Hochschule Kempten

Fakultät Maschinenbau

Vorbereitungskurs Mathematik für Studienanfänger

Prof. König

1. Grundrechenarten, Regeln

1.1 Zahlarten, Verknüpfungen

Die grundlegenden Objekte der Zahlenalgebra sind die natürlichen Zahlen. Sie bilden die Menge der natürlichen Zahlen **N** und werden benutzt als

- Kardinalzahlen: Sie dienen zum Zählen von Dingen und zur Angabe der Mächtigkeit einer Menge.
- Ordinalzahlen: Sie dienen zur Angabe einer Reihenfolge oder einer Ordnung.

Sprachlich drückt man das so aus:
- 25 Äpfel
- der 25. Platz beim Straßenrennen.

Bei der Verwendung als Kardinalzahlen kann man Verknüpfungen zwischen Zahlen herstellen durch Definition einer Addition:

$$2 + 3 = 5$$

und einer Multiplikation, die man als mehrfache Addition auffassen kann:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4-mal} = 4 \cdot 3 = 12$$

Will man allgemeine Gesetzmäßigkeiten formulieren, dann trennt man die Zahl von ihrem Wert und bezeichnet allgemein Zahlen mit Buchstaben.

Addition:	$a + b = c$
Multiplikation:	$a \cdot b = c$

Beide Operationen sind “kommutativ”, d.h. man darf die beiden Operanden vertauschen:

$$a+b=b+a=c \qquad a\cdot b=b\cdot a=c$$

Bei der Multiplikation nennt man a und b die Faktoren.

Es ist zweckmäßig, sog. Einselemente einzuführen:

Die Zahl, die eine andere Zahl bei einer Addition unverändert lässt, ist die Zahl 0 (Einselement der Addition):

$$a + 0 = a$$

Die Zahl, die eine andere Zahl bei der Multiplikation unverändert lässt, ist die Zahl 1 (Einselement der Multiplikation):

$$a \cdot 1 = a$$

Es ist also zweckmäßig, die null ebenfalls zu den natürlichen Zahlen hinzu zu nehmen, obwohl sie als Ordinalzahl keinen Sinn hat.

1.2 Umkehrung, inverse Operationen

Die Definition der Addition erlaubt folgende Umkehrung:

Welche Zahl muss man zu a addieren, damit sich c ergibt?

$$a + x = c$$

Den Vorgang nennt man Subtraktion und schreibt:

$$x = c - a$$

Falls a > c ist, kann man diese Subtraktion nicht mehr im Bereich der natürlichen Zahlen ausführen. Man führt eine neue Art von Zahlen ein, die negativen Zahlen:

$$-3; \quad -17; \quad -a$$

Das negative Zeichen „-„ ist hier kein Verknüpfungszeichen zwischen zwei Zahlen, sondern ein sog. einstelliger Vorzeichenoperator.
Natürliche Zahlen und negative Zahlen bilden die Menge der „ganzen Zahlen“ **Z**

Bei der Multiplikation lautet die Frage:

Welche Zahl ist mit a zu multiplizieren, damit sich c ergibt?

$$a \cdot x = c \quad \rightarrow \quad x = \frac{c}{a} \quad \text{oder} \quad x = c : a$$

Diese Operation heißt „Division“ und ist im Bereich der ganzen Zahlen nur durchführbar, wenn a ohne Rest in c enthalten ist. Um die Division unbeschränkt durchführen zu können, definiert man eine neue Menge von Zahlen, die gebrochen rationalen Zahlen **Q**. Eine gebrochen rationale Zahl besteht streng genommen aus zwei ganzen Zahlen, einer Zahl im Zähler und eine im Nenner eines Bruchs. Führt man die Division zahlenmäßig aus, entsteht eine endliche oder unendlich periodische gebrochene Zahl.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{3}{11} = 0,2727\overline{27}$$

Die ganzen Zahlen sind dabei in der Menge der gebrochen-rationalen Zahlen als Sonderfall enthalten. Sie haben den Nenner 1.

Ausnahme: eine Division durch null ist nicht erlaubt und lässt sich nicht widerspruchsfrei definieren! Man kann auch keine neue Zahlkategorie einführen, innerhalb der die Division durch null widerspruchsfrei möglich ist.

1.3 Addition und Multiplikation in einem Ausdruck, das distributive Gesetz

Besteht ein Ausdruck aus additiven und multiplikativen Verknüpfungen, dann entsteht die Frage, welche Operation Priorität vor der anderen hat.
In einem Ausdruck der Form:

$$a \cdot b + c$$

ist zunächst die Multiplikation, dann die Addition durchzuführen. Falls die Reihenfolge geändert werden soll, müssen Klammern gesetzt werden:

$$a \cdot (b + c)$$

Dabei gilt das distributive Gesetz. Obige Klammer kann „ausmultipliziert“ werden:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Besteht auch der erste Faktor aus einer Klammer:

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

dann kann man für die erste Klammer zunächst eine neue Variable einführen und die Multiplikation nach dem distributiven Gesetz ausführen:

$$u = (a + b)$$

$$u \cdot (c + d) = u \cdot c + u \cdot d$$

Ersetzt man u durch a+b, kann man wieder die Klammern ausmultiplizieren und man erhält:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (c + d) &= u \cdot c + u \cdot d \\ &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d\end{aligned}$$

Es ist also jede Zahl der ersten Klammer mit jeder Zahl der zweiten Klammer zu multiplizieren. Diese Regel kann man verallgemeinern für eine beliebige Anzahl von Zahlen in den beiden Klammern.

Sind negative Zahlen bei der Multiplikation beteiligt, gelten folgende Regeln:

$$(+a)\cdot(+b)=a\cdot b$$
$$(-a)\cdot(+b)=-a\cdot b$$
$$(+a)\cdot(-b)=-a\cdot b$$
$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$$

Während man sich die ersten drei Gesetze an Hand praktischer Beispiele leicht überlegen kann, ist die vierte Regel nicht ganz selbstverständlich:

Es gilt z.B $\qquad 4+(-4)=0$

Multipliziert man beide Seiten mit -4:

$$4+(-4)=0 \,\Big|\cdot(-4)$$
$$(-4)\cdot 4+(-4)\cdot(-4)=0$$
$$-4\cdot 4+(-4)\cdot(-4)=0 \,\Big|+(4\cdot 4)$$
$$(-4)\cdot(-4)=4\cdot 4$$

Damit ist die vierte Regel zumindest an Hand der drei anderen plausibel.
Mit obigen Regeln kann man auch Klammern ausmultiplizieren, wenn negative Zahlen in den Klammern enthalten sind:

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot(c-d)&=\big(a+(-b)\big)\cdot\big(c+(-d)\big)\\&=a\cdot c-a\cdot d-b\cdot c+b\cdot d\end{aligned}$$

Außerdem kann man den Fall behandeln, dass ein negatives Vorzeichen vor einer Klammer steht. Dieses kann man ansehen, als stünde vor der Klammer der Faktor -1:

$$-(a-b)=(-1)\cdot(a-b)=-a+b$$

Ein negatives Vorzeichen vor einer Klammer kehrt also alle Vorzeichen in der Klammer um.

Sonderfälle:

Enthalten beide Klammern die gleichen Variablen, dann entstehen die sog. Binomischen Formeln:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

1.4 Rechnen mit Brüchen

<u>Erweitern und Kürzen von Brüchen</u>

Regel:

Der Wert eines Bruchs bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert oder durch den gleichen Faktor dividiert.

Die Brüche:

$$\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{15}{21}=\frac{-10}{-14}=\frac{(-2)\cdot 5}{(-2)\cdot 7}$$

sind also gleich. Dies führt auf die Regel:

Gleiche Faktoren in Zähler und Nenner eines Bruchs dürfen gekürzt werden.

Im Übrigen gelten die gleichen Vorzeichenregeln wie bei der Multiplikation:

$$(+a):(+b)=+\frac{a}{b}$$

$$(-a):(+b)=-\frac{a}{b}$$

$$(+a):(-b)=-\frac{a}{b}$$

$$(-a):(-b)=+\frac{a}{b}$$

Ein negatives Vorzeichen vor dem Bruch kann man also entweder dem Zähler oder dem Nenner zuordnen.

