{16,88},-\frac{11}{16,88}\right)$$

$$\vec{e}=(0,47;-0,59;-0,65)$$

5.10 Das Spatprodukt

Man kann die bisher besprochenen Produktbildungen hintereinander anwenden und z.B. bilden:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$



Die drei Vektoren kann man dabei als Kanten eines sog. „Spat“ ansehen. Dies ist ein zylindrischer Körper, bei dem jeweils vier Seiten zueinander parallel sind.

Das Kreuzprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$ ist ein Vektor, der auf den beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht und dessen Betrag der Fläche des Parallelogramms, gebildet aus den beiden Vektoren, entspricht. Das Skalarprodukt bedeutet, dass der Betrag von $\vec{a}$ mit dem cos des von $\vec{a}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$ eingeschlossenen Winkels multipliziert wird; dies entspricht der Höhe des Spats. Diese wird mit der Grundfläche multipliziert, somit ist das obige Produkt gerade gleich dem Volumen des Spats und das Produkt heißt „Spatprodukt“. Man schreibt dafür auch:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Man kann jede Fläche des Spat als Grundfläche ansehen; deshalb gilt:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(a \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$$

Das Vorzeichen ergibt sich positiv oder negativ, je nach dem, ob die drei Vektoren eine Rechts- oder ein Links-system bilden.

Die zahlenmäßige Ausrechnung führt man am besten mit Hilfe einer dreireihigen Determinante durch. Wie man durch Ausrechnen nachweisen kann, ist:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Aus der geometrischen Deutung als Volumen eines Spats ergibt sich:

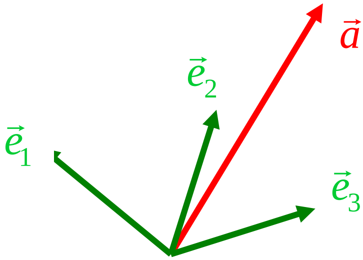
Das Spatprodukt ist null, wenn alle drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *in einer Ebene liegen.*

<u>Anwendungen des Spatprodukts:</u>

Zerlegung eines Vektors in drei Komponenten

Die früher graphisch in zwei Dimensionen gelöste Aufgabe wird rechnerisch für den dreidimensionalen Fall gelöst.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a}$ im Raum, drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, die die drei Zerlegungsrichtungen angeben.



Es sollen also drei Zahlen gefunden werden, sodass gilt:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit dem Vektorprodukt $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, dann verschwinden offensichtlich die Spatprodukte $\vec{e}_2 \cdot \left(e_2 \times \vec{e}_3\right)$ und $\vec{e}_3 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right)$, denn die Vektoren liegen in einer Ebene, und es bleibt:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) = a_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right)$$

$$\underbrace{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}_{Spatprodukt\,(skalar)} = a_1 \cdot \underbrace{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}_{skalar}$$

Damit erhält man die Komponente in Richtung

$$\vec{e}_1\ a_1 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}$$

Multipliziert man die Ausgangsgleichung mit $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$, erhält man die Komponenten a_2 und a_3.

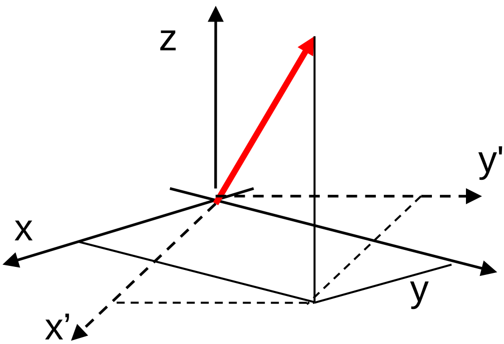
$$a_1 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3} \qquad a_2 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_3\ \vec{e}_1}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3} \qquad a_3 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}$$

Liegen die drei Einheitsvektoren in einer Ebene, dann ist das Spatprodukt $\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3$ gleich null, die Division ist nicht möglich und die Zerlegung nicht definiert.

Man kann einen Vektor nicht in drei Richtungen zerlegen, wenn deren Richtungspfeile in einer Ebene liegen.

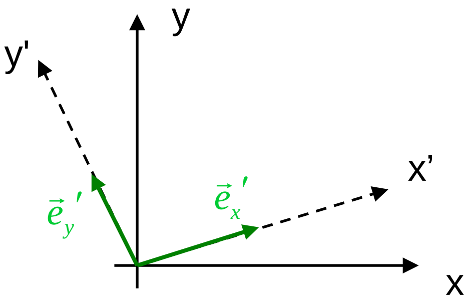
Beispiel:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = (4,3,3)$. Gesucht sind die drei Komponenten des Vektors in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, das um 30° um die z-Achse gedreht ist.



Lösung:

Der Einheitsvektor in z-Richtung bleibt erhalten, die Einheitsvektoren in x' und y' – Richtung lauten im x – y – System:



$$\vec{e}_x{}' = \left(\cos\left(30°\right), \sin\left(30°\right), 0\right)$$

$$\vec{e}_y{}' = \left(-\sin\left(30°\right), \cos\left(30°\right), 0\right)$$

$$\vec{e}_z{}' = \left(0,0,1\right)$$

Da das System der Einheitsvektoren rechtwinklig und ein Rechtssystem ist, sind die Spatprodukte:

$$\vec{e}_x{}'\,\vec{e}_y{}'\,\vec{e}_z{}' = \vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3 = 1$$

und

$$\vec{e}_x{}' \times \vec{e}_y{}' = \vec{e}_z{}' \qquad \vec{e}_y{}' \times \vec{e}_z{}' = \vec{e}_x{}' \qquad \vec{e}_z{}' \times \vec{e}_x{}' = \vec{e}_y{}'$$

$$\vec{a}\,\vec{e}_y{}'\,\vec{e}_z{}' = \vec{a} \cdot \vec{e}_x{}'$$

$$= \left(4,3,3\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0 \right)$$

$$a_1 = 4{,}964$$

$$\vec{a}\,\vec{e}_z{}'\,\vec{e}_x{}' = \vec{a}\cdot\vec{e}_z{}'$$

$$= (4,3,3)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\cos\left(\frac{\pi}{3}\right),0\right)$$

$$a_2 = 0,598$$

$$a_3 = a_z = 3$$

Ergebnis:

$$\vec{a} = (4,964;\ 0,598;\ 3)$$