2 Zahlenfolgen und Reihen

2.1 Begriffe

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete Folge von Zahlen. Dabei sollen die einzelnen Glieder der Zahlenfolge durch eine bestimmte Gesetzmäßigkeit gebildet werden.
Beispiele:

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11 ....
   Folge der ungeraden Zahlen
2. 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
   Folge der Quadratzahlen
3. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. ...
   Folge der Potenzen von 2

allgemein:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots \; a_n$$

Die tief gestellte Ziffer gibt die Stelle innerhalb der Zahlenfolge an, a_n ist das letzte Glied der Zahlenfolge.

Die Zahlenfolge kann nach n Gliedern abbrechen, man kann sie sich aber auch beliebig weit ($\rightarrow \infty$) fortgesetzt denken.

Eine Zahlenfolge kann man zwar verbal beschreiben, aber mit der Beschreibung nicht rechnen. Eine Zahlenfolge soll dann als vollständig definiert gelten, wenn man ein beliebiges Glied a_i aus seiner Platzziffer i berechnen kann oder zumindest aus seinem Vorgängerglied (rekursive Definition):

Beispiele:

$$\underbrace{1}_{1} \quad \underbrace{4}_{2} \quad \underbrace{9}_{3} \quad \underbrace{16}_{4} \quad \underbrace{25}_{5} \quad \ldots \quad \underbrace{a_i}_{i} = i^2$$

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \ldots \quad a_i = 2 \cdot i - 1$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \ldots \quad a_i = 2^{i-1}$$

$$1 \quad -0{,}5 \quad 0{,}25 \quad -0{,}125 \quad 0{,}0625 \quad \ldots \quad a_i = (-1)^{i-1} \cdot 2^{-i+1}$$

$$-2 \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad -10 \quad \ldots \quad a_i = -2 \cdot i$$

Man bezeichnet eine Zahlenfolge als

- monoton steigend, wenn gilt: $a_{i+1} > a_i$
- konstant, wenn gilt: $a_{i+1} = a_i$
- monoton fallend, wenn gilt: $a_{i+1} < a_i$
- alternierend, wenn gilt: $a_i \cdot a_{i+1} < 0$

Addiert man die einzelnen Glieder einer Zahlenfolge bis zur Stelle i, dann erhält man eine sog. Partialsumme:

$$S_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$$

in abgekürzter Schreibweise: $S_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$.

Multipliziert man die einzelnen Glieder miteinander, entsteht ein Partialprodukt:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_i = \prod_{k=1}^{i} a_k$$

Die Partialsummen der Zahlenfolgen bilden ebenfalls eine Zahlenfolge; man nennt sie eine Reihe, genauer eine Summenreihe.

Die Partialprodukte einer Zahlenfolge heißt entsprechend eine Produktreihe.

Will man alle Werte einer zweidimensionalen Tabelle addieren, kann man Doppelsummen bilden:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{m} a_{i,k} = {} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1m} + \\
& + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2m} + \\
& + \ldots \\
& + a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \ldots + a_{nm}
\end{aligned}
$$

Zunächst steht der vordere Index auf 1 und der zweite Index wird von k = 1 bis m variiert. Dann wird der vordere Index um 1 erhöht und wieder der zweite Index von 1 bis m variiert. Die letzte Zeile enthält als ersten Index die obere Grenze n.

Im Folgenden werden für die wichtigsten Typen von Zahlenfolgen und Reihen die beiden Grundaufgaben gelöst:

- Die Bestimmung des i. Gliedes einer Zahlenfolge und
- Die Bestimmung des Wert einer Reihe bzw. deren Partialsumme.

2.2 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

Arithmetische Zahlenfolgen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist:

$$a_{i+1} - a_i = d$$
$$a_{i+1} = a_i + d$$

Somit ist:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3 \cdot d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel:

1, 3, 5, 7, 9, ...

$$a_1 = 1 \quad d = 2$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2 \cdot n - 1$$

Die Partialsumme ist:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$
$$= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + (n-1) \cdot d$$

in umgekehrter Reihenfolge ist die Summe:

$$S = a_n + a_n - d + a_n - 2 \cdot d + a_n - 3 \cdot d + \ldots + a_n - (n-1) \cdot d$$

Addiert man beide Gleichungen, erhält man:

$$2 \cdot S = \underbrace{a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + \ldots}_{n-\text{mal}}$$

$$2 \cdot S = n \cdot (a_n + a_1)$$

$$S = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$$

Mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + (n-1) \cdot d + a_1)$$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Beispiele:

Wie groß ist die Summe

1. der ersten n Zahlen?
2. der ersten n ungeraden Zahlen?
3. der ersten n geraden Zahlen?