Addieren und Subtrahieren:

Beim Addieren und Subtrahieren sind wieder Prioritätsregeln zu beachten:

$$\frac{7}{3}+\frac{11}{6}=7:3+11:6$$

Auch hier gilt, dass die Division als Umkehrung der Multiplikation Vorrang vor der Addition und Subtraktion hat. Es ist also nicht richtig, so zu rechnen:

$$7:(3+11):6$$

Man kann den allgemeinen Grundsatz aufstellen:

Punktrechnung kommt vor Strichrechnung

Will man die beiden Brüche zu einem Bruch zusammenfassen, muss man die beiden Brüche so erweitern, dass die Nenner beider Brüche gleich sind:

$$\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{11}{6}=\frac{25}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}+\frac{m\cdot b}{n\cdot b}=\frac{a\cdot n+m\cdot b}{b\cdot n}$$

Multiplizieren und Dividieren:

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Dies ist gerechtfertigt, weil die beiden Operationen Multiplizieren und Dividieren die gleiche Priorität haben und es deshalb gleichgültig ist, wie die Reihenfolge der Operationen gewählt wird.

Zwei Brüche werden miteinander dividiert, indem der erste Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs (Divisor) multipliziert wird:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

<u>Beispiele:</u>

Folgende Ausdrücke sollen vereinfacht werden:

1. $\{3\cdot a-[4\cdot b-2\cdot a-(3\cdot b-6\cdot a)-8\cdot b]+3\cdot b\}$

   Ergebnis: $-a+10\cdot b$

2. $3{,}6\cdot x-\{7{,}2\cdot x-9{,}0\cdot y-[6{,}6\cdot x+4{,}3\cdot z]+3{,}3\cdot z\}$

   Ergebnis: $3\cdot x+9\cdot y+z$

3. $3\cdot x\cdot(4\cdot y-2\cdot z)-3\cdot y\cdot(-2\cdot x+3\cdot z)+3\cdot z\cdot(3\cdot x-4\cdot y)$

   Ergebnis: $3\cdot(6\cdot x\cdot y+x\cdot z-7\cdot y\cdot z)$

   Die folgenden Ausdrücke sollen in Faktoren zerlegt werden:

4. $a\cdot x\cdot n\cdot d-a\cdot x\cdot n\cdot c+a\cdot b\cdot n\cdot d-a\cdot b\cdot n\cdot c$

   Ergebnis: $a\cdot n\cdot(d-c)\cdot(x+b)$

5. $2 \cdot a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z - 2 \cdot b \cdot x - b \cdot y - b \cdot z$

Ergebnis: $\left(a-b\right) \cdot \left(2 \cdot x + y + z\right)$

Fassen Sie folgende Brüche zusammen und vereinfachen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich:

6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{13}{18}$ Ergebnis: $\frac{1}{18}$

7. $\frac{1}{a} + a - 2$ Ergebnis: $\frac{\left(a-1\right)^2}{a}$

8. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2-b^2}{a \cdot b}$ Ergebnis $\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a \cdot b \cdot \left(a^2-b^2\right)}$

9. $\frac{x^4 - y^4}{\left(x^2-y^2\right) \cdot x \cdot y} + 2$ Ergebnis: $\frac{\left(x+y\right)^2}{x \cdot y}$

10.

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{3 \cdot a^2 \cdot x^2 - 12 \cdot a^2}{a \cdot x - 2 \cdot a}}{6 \cdot a^2 \cdot \frac{x+2}{2 \cdot b}}$$

Ergebnis: 1

11. $\left[\left(\frac{x}{4} : \frac{1}{3}\right) : \frac{x}{8}\right] : \frac{4}{x^2}$ Ergebnis: $\frac{3}{2} \cdot x^2$

1.5 Potenzen

Wird eine Zahl a mehrfach mit sich selbst multipliziert, schreibt man den Ausdruck kürzer als Potenz:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal} = b$$

$$b = a^n$$

a heißt die „Basis", n der „Exponent" der Potenz. Auch für Potenzen lassen sich allgemeine Rechenregeln aufstellen:

<u>Produkt zweier Potenzen mit gleicher Basis:</u>

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{m-mal} = a^{n+m}$$

Multipliziert man zwei Potenzen mit gleicher Basis, dann werden die Exponenten addiert.

<u>Quotient zweier Potenzen mit gleicher Basis:</u>

$$\frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{m-mal}} = a^{n-m}$$

Man kann so oft den Faktor a kürzen, bis entweder in Zähler oder Nenner nur noch der Faktor 1 übrig bleibt.

Sonderfälle:

Ist n = m, dann lassen sich alle Faktoren a kürzen und es bleibt:

$$a^0 = 1$$

und
$$\frac{1}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

<u>Potenz einer Potenz:</u>

Bildet man. $\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n}_{m-mal} = \left(\cdot a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

<u>Potenzen ungleicher Basis:</u>

Faktoren mit gleichen Exponenten lassen sich zusammenfassen:

$$a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

<u>Einschränkung:</u>
Potenzen mit negativer Basis sind im Bereich der reellen Zahlen nur für ganzzahlige Exponenten erlaubt.

Beispiele:

$$\left(-2\right)^3 = \left(-2\right)\cdot\left(-2\right)\cdot\left(-2\right) = -8$$

$$\left(-5\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{1}{25}$$

Die meisten Taschenrechner sind so programmiert, dass negative Basen von Potenzen generell ausgeschlossen sind und zu einer Fehlermeldung führen.

Prioritätsregeln:

Für die bisher definierten Rechenoperationen gelten folgende Prioritätsregeln:

1. Potenzieren
2. Multiplizieren, Dividieren
3. Addieren, Subtrahieren

Soll eine andere Reihenfolge gelten, müssen Klammern gesetzt werden.

Es ist deshalb <u>nicht</u> erlaubt:

$$\left(a^3 + b^3\right) \neq \left(a+b\right)^3$$

$$\left(a+b\right)^3 \neq \left(a^3 + b^3\right)$$

Potenzieren hat Priorität gegenüber Addieren. Die Aussage gilt auch in umgekehrter Richtung. Auf der rechten Seite wurde die Priorität durch Klammersetzung geändert.

$$\frac{a^3}{b} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Potenzieren hat Priorität gegenüber Dividieren.

Folgende Ausdrücke lassen sich nicht zusammenfassen oder kürzen:

$$a^n \pm a^m$$

$$\frac{a^n + 1}{a^m - 1}$$

Beispiele:
Folgende Ausdrücke sollen vereinfacht werden:

a) $\dfrac{u^3 \cdot u^{-5} \cdot u^2}{u^{-3}}$ Lösung: u^3

b) $\dfrac{a^4 \cdot b^{-3} \cdot \left(a^2 - b^2\right)}{a^5 \cdot b^{-4} \cdot \left(a^2 + b^2\right)}$ Lösung: $\dfrac{b \cdot \left(a^2 - b^2\right)}{a \cdot \left(a^2 + b^2\right)}$

c) $\left[(1+a)^2 : (1+a)^{-3}\right] \cdot (1+a)^{-5}$ Lösung: 1

d) $\left[\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^4 : (1-a)^{-5}\right] \cdot \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{-4}$ Lösung: $1-a$

1.6 1. Umkehrung des Potenzierens: Wurzeln

Ist in dem Potenzausdruck:

$$a^b = c$$

die Größe b und c bekannt, jedoch a gesucht, bedeutet dies eine Umkehrung des Potenzierens. Man bezeichnet dies (aus historischen Gründen) als Wurzelziehen:

$$a = \sqrt[b]{c}$$

Die Frage lautet:

Welche Zahl a wurde zur Potenz b genommen, damit sich c ergibt?

Beispiel:

$$\sqrt[2]{81} = 9;$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

Es ist zu beachten, dass die Wurzel einer ganzen Zahl im allgemeinen keine ganze Zahl, nicht einmal eine rationale Zahl ist. Man hat Veranlassung, eine neue Zahlkategorie einzuführen, die „Irrationalzahlen“. In der gebrochenen Darstellung handelt es sich nicht mehr um endliche oder periodisch-unendliche Brüche, sondern um nichtperiodische unendliche Brüche.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{2} = 1{,}1414213562.....$$

$$\sqrt[5]{5} = 1{,}379729661....$$

<u>Wurzeln aus negativen Zahlen:</u>

Versucht man, Wurzeln aus negativen Zahlen zu bilden, stößt man im Bereich der bisher definierten Zahlen auf ein nicht lösbares Problem.

Beispiel: $a = \sqrt{-16}$

Quadriert man, ergibt sich:

$$a^2 = a \cdot a = -16$$

Nach den Multiplikationsregeln für Zahlen ergibt sich ein negatives Ergebnis nur dann, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies ist beim Quadrieren einer Zahl nicht der Fall. Man muss eine neue Zahlkategorie einführen, um auch Wurzeln aus negativen Zahlen berechnen zu können, die sog. komplexen Zahlen. Sie werden in diesem Kurs nicht behandelt.

<u>Exponentialdarstellung der Wurzeln:</u>

Aus der Definitionsgleichung:

$$a = \sqrt[b]{c}$$

ergibt sich: Potenziert man die Wurzeln zur Potenz b, muss sich wieder c ergeben. Man kann nun versuchen, für die (willkürliche) Festlegung der Wurzeloperation durch ein neues Rechenzeichen eine Potenzdarstellung zu finden:

$$\sqrt[b]{c} = c^n$$

wobei der Exponent n zunächst noch unbestimmt ist.

Bildet man die b. Potenz, muss sich wieder c^1 ergeben: $$\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = c^{n \cdot b} = c^1$$

n muss also gleich 1/b sein $$n = \frac{1}{b},$$

damit ergibt sich für die Wurzel eine Potenzschreibweise:

$$\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$$

Beispiel: $$a = \sqrt[5]{22} = 22^{\frac{1}{5}}$$

und das Konzept der Potenzen ist auf gebrochen – rationale Exponenten erweitert.
Obige Regeln lassen sich leicht ableiten, wenn die Exponenten ganze oder rationale Zahlen sind. Man kann jedoch nachweisen, dass alle Formeln gültig sind, auch wenn die Exponenten allgemein reelle oder sogar komplexe Zahlen sind.

Man kann Potenzieren und Wurzelziehen kombinieren:

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Da die Multiplikation der Exponenten vertauschbar ist, kann man dafür auch schreiben:

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{6}}$$

Wurzelziehen und Potenzieren kann man also vertauschen, da beide Operationen gleiche Priorität haben. Da Wurzelziehen eine Potenzoperation ist, gelten alle Regeln des Potenzrechnens auch für Wurzeln.

Beispiele:

a) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}} = \left(\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}} = 2^{\frac{10}{20}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

c)

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{18}-\sqrt{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{18}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(18 - 2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} + 2\right) =$$

$$= 4\cdot\sqrt{36} = 24$$

d) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{6}+\frac{4}{6}} = a^1 = a$

e) $\sqrt[2\cdot a]{x^{4\cdot a}} = x^{\frac{4\cdot a}{2\cdot a}} = x^2$

1.6 2. Umkehrung des Potenzierens, der Logarithmus

Ist im Ausdruck: $a^n = c$

die Größe a und c bekannt und der Exponent gesucht, hat man den Logarithmus zu bilden:

$$n = \log_a c$$

Die Frage lautet also:

In welche Potenz wurde die Basis a erhoben, um das Ergebnis c zu erhalten?

Beispiele:

$\log_6 36 = 2$ denn $6^2 = 36$

$\log_2 64 = 6$ denn $2^6 = 64$

$\log_{10} 1000 = 3$ denn $10^3 = 1000$

$\log_{0,25} 16 = -2$ denn $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

Sonderfälle:

$\log_c c = 1$ denn $c^1 = c$

$\log_c 1 = 0$ denn $c^0 = 1$

$\log_c 0$ ist nicht definiert, denn c^n wird nur null, wenn $n \to -\infty$ strebt.

Logarithmieren und Potenzieren sind Umkehroperationen. Ebenso wie

$$\sqrt[3]{x^3} = x \text{ ist,}$$

kann man sich überlegen, dass:

$$n = \log_c\left(c^n\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{c}^{\log_c a} = a$$

Potenzieren und anschließendes Logarithmieren heben sich auf, ebenso wie Logarithmieren und anschließendes Potenzieren, denn mit der Ausgangsbeziehung: $a = c^n$

$n = \log_c\left(c^n\right)$ c wurde in die n. Potenz erhoben, damit sich c^n ergibt. Ebenso

$\mathrm{c}^{\log_c a} = a$ da $\log_c a = n$, ist $c^n = a$

Für das Rechnen mit Logarithmen lassen sich einige praktische und oft benutzte Regeln ableiten:

$$\log_c\left(a \cdot b\right) = \log_c a + \log_c b$$

Man kann nämlich jede Zahl auch als Potenzausdruck darstellen:

$$a = c^u \qquad b = c^v$$

Die Zahl 64 kann man darstellen als 2^6 oder als 8^2.

Damit ist $\qquad a \cdot b = c^u \cdot c^v = c^{u+v}$

Logarithmiert man nun zur Basis c, ergibt sich:

$$\log_c (a \cdot b) = u + v$$

Andererseits ist aber

$$u = \log_c a \qquad \text{und} \qquad v = \log_c b$$

Somit ist

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

Ebenso kann man sich überlegen, dass

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

Außerdem ist

$$\log_c a^n = \log_c \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a.....)}_{n-mal} = \log_c a + \log_c a + \log_c a + ...$$

$$= n \cdot \log_c a$$

$$\log_c a^n = n \cdot \log_c a$$

Verallgemeinerung:

$$\log_c \sqrt[n]{a^m} = \log_c a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_c a$$

Umrechnung von Logarithmen der Basis a in solche der Basis m:
Kennt man die Logarithmen der Basis a, z.B die Logarithmen der Basis e oder 10 auf dem Taschenrechner und benötigt die Logarithmen der Basis b, kann man die Logarithmen folgendermaßen umrechnen:

$$c = a^n \quad n = \log_a c$$

Logarithmiert man den Ausdruck zur Basis b, erhält man:

$$\log_b c = \log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Ersetzt man n, ergibt sich:

$$\log_b c = n \cdot \log_b a = \log_a c \cdot \log_b a$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Zusammenstellung der Formeln:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \sqrt[n]{a^m} = \log_c a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_c a$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Für das praktische Rechnen sind von besonderer Bedeutung die Logarithmen zur Basis 10, zur Basis e und zur Basis 2. Für sie werden deshalb besondere Bezeichnungen eingeführt:

$$\log_{10} a = \lg a$$
$$\log_e a = \ln a$$
$$\log_2 a = ld(a)$$

Beispiele:

a) $\lg 7{,}12345 = 0{,}85269$

b) $$\lg 712{,}345 = \lg\left(7{,}12345 \cdot 10^2\right) = \lg\left(7{,}12345\right) + \lg 10^2$$
$$= 0{,}85269 + 2 = 2{,}85269$$

c)
$$\lg(0{,}000712345) = \lg\left(7{,}12345 \cdot 10^{-4}\right)$$
$$= \lg\left(7{,}12345\right) + \lg 10^{-4}$$
$$= 0{,}85269 - 4 = -3{,}14731$$

d)

$$ld(0{,}722)+\ln(0{,}722)+\lg(0{,}722)$$
$$=\frac{\ln(0{,}722)}{\ln 2}+\ln(0{,}722)+\frac{\ln(0{,}722)}{\ln 10}$$
$$=\ln(0{,}722)\cdot\left(\frac{1}{\ln 2}+1+\frac{1}{\ln 10}\right)=-0{,}9371$$

1.8 Der binomische Satz

Am Beginn dieses Kapitels wurden Ausdrücke der Form

$$(a+b)\cdot(c+d)$$

mit Hilfe des distributiven Gesetzes ausmultipliziert. Falls beide Klammerausdrücke gleich sind, ergab sich als Spezialfall:

$$(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

Ausdrücke der Form (a + b) bezeichnet man als Binome, wobei auch Potenzen der Binome von Interesse sind:

$$(a+b)^n$$

Niedrige Potenzen lassen sich durch Ausmultiplizieren zerlegen. Man erhält:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

Um ein Bildungsgesetz für die Vorfaktoren zu erhalten, kann man sie in geeigneter Weise in einem sog. Pascal'schen Dreieck anordnen:

$n = 0$	1	Summe = 2^0
1	1 1	2^1
2	1 2 1	2^2
3	1 3 3 1	2^3
4	1 4 6 4 1	2^4
5	1 5 10 10 5 1	2^5

Hat man eine Zeile der Koeffizienten berechnet, erhält man die nächste Zeile nach folgender Vorschrift:

1. Die Anzahl der Koeffizienten ist um 1 höher als der Exponent des Binoms
2. Der linke und der rechte Koeffizient ist jeweils 1
3. Man erhält einen Koeffizient der neuen Zeile, indem man zwei benachbarte Koeffizienten der darüber stehenden Zeile addiert.
4. Die Zahlen nennt man „Binomialkoeffizienten“

Das Pascal'sche Dreieck ergibt allerdings keinen formelmäßigen Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten und dem Binom Exponenten und der Stellung im Binom Produkt. Dazu werden die Koeffizienten für n = 5 noch einmal angeschrieben. Da zum Exponenten n = 5 sechs Koeffizienten gehören, beginnt man die Zählung zweckmäßiger Weise bei null:

k =	0	1	1
	1	5	$\frac{5}{1}$
	2	10	$\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$
	3	10	$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$
	4	5	$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
	5	1	$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