1.) $d = 1$, $a_n = n$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) $d = 2$ $a_1 = 1$ $S = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n$

$$S = n^2$$

3.) $a_1 = 2$ $a_n = 2 \cdot n$ $S = \frac{n}{2} \cdot (2 + 2 \cdot n)$

$$S = n \cdot (n+1)$$

2.3 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

Eine geometrische Zahlenfolge ist dadurch gekennzeichnet, dass der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q \qquad a_i = q \cdot a_{i-1}$$

Damit lautet die Zahlenfolge allgemein:

$$a, \quad a \cdot q, \quad a \cdot q^2, \quad a \cdot q^3 \quad \ldots, \quad a \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

Beispiele:

1. $$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \ldots$$

$$a = 1 \qquad q = \frac{1}{2} \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2. $$1, \quad -3, \quad 9, \quad -27, \quad 81, \quad \ldots$$

$$a = 1 \quad q = -3 \qquad a_n = (-3)^{n-1}$$

Analog zu den Arithmetischen Reihen bildet man auch hier die Partialsumme bis zum n. Glied:

$$S = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$$

Um eine Formel für S zu erhalten, bildet man

$$q \cdot S - S$$

$$q \cdot S = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n$$

$$q \cdot S - S = a \cdot q^n - a = a \cdot \left(q^n - 1\right)$$

$$S \cdot \left(q - 1\right) = a \cdot \left(q^n - 1\right)$$

$$S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispiele:

1. Normzahlreihen

Zwischen die beiden Zahlen 1 und 10 sollen 4 weitere Zahlen so eingeschoben werden, dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht:

$$a_1 = 1 \quad a_6 = 10 = a_1 \cdot q^5$$

$$q^5 = 10 \quad q = \sqrt[5]{10} = 1{,}5849$$

Die Reihe lautet damit:

1, 1,585, 2,51, 4, 6,3 10

In der Praxis werden die Zahlenwerte noch stärker gerundet:

1 1,6 2,5 4 6,3 10

Dies ist gleichzeitig die Normzahlreihe R5

Nach Normzahlreihen werden in der Technik zahlreiche Bauteile gestuft, z.B. elektrische Widerstände, Kondensatoren, aber auch Kochtöpfe, Schrauben usw.

2. Ein Bogen Papier mit der Dicke 0,1 mm soll 20 mal gefaltet werden. Wie dick wird das gefaltete

Papier?

$$a_1 = 0{,}1 \quad a_{21} = a_1 \cdot q^{20} \quad \text{mit} \quad q = 2$$

$$a_{21} = 0{,}1 \cdot 2^{20} = 104.857{,}6\ \text{mm} = 104{,}8\ \text{m}$$

3. Ein Sparer legt 1000 € zu 3% Jahreszins an.
   Welche Summe erhält er nach 10 Jahren?
   Nach welcher Zeit hat sich sein Kapitaleinsatz verdoppelt?

$$a_1 = 1000 \quad q = 1{,}03 \quad a_{11} = 1000 \cdot 1{,}03^{10} = 1343{,}92\ €$$

$$a_1 \cdot q^x = 2 \cdot a_1 \quad 1{,}03^x = 2 \quad x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} = 23{,}5\ \text{Jahre}$$

4. Ein Sparer legt am Beginn eines jeden Jahres 1000 € auf einem Sparkonto an und erhält von der Bank 3% Jahreszinsen. Wie viel Geld hat er nach Ablauf von 10 Jahren?
   Die erste Rate wird 10 Jahre lang verzinst: $a_1 \cdot q^{10}$
   die zweite Rate 9 Jahre $a_1 \cdot q^9$
   die letzte Rate 1 Jahr $a_1 \cdot q$
   Die Summe ist:

$$1000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} = 11.807{,}80\ €$$