Die Darstellung in der rechten Spalte legt folgenden formelmäßigen Zusammenhang nahe:

Der k. Koeffizient des Binoms mit der Potenz n lautet:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}$$

Dafür ist die abkürzende Schreibweise üblich:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}$$

Dies nennt man die Euler’sche Schreibweise der Binomialkoeffizienten. Sie wird gesprochen „n über k“

$\binom{n}{k}$ steht bei den meisten Taschenrechnern als eigene Funktion mit der Bezeichnung nCr zur Verfügung

Entsprechend obiger Tabelle ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Die Reihe der Binomialkoeffizienten bricht bei k = n ab. Man definiert deshalb für k > n

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n$$

Aus dem Pascal’schen Dreieck lassen sich folgende Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ablesen:

- Symmetrieeigenschaft:
  $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
  also: in der Reihe n = 5 ist der Koeffizient k = 2
  $$\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$$

- Das Bildungsgesetz im Pascal’schen Dreieck lautet in der Euler’schen Schreibweise:
  $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Eine weitere Formel für die Binomialkoeffizienten ergibt sich, wenn man folgende Abkürzung benutzt:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k = k!$$

gesprochen: k Fakultät. Auch diese Funktion ist auf den gebräuchlichen Taschenrechnern realisiert

Im Nenner der Formel für die Binomialkoeffizienten steht bereits die Fakultät k! Um auch im Zähler eine Fakultätsdarstellung zu erhalten, muss der Bruch erweitert werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{(n-k) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Dies nennt man die Fakultätsdarstellung der Binomialkoeffizienten.

1.9 Komplexe Zahlen

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass im Bereich der reellen Zahlen nicht alle algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden können. Zum Beispiel ist die Wurzel aus einem negativen Radikanden nicht definiert:

$$c = \sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$$

Es gibt keine reelle Zahl, deren Wurzel -1 wäre. Damit kann man auch $\sqrt{-1}$ nicht auf der Zahlengerade der reellen Zahlen darstellen.

Man schreibt für $\sqrt{-1} = j$ oder i . $j^2 = -1$

Da negative Radikanden im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert waren, darf man folgenden Ausdruck nicht zusammenfassen:

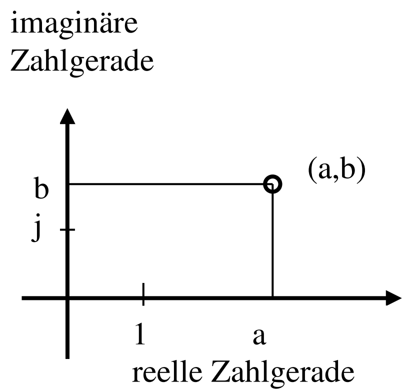
$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{a \cdot b}$$

sondern:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = j \cdot \sqrt{a} \cdot j \cdot \sqrt{b} = j^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a \cdot b}$$

Man nennt j die imaginäre Einheit und $j \cdot a$ eine imaginäre Zahl und hat damit das Zahlensystem um eine weitere Zahlkategorie erweitert, die komplexen Zahlen.

Da diese nicht auf der Zahlgeraden darstellbar sind, erweitert man die Zahldarstellung auf die Ebene und stellt eine komplexe Zahl als einen Punkt in der Ebene dar: Man nennt diese Ebene die „Gauß'sche Zahlenebene".



Führt man ein cartesisches Koordinatensystem ein, dann lässt sich ein Punkt durch zwei Zahlen (a,b) darstellen. Die erste Zahl (=die erste Komponente) wird auf der reellen Zahlgeraden abgetragen, die zweite Zahl auf der dazu senkrechten imaginären Achse. Diese ist ebenfalls eine Zahlenachse mit der Einheit j.

Um mit solchen Zahlenpaaren Rechenoperationen ausführen zu können, müssen Regeln aufgestellt werden, die so beschaffen sind, dass im Sonderfall, dass die zweite (imaginäre) Komponente null ist, die im Reellen geltenden Regeln weiter gelten.

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen

$$\mathrm{a} = (\alpha, \alpha') \quad \text{und} \quad \mathrm{b} = (\beta, \beta')$$

Dann ist die Addition definiert als

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} = (\alpha + \beta, \alpha' + \beta')$$

Falls die imaginären Anteile null sind, findet die Addition nur auf der reellen Zahlenachse statt. Somit ist diese Definition konsistent mit der entsprechenden Regel für reelle Zahlen.

Ebenso lässt sich die Subtraktion definieren als

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} = (\alpha - \beta, \alpha' - \beta')$$

Zur Definition der Multiplikation liegt es zunächst nahe, sie folgendermaßen zu definieren:

$$\mathrm{c} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = (\alpha, \alpha') \cdot (\beta, \beta') = (\alpha \cdot \beta,\ \alpha' \cdot \beta')$$

Diese Definition führt jedoch auf einen Widerspruch, denn multipliziert man etwa

$$\mathrm{a} = (\alpha, 0) \quad \text{mit} \quad \mathrm{b} = (0, \beta') \ ,$$

ergibt sich $c = a \cdot b = (0,0)$ also null, obwohl keiner der beiden Faktoren null ist. Richtige Ergebnisse liefert die Definition:

$$c = a \cdot b = (\alpha \cdot \beta - \alpha' \cdot \beta', \alpha \cdot \beta' + \alpha' \cdot \beta)$$

Diese Definition ergibt bei zwei rein reellen Zahlen das richtige Ergebnis $\alpha \cdot \beta$ und im Fall $a = (\alpha,0)$, $b = (0,\beta')$

ein Ergebnis $\neq$ 0.

Insbesonders liefert die Multiplikation

$$j \cdot j = j^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

$$j^2 = -1$$

Somit kann man eine komplexe Zahl auch folgendermaßen darstellen:

$$a = (\alpha,\alpha') = (\alpha,0) + (0,\alpha') = \alpha + \alpha' \cdot (0,1)$$

$$a = \alpha + j \cdot \alpha'$$

Dies ist die sog. Binomdarstellung einer komplexen Zahl.

Die Division der komplexen Zahlen lässt sich wie die Multiplikation mit zwei Zahlenpaaren als Umkehrung der Multiplikation durchführen und liefert folgende Formel:

Mit $c = (\gamma,\gamma')$, $a = (\alpha,\alpha')$ $b = (\beta,\beta')$

ist

$$c = \frac{a}{b} = \left(\frac{\alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta'}{\alpha^2 + \alpha'^2}, \frac{\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta}{\alpha^2 + \alpha'^2} \right)$$

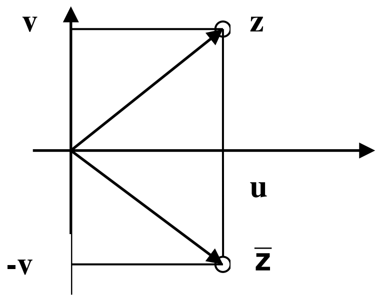
An Stelle der unanschaulichen Verknüpfungen der Paardarstellung verwendet man jedoch besser die Binomdarstellung der komplexen Zahlen.

Zusätzliche Definition:

Wenn $z = u + j \cdot v$ ist, dann nennt man

$$\overline{z} = u - j \cdot v$$

die zu z „konjugiert komplexe“ Zahl.



Wie in der Figur angedeutet, erinnert die Definition der Addition und der Subtraktion an die entsprechenden Verknüpfungen bei Vektoren. Allerdings trifft die Analogie nur bei Addition und Subtraktion zu. eine Multiplikation ist bei Vektoren abweichend definiert und eine Division prinzipiell nicht möglich.

Eine weitere Definition ist der Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{\text{Realteil}^2 + \text{Imaginärteil}^2} \qquad |z| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

In der Pfeildarstellung entspricht der Betrag der Länge des Pfeils

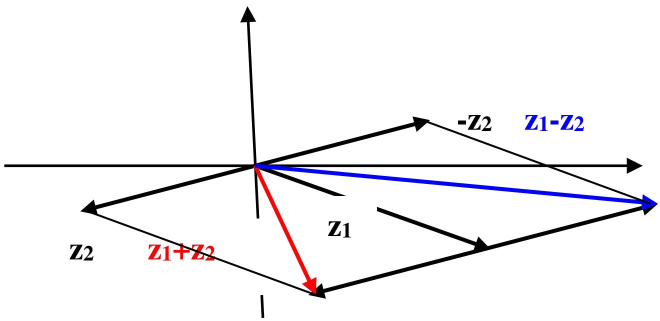
Beispiel:

Gegeben sind die beiden Zahlen

$$z_1 = (4,-2) = 4 - 2 \cdot j \quad z_2 = (-3,-1) = -3 - j$$

Gesucht ist die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient der beiden Vektoren.

$$z_1 + z_2 = (4-3,-2-1) = (1,-3)$$
$$= 4 - 2 \cdot j + (-3 - j) = -1 - 3 \cdot j$$
$$z_1 - z_2 = 4 - 2 \cdot j - (-3 - j) = 7 - j$$



Multiplikation und Division werden besser in der Binomform durchgeführt. Es gelten die normalen Regeln des Ausmultiplizierens von Klammern.

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 2 \cdot j) \cdot (-3 - j) = -12 - 4 \cdot j + 6 \cdot j + 2 \cdot j^2$$
$$= -14 - 2 \cdot j$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 2 \cdot j}{-3 - j}$$

Um den Nenner reell zu machen, wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-2\cdot j}{-3-j}\cdot\frac{-3+j}{-3+j} = \frac{-12+4\cdot j+6\cdot j-2\cdot j^2}{9+1} = \frac{-10+10\cdot j}{10} =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -1+j$$

Die komplexen Zahlen bilden eine Menge ***C*** *, die alle bisher besprochenen Mengen als Teilmengen enthält. Im Bereich der komplexen Zahlen sind alle algebraischen Zahloperationen ohne Einschränkung durchführbar, also*

- *Wurzeln mit negativem Argument*
- *Logarithmen mit negativer Basis und negativem Argument*
- *Potenzen mit negativer Basis*
- *Außerdem sind alle Operationen mit höheren Funktionen (Trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen usw.) ausführbar.*

2 Zahlenfolgen und Reihen

2.1 Begriffe

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete Folge von Zahlen. Dabei sollen die einzelnen Glieder der Zahlenfolge durch eine bestimmte Gesetzmäßigkeit gebildet werden.
Beispiele:

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11 ....
   Folge der ungeraden Zahlen
2. 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
   Folge der Quadratzahlen
3. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. ...
   Folge der Potenzen von 2

allgemein:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots \; a_n$$

Die tief gestellte Ziffer gibt die Stelle innerhalb der Zahlenfolge an, a_n ist das letzte Glied der Zahlenfolge.

Die Zahlenfolge kann nach n Gliedern abbrechen, man kann sie sich aber auch beliebig weit ($\rightarrow \infty$) fortgesetzt denken.

Eine Zahlenfolge kann man zwar verbal beschreiben, aber mit der Beschreibung nicht rechnen. Eine Zahlenfolge soll dann als vollständig definiert gelten, wenn man ein beliebiges Glied a_i aus seiner Platzziffer i berechnen kann oder zumindest aus seinem Vorgängerglied (rekursive Definition):

Beispiele:

$$\underbrace{1}_{1} \quad \underbrace{4}_{2} \quad \underbrace{9}_{3} \quad \underbrace{16}_{4} \quad \underbrace{25}_{5} \quad \ldots \quad \underbrace{a_i}_{i} = i^2$$

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \ldots \quad a_i = 2 \cdot i - 1$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \ldots \quad a_i = 2^{i-1}$$

$$1 \quad -0{,}5 \quad 0{,}25 \quad -0{,}125 \quad 0{,}0625 \quad \ldots \quad a_i = (-1)^{i-1} \cdot 2^{-i+1}$$

$$-2 \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad -10 \quad \ldots \quad a_i = -2 \cdot i$$

Man bezeichnet eine Zahlenfolge als

- monoton steigend, wenn gilt: $a_{i+1} > a_i$
- konstant, wenn gilt: $a_{i+1} = a_i$
- monoton fallend, wenn gilt: $a_{i+1} < a_i$
- alternierend, wenn gilt: $a_i \cdot a_{i+1} < 0$

Addiert man die einzelnen Glieder einer Zahlenfolge bis zur Stelle i, dann erhält man eine sog. Partialsumme:

$$S_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$$

in abgekürzter Schreibweise: $S_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$.

Multipliziert man die einzelnen Glieder miteinander, entsteht ein Partialprodukt:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_i = \prod_{k=1}^{i} a_k$$

Die Partialsummen der Zahlenfolgen bilden ebenfalls eine Zahlenfolge; man nennt sie eine Reihe, genauer eine Summenreihe.

Die Partialprodukte einer Zahlenfolge heißt entsprechend eine Produktreihe.

Will man alle Werte einer zweidimensionalen Tabelle addieren, kann man Doppelsummen bilden:

$$\begin{aligned}\sum_1^n \sum_1^m a_{i,k} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1m} + \\ &+ a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2m} + \\ &+ \ldots \\ &+ a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \ldots + a_{nm}\end{aligned}$$

Zunächst steht der vordere Index auf 1 und der zweite Index wird von k = 1 bis m variiert. Dann wird der vordere Index um 1 erhöht und wieder der zweite Index von 1 bis m variiert. Die letzte Zeile enthält als ersten Index die obere Grenze n.

Im Folgenden werden für die wichtigsten Typen von Zahlenfolgen und Reihen die beiden Grundaufgaben gelöst:

- Die Bestimmung des i. Gliedes einer Zahlenfolge und
- Die Bestimmung des Wert einer Reihe bzw. deren Partialsumme.

2.2 Arithmetische Zahlenfolgen und Reihen

Arithmetische Zahlenfolgen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist:

$$a_{i+1} - a_i = d$$
$$a_{i+1} = a_i + d$$

Somit ist:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3 \cdot d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel:

1, 3, 5, 7, 9, ...

$$a_1 = 1 \quad d = 2$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2 \cdot n - 1$$

Die Partialsumme ist:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$
$$= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + (n-1) \cdot d$$

in umgekehrter Reihenfolge ist die Summe:

$$S = a_n + a_n - d + a_n - 2 \cdot d + a_n - 3 \cdot d + \ldots + a_n - (n-1) \cdot d$$

Addiert man beide Gleichungen, erhält man:

$$2 \cdot S = \underbrace{a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + \ldots}_{n-\text{mal}}$$

$$2 \cdot S = n \cdot (a_n + a_1)$$

$$S = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$$

Mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + (n-1) \cdot d + a_1)$$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Beispiele:

Wie groß ist die Summe

1. der ersten n Zahlen?
2. der ersten n ungeraden Zahlen?
3. der ersten n geraden Zahlen?

1.) $d = 1$, $a_n = n$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) $d = 2 \quad a_1 = 1 \qquad S = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n$

$$S = n^2$$

3.) $a_1 = 2 \quad a_n = 2 \cdot n \quad S = \frac{n}{2} \cdot (2 + 2 \cdot n)$

$$S = n \cdot (n+1)$$

2.3 Geometrische Zahlenfolgen und Reihen

Eine geometrische Zahlenfolge ist dadurch gekennzeichnet, dass der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q \qquad a_i = q \cdot a_{i-1}$$

Damit lautet die Zahlenfolge allgemein:

$$a, \quad a \cdot q, \quad a \cdot q^2, \quad a \cdot q^3 \quad \ldots, \quad a \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

Beispiele:

1. $$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \ldots$$

$$a = 1 \qquad q = \frac{1}{2} \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2. $$1, \quad -3, \quad 9, \quad -27, \quad 81, \quad \ldots$$

$$a = 1 \quad q = -3 \qquad a_n = (-3)^{n-1}$$

Analog zu den Arithmetischen Reihen bildet man auch hier die Partialsumme bis zum n. Glied:

$$S = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$$

Um eine Formel für S zu erhalten, bildet man

$$q \cdot S - S$$

$$q \cdot S = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n$$

$$q \cdot S - S = a \cdot q^n - a = a \cdot \left(q^n - 1\right)$$
$$S \cdot \left(q - 1\right) = a \cdot \left(q^n - 1\right)$$
$$S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispiele:

1. Normzahlreihen

Zwischen die beiden Zahlen 1 und 10 sollen 4 weitere Zahlen so eingeschoben werden, dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht:

$$a_1 = 1 \quad a_6 = 10 = a_1 \cdot q^5$$
$$q^5 = 10 \quad q = \sqrt[5]{10} = 1{,}5849$$

Die Reihe lautet damit:

1, 1,585, 2,51, 4, 6,3 10

In der Praxis werden die Zahlenwerte noch stärker gerundet:

1 1,6 2,5 4 6,3 10

Dies ist gleichzeitig die Normzahlreihe R5

Nach Normzahlreihen werden in der Technik zahlreiche Bauteile gestuft, z.B. elektrische Widerstände, Kondensatoren, aber auch Kochtöpfe, Schrauben usw.

2. Ein Bogen Papier mit der Dicke 0,1 mm soll 20 mal gefaltet werden. Wie dick wird das gefaltete

Papier?

$$a_1 = 0{,}1 \quad a_{21} = a_1 \cdot q^{20} \quad \text{mit} \quad q = 2$$

$$a_{21} = 0{,}1 \cdot 2^{20} = 104.857{,}6\ \text{mm} = 104{,}8\ \text{m}$$

3. Ein Sparer legt 1000 € zu 3% Jahreszins an. Welche Summe erhält er nach 10 Jahren? Nach welcher Zeit hat sich sein Kapitaleinsatz verdoppelt?

$$a_1 = 1000 \quad q = 1{,}03 \quad a_{11} = 1000 \cdot 1{,}03^{10} = 1343{,}92\ €$$

$$a_1 \cdot q^x = 2 \cdot a_1 \quad 1{,}03^x = 2 \quad x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} = 23{,}5\ \text{Jahre}$$

4. Ein Sparer legt am Beginn eines jeden Jahres 1000 € auf einem Sparkonto an und erhält von der Bank 3% Jahreszinsen. Wie viel Geld hat er nach Ablauf von 10 Jahren?

Die erste Rate wird 10 Jahre lang verzinst: $a_1 \cdot q^{10}$

die zweite Rate 9 Jahre $a_1 \cdot q^9$

die letzte Rate 1 Jahr $a_1 \cdot q$

Die Summe ist:

$$1000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} = 11.807{,}80\ €$$

3 Gleichungen

3.1 Einteilung der Gleichungen

Sollen zwei mathematische Terme einander gleich sein, nennt man den entstehenden Ausdruck eine Gleichung.

Ein Term ist dabei ein mathematischer Ausdruck, der eine Verknüpfung von Zahlen, Variablen und Funktionsbezeichnungen (z.B. log, sin) mit Rechenzeichen enthält.

Eine Gleichung ist also eine Darstellung der Form:

$$T_1 = T_2$$

Man unterscheidet folgende Arten von Gleichungen:

- Identische Gleichungen
- Bestimmungsgleichungen
- Funktionsgleichungen

<u>Identische Gleichungen</u> bleiben gültig, für welche Werte man sie auch immer formuliert:

Beispiele:

Das distributive Gesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Die binomische Gleichung:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Das log. Gesetz:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

An Stelle des Gleichheitszeichens verwendet man oft auch das Identitätszeichen ≡

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c$$

gilt für jede Kombination der Werte von a, b und c.

Eine Bestimmungsgleichung ist eine Gleichung, in der Variable auftreten, deren Werte durch Umformung der Gleichung bestimmt werden sollen. Eine Bestimmungsgleichung ist also nur bestimmte Werte von Variablen gültig, den Lösungen oder Wurzeln der Gleichung.

Bestimmungsgleichungen sind:

$$x^2 + 4 \cdot x = 23$$

Lösungen: $x_1 = -2 + 3 \cdot \sqrt{3}$ $\quad x_2 = -2 - 3 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{x+2} - 4 = 4$ Lösung: x = 62

$$2 \cdot 2^x = 4^x - 1$$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{\ln\left(1 - \sqrt{2}\right)}{\ln 2} \quad x_2 = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 2}$$

Erste Lösung ist nicht gültig

Die Bestimmungsgleichungen lassen sich unterteilen in

- Algebraische Gleichungen: In diesen werden nur algebraische Verknüpfungen mit der oder den Variablen vorgenommen. Algebraische Verknüpfungen sind: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenz, Wurzel.
  Algebraische Gleichungen mit einer Variablen kann

man immer auf die Form eines Polynoms bringen:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

Man nennt eine solche Gleichung eine algebraische Gleichung n. Grades, wenn die höchste Potenz der Variablen gleich n ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat eine solche Gleichung genau n Lösungen, die allerdings auch komplex (d.h. von der Form a+j·b mit j = √-1) sein können.

- Transzendente Gleichungen. Dies sind Gleichungen, die auch die Operationen wie Logarithmieren oder Funktionen wie sin, tan, e^x usw. enthalten. Sie sind im allgemeinen nur näherungsweise zu lösen.

Funktionsgleichungen: Sie definieren eine Funktion, d.h. einen Zusammenhang zwischen Größen, der für einen größeren Bereich der Variablen gelten soll. Funktionen sind:

$$y = x^2 + 5 \cdot x - 17$$

$$y = \sqrt{x^2 - 2} + 4$$

$$y = \tan\left(2 \cdot x\right)$$

$$y = e^{-2 \cdot x + 1}$$

3.2 Lösen von Bestimmungsgleichungen

Um eine Bestimmungsgleichung zu lösen, verwendet man folgendes Lösungsprinzip:

Durch zulässige Rechenoperationen wird eine Bestimmungsgleichung so umgeformt, dass die Variable auf einer Seite der Gleichung isoliert wird.

Dabei gilt das Grundgesetz für das Umformen von Gleichungen:

Eine Gleichung geht in eine Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit gleichen Zahlen die gleichen Rechenoperationen ausführt.

Unbeschränkt mögliche Umformungen sind die sog. Äquivalenzumformungen:

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man

- Auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl addiert oder subtrahiert.
- Auf beiden Seiten mit der selben Zahl multipliziert oder dividiert. Ausgeschlossen bei der Division ist die Zahl 0.
- Beide Seiten der Gleichung integriert oder differenziert.

Es gibt gültige Operationen, die zulässig sind, bei deren Anwendung zusätzliche Lösungen auftreten können. Dies sind:

- Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einem Ausdruck, der auch null werden kann, können zusätzliche Lösungen entstehen
- Erhebt man beide Seiten einer Gleichung zur selben Potenz, d.h. quadriert beide Seiten der Gleichung, können ebenfall ungültige Lösungen entstehen, da eventuell negative Ausdrücke ein positives Vorzeichen erhalten können.
- Logarithmiert man beiden Seiten einer Gleichung zur gleichen Basis, kann es sein, dass negative

Ausdrücke logarithmiert werden, wobei der Logarithmus einer negativen Zahl im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist.

Führt man solche Operationen durch, muss man sich durch Einsetzen der ermittelten Lösungen in die ursprüngliche Gleichung davon überzeugen, dass man eine gültige Lösung ermittelt hat.

Beispiele für die Lösung mit Hilfe von algebraischen Umformungen:

a.

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+2} \quad \left|\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\right.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$2\cdot(x-1)\cdot(x+2)-x\cdot(x+2)=x\cdot(x-1)$$

$$2\cdot x^2+2\cdot x-4-x^2-2\cdot x=x^2-x \quad \left|-x^2+x\right.$$

$$x-4=0$$

$$x=4$$

b.

$$\sqrt{x^2+\sqrt{3}}-\sqrt{x^2-\sqrt{3}}=\sqrt{3} \quad \left|\right.^2$$

$$x^2+\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{x^4-3}+x^2-\sqrt{3}=3$$

$$2\cdot x^2 - 3 = 2\cdot\sqrt{x^4-3} \qquad \Big|^2$$

$$4\cdot x^4 - 12\cdot x^2 + 9 = 4\cdot x^4 - 12$$

$$12\cdot x^2 = 21$$

L

$$x^2 - \frac{7}{4} = 0 \qquad x_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Beide Lösungen sind gültig

c.

$$4^x + 4^{x+1} = 4^{2\cdot x+1} - 4$$

$$4^x\cdot(1+4) = 4^{2\cdot x}\cdot 4 - 4$$

$$4\cdot 4^{2\cdot x} - 5\cdot 4^x - 4 = 0$$

$$4^x = \frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot4\cdot4}}{2\cdot4} = \frac{5\pm\sqrt{89}}{8}$$

$$x = \frac{\ln\frac{5+\sqrt{89}}{8}}{\ln 4} = 0,4257$$

Das negative Vorzeichen vor der Wurzel liefert keinen reellen Wert

3.3 Polynome und algebraische Gleichungen n. Grades

3.3.1 Gleichungen 1. und zweiten Grades

Wie bereits erwähnt, führen Gleichungen, die nur algebraische Operationen enthalten, auf Polynome. Algebraische Operationen sind Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Wurzelziehen.

Ein Polynom hat die Form:

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Ein Polynom n. Grades enthält als höchste Potenz x^n, wobei die Exponenten natürliche Zahlen sind. Setzt man das Polynom gleich null, dann entsteht eine Gleichung n. Grades.

Einfach zu lösen sind nur Gleichungen ersten und zweiten Grades. Es existieren Lösungsformeln für Gleichungen bis 5. Grades. Sucht man Lösungen für Gleichungen höherer Grade, dann ist man auf Näherungsverfahren angewiesen. Bei praktischen Problemen werden auch Gleichungen ab dritten Grades mit Näherungsverfahren gelöst.

Für diese Gleichungen gilt der Fundamentalsatz der Algebra:

Eine Gleichung n. Grades hat genau n Lösungen. Diese können mehrfach auftreten und können auch komplex sein.

Kennt man eine Lösung einer Gleichung n. Grades, dann kann man die Gleichung auch in der Form darstellen:

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) =$$

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot \left(x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0\right) = 0$$

Damit kann man den Polynomgrad um eins reduzieren und erhält eine Gleichung n-1. Grades, die ebenfalls wieder null gesetzt wird. Mit allen Lösungen erhält man schließlich die Darstellung:

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_x) = 0$$

Man nennt dies die Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren

Die Lösung einer Gleichung 1. Grades ist einfach:

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad \left(x + \frac{a_0}{a_1} \right) = 0 \qquad x = -\frac{a_0}{a_1}$$

Eine Gleichung 2. Grades führt man üblicherweise auf ein Binom der Form

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

zurück.

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad \Big|: a_2$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} \cdot x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

Mit Hilfe der sog. quadratischen Ergänzung erhält man:

$$x^2+\frac{a_1}{a_2}\cdot x+\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2=\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}$$

$$\left(x+\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{a_1}{2\cdot a_2}+\sqrt{\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}\right)\cdot\left(x+\frac{a_1}{2\cdot a_2}-\sqrt{\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}\right)$$
$$=0$$

Ein Produkt von zwei Faktoren ist dann null, wenn einer der Faktoren null ist. Somit ergeben sich die beiden Lösungen:

$$x_1=-\frac{a_1}{2\cdot a_2}-\sqrt{\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}$$

$$x_2=-\frac{a_1}{2\cdot a_2}+\sqrt{\left(\frac{a_1}{2\cdot a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}$$

Formt man die beiden rechten Seiten noch etwas um, dann erhält man die Lösungen in der bekannten Form:

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2 \cdot a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \cdot a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0}}{2 \cdot a_2}$$

Eine vereinfachte Formel ergibt sich, wenn man die Gleichung vor der Lösung mit dem ersten Koeffizienten a_2 dividiert. Die Gleichung hat dann die Form:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

mit der Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und das Polynom erhält die Form:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Multipliziert man diese Formel wieder aus, erhält man eine bequeme Kontrolle über die Richtigkeit der Lösung:

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

In den beiden Koeffizienten p und q stecken also die beiden Lösungen in der Form:

$$p = -(x_1 + x_2)$$

$$q = x_1 \cdot x_2$$

Diese Beziehung nennt man den Wurzelsatz von Vieta (nach Francois Viète, franz. Mathematiker).

Beispiel:

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung 2. Grades:

$$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 16 = 0 \quad \Big| : 2$$

$$x^2 - 4 \cdot x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$x_1 + x_2 = 4 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4 - 12 = -8 = q$$

Bemerkung: Die Tatsache, dass in den Lösungsformeln beide Vorzeichen + und – auftreten, soll nicht zu der Meinung führen, dass vor Quadratwurzeln generell beide Vorzeichen gültig sind oder gesetzt werden müssen.

3.3.2 Algebraische Gleichungen höherer Grade

Wie schon erwähnt, kennt man nur von Gleichungen 3. Grades (Cardanische Formeln) bis 5. Grades (sind sehr kompliziert) formelmäßige Lösungen.

Bei den Gleichungen 3. Grades mit reellen Koeffizienten erhält man entweder eine reelle Lösung und zwei komplexe Lösungen oder drei reelle Lösungen.

Kennt man die Lösungen, dann kann man wieder das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 =$$

$$a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

Dividiert man die Gleichung zunächst durch a_3, dann erhält man die „Normalform“

$$x^3 + r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$$

Ausmultiplizieren der Linearform ergibt:

$$\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \cdot \left(x - x_3\right) =$$

$$x^3 - x^2 \cdot \left(x_1 + x_2 + x_3\right) + x \cdot \left(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\right) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Damit erhält man den Wurzelsatz von Vieta für eine Gleichung dritten Grades:

$$r = -\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$

$$s = \left(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\right)$$

$$t = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich manchmal Lösungen erraten und man kann die Gleichung dritten Grades durch eine Polynomdivision auf eine Gleichung zweiten Grades reduzieren.

Beispiel: $x^3 - 6 \cdot x^2 - x + 6 = 0$

Entsprechend t = 6 sind mögliche ganzzahlige Lösungen: x = ± 1; x = ± 2; x = ± 3; x = ± 6;

Probeweise Einsetzen von x = 1 ergibt, dass dies eine Lösung ist.

Durch Polynomdivision kann man den Linearfaktor

(x-1)

abspalten und den Grad des Polynoms auf 2 reduzieren.

Polynomdivision: Sie wird genau so wie das Dividieren von Zahlen durchgeführt

$$564:12 = 5\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 :\ 1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

da der Divisor zwei Zehnerpotenzen enthält, werden zunächst die ersten beiden Zehnerpotenzen des Dividenden dividiert:

$$\begin{array}{l} 566 : 12 = 47 \text{ Rest } 2 \ = \ 47 + 2/12 \\ \underline{48} \\ \ \ 86 \\ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

Nach der ersten Division benutzt man die nächste Zehnerstelle zur Division.

Anwendung auf Polynom:

$$\begin{array}{l} x^3 - 6\cdot x^2 - x + 6 \ :\ x-1 \ = \ x^2 - 5\cdot x - 6 \\ \underline{x^3 - \ \ x^2} \\ 0 \ - 5\cdot x^2 - x \\ \underline{\quad - 5\cdot x^2 + 5\cdot x} \\ \qquad\quad -6\cdot x + 6 \\ \qquad\quad \underline{-6\cdot x + 6} \\ \qquad\qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

Der Rest ist null, die Division geht auf, x – 1 ist somit Teiler des Polynoms.

Damit lautet das Polynom nach Abspaltung der Lösung:

$$(x-1)\cdot\left(x^2 - 5\cdot x - 6\right)$$

Weitere Lösungen sind x = -1 und x = 6, somit lautet die vollständige Zerlegung:

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-6) = 0$$

Der Wurzelsatz von Vieta lässt sich auf allgemeine Polynome n. Grades erweitern:

Lautet die Polynomgleichung:

$$x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 = 0$$

dann ist

$$b_{n-1} = -\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\right)$$

die negative Summe der Lösungen

$$\begin{aligned} b_{n-2} = {} & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \ldots + \\ & + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5 + \ldots \\ & + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n \end{aligned}$$

Dies ist die Summe aller möglichen Produkte zweier Lösungen.

$$\begin{aligned} b_{n-3} = -(& x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + \ldots \\ & + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + \ldots \\ & + x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 + \ldots \\ & \quad \ldots \\ & + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n) \end{aligned}$$

Dies ist die negative Summe aller möglichen Produkte jeweils dreier Lösungen.

Die anderen Koeffizienten setzen sich ebenfalls zusammen aus der Summe der Produkte von Lösungen bis:

$$\begin{aligned} b_1 = \left(-1\right)^{n-1} \cdot (& x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-1} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-2} \cdot x_n + \\ & + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_{n-3} \cdot x_{n-1} \cdot x_n + \ldots) \end{aligned}$$

$$b_0 = \left(-1\right)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Beispiel:

Eine Gleichung 4. Grades hat die Lösungen:

x = 1;   x = -1;   x = -2;   x = 3;

Wie lautet die Gleichung?

Lösung:

$$b_0 = (-1)^4 \cdot ((-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 3) = 6$$

$$b_1 = (-1)^3 \cdot (1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3) = 1$$

$$b_2 = (-1)^2 \cdot (1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 3) = -7$$

$$b_3 = (-1)^1 \cdot (1 - 1 - 2 + 3) = -1$$

Damit lautet die Gleichung:

$$x^4 - x^3 - 7 \cdot x^2 + x + 6 = 0$$

2. Beispiel:

Von der Gleichung 5. Grades

$$2 \cdot x^5 - 8 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 + 80 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 72 = 0$$

sind zwei Lösungen bekannt: $x = \pm 3$

Wie lauten die übrigen Lösungen?

Lösung: $x = \pm 1; \quad x = 4$

3.3.3 Auf algebraische Gleichungen rückführbare Gleichungen

Enthält eine Gleichung nur Brüche und Wurzeln, dann kann man die Gleichung auf eine Polynomgleichung zurückführen. Das Beseitigen der Brüche geschieht dadurch, dass man die gesamte Gleichung mit einem passend gewählten Nenner multipliziert. Zum Beseitigen der Wurzeln muss man diese auf einer Seite isolieren, um sie durch Bilden einer Potenz zu beseitigen. Dies muss oft mehrfach geschehen. Außerdem ist zu beachten, dass z.B. das Quadrieren keine sog. Äquivalenzoperation ist; es können zusätzliche Lösungen dadurch entstehen, dass beim Quadrieren negative Vorzeichen in positive Vorzeichen umgewandelt werden.

Beispiele:

1.

$$\frac{x-4}{x-8} = \frac{x+4}{x-4} + 1 \quad \left| \cdot (x-8)\cdot(x-4) \right.$$

$$(x-4)^2 = (x+4)\cdot(x-8) + (x-8)\cdot(x-4)$$

$$x^2 - 8\cdot x + 16 = x^2 - 4\cdot x - 32 + x^2 - 12\cdot x + 32$$

$$x^2 - 8\cdot x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16+16} = 4 \pm 4\cdot\sqrt{2}$$

2.

$$\sqrt{x+2+\sqrt{2\cdot x+7}} = 4 \quad \left|^2 \right.$$

$$x+2+\sqrt{2\cdot x+7} = 16$$

$$\sqrt{2\cdot x+7} = 14 - x$$

$$2\cdot x + 7 = 196 - 28\cdot x + x^2$$

$$x^2 - 30\cdot x + 189 = 0$$

$$x_{12} = 15 \pm \sqrt{225-189} = 15 \pm 6$$

$x_1 = 21$ ungültige Lösung

$\mathrm{x}_2 = 9$ gültige Lösung

3.

$$\sqrt[3]{x^4} - 4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 12$$

Substitution: $\sqrt[3]{x^2} = u$

$$u^2 - 4 \cdot u - 12 = 0$$

$$u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4$$

$$u_1 = 6 = \sqrt[3]{x^2} \qquad x = \sqrt{u_1^3} = 6 \cdot \sqrt{6}$$

gültige Lösung

$$u_2 = -2 = \sqrt[3]{x^2} \qquad x = \sqrt{u_2^3} = \sqrt{-8}$$

keine gültige Lösung im Bereich der reellen Zahlen.

3.4 **Transzendente Gleichungen**

Transzendente Gleichungen enthalten Logarithmen oder die gesuchte Größe im Exponenten von Zahlen. Außerdem gehören zu den transzendenten Gleichungen auch solche, die trigonometrische Funktionen enthalten. Die Lösung, falls möglich, erfolgt dadurch, dass die Logarithmen oder die Exponentialausdrücke auf einer Seite der Gleichung isoliert werden und anschließend delogarithmiert oder in den Exponenten einer geeigneten Basis gesetzt wird.

Beispiele:

1. $2 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 2{,}5$

$$5^x \cdot \left(\frac{2}{5} + 3 \cdot 5 \right) = \frac{5}{2}$$

$$5^x = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{77} = \frac{25}{154}$$

$$x \cdot \ln 5 = \ln \frac{25}{154} \qquad x = \frac{\ln 25 - \ln 154}{\ln 5} = -1,13$$

2.

$$\log_3 \left(x^2 - 4 \right) - \log_9 \left(x^2 + 4 \right) = 0,5$$

$$\log_3 \left(x^2 - 4 \right) - \frac{\log_3 \left(x^2 + 4 \right)}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \left(x^2 - 4 \right) - \frac{1}{2} \log_3 \left(x^2 + 4 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$x^4 - 8 \cdot x^2 + 16 = 3 \cdot x^2 + 12$$

$$x^4 - 11 \cdot x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 4} = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$$

3.

$$\frac{e^{(n+1) \cdot x}}{e^{(n-1) \cdot x}} = 2 \cdot e^{2 \cdot n \cdot x}$$

Lösung: $x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 2}{n-1}$

3.5 Ungleichungen

Ungleichungen sind Aussageformen, bei denen an Stelle des Gleichheitszeichens eines der Relationszeichen

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq, \quad \neq$$

steht.

Beispiel: $x^2 - 4 < 2$

Eine solche Aussageform liefert für x nicht einen bestimmten Wert oder bestimmte Werte, sondern einen Bereich für x, in dem diese Relation gültig ist.

Um diesen Bereich zu bestimmen, benutzt man ähnliche Gesetzmäßigkeiten wie bei Gleichungen:

Eine Ungleichung geht in eine äquivalente Ungleichung über,

1. wenn man zu beiden Seiten der Ungleichung den gleichen Term addiert oder subtrahiert,
2. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen *positiven* Term multipliziert oder dividiert,
3. wenn man beide Seiten der Ungleichung mit dem gleichen Exponenten potenziert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv
4. wenn man beide Seiten zur gleichen Basis logarithmiert, vorausgesetzt, beide Seiten sind positiv.

Die Einschränkungen sind notwendig, da ähnlich wie bei Gleichungen, durch Anwendung bestimmter Rechenoperationen falsche Lösungen entstehen können:

- multipliziert man in der Relation

$$x - 2 < 0 \quad x < 2$$

  beide Seiten mit einer negativen Zahl, z.B. mit -1, entsteht $\quad -x < -2$

  Setzt man jetzt für x einen Wert ein, z.B. x = 0, dann ist die Aussage zunächst richtig, nach dem Multiplizieren wird sie falsch. Das bedeutet:

  Die Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Term kehrt die Relation um, d.h.

  aus $\quad x < 2$

  wird $\quad -x > -2$.

  Falls mit einem Term multipliziert wird, der noch die Variable enthält, weiß man zunächst nicht, ob dieser Term positiv oder negativ ist. Man hat dann eine Fallunterscheidung zu machen.

- Das gleiche gilt, falls potenziert oder logarithmiert wird. Beim Potenzieren muss die Basis positiv sein, damit keine unerlaubte Operation ausgeführt wird. In jedem Fall ist das Ergebnis auf seine Gültigkeit hin zu überprüfen.

Beispiele:

1. $$\frac{2}{x-1} \geq 20$$

   mit x ≠1:

$$2 \geq 20 \cdot (x-1)$$

$$2 \geq 20 \cdot x - 20 \,\big|\, +20$$

$$22 \geq 20 \cdot x \,\big|\, :20 \qquad\qquad x \leq 1{,}1$$

Lösung: $1{,}1 \geq x > 1$

Die Lösung ist ein Intervall:

Ist eine Intervallgrenze Teil der Lösung, spricht man von einem geschlossenen Intervall, gilt die Aussage ohne die Grenze, spricht man von einem offenen Intervall. Im vorliegenden Fall ist das Intervall bei x = 1 offen, die andere Grenze ist Bestandteil der Lösung.

2.
$$\frac{1}{2^n} < 10^{-4} \,\Big|\, \cdot 10^4 \cdot 2^n$$

$$10^4 < 2^n \,\big|\, \lg$$

$$4 < n \cdot \lg 2$$

$$n > \frac{4}{\lg 2} \qquad n > 13{,}3 \quad n \geq 14$$

Die Lösung $n \geq 14$ gilt, wenn n ganzzahlig sein soll.

3.
$$-\sqrt{x+4} > -3 \,\big|\, \cdot(-1)$$

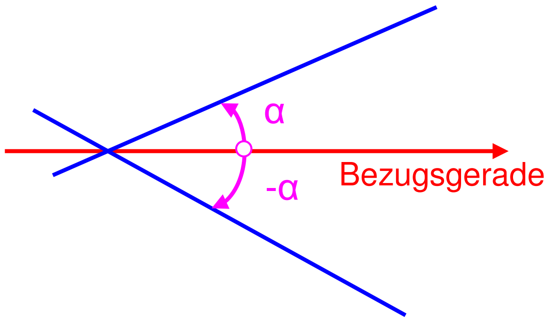
$$\sqrt{x+4} < 3 \,\big|^2$$

$$x + 4 < 9 \qquad\qquad x < 5$$

4 Trigonometrie

4.1 Winkeldefinition

Als Winkel bezeichnet man die zahlenmäßige Angabe, wie weit man eine Gerade dreht, die ursprünglich mit einer Bezugsgeraden in Deckung war.



Ein Winkel ist positiv, wenn man die Gerade gegen den Uhrzeigersinn dreht; er zählt negativ, wenn man sie im Uhrzeigersinn dreht.

Die Maßzahl des Winkels ist historisch so definiert, dass man einer vollen Drehung, bis die zwei Geraden wieder in Deckung sind, den Zahlenwert 360 zuweist und die Drehung in 360 gleiche Teile unterteilt. Die Kennzeichnung als Winkel erfolgt durch den Zusatz „Grad“. Somit bedeutet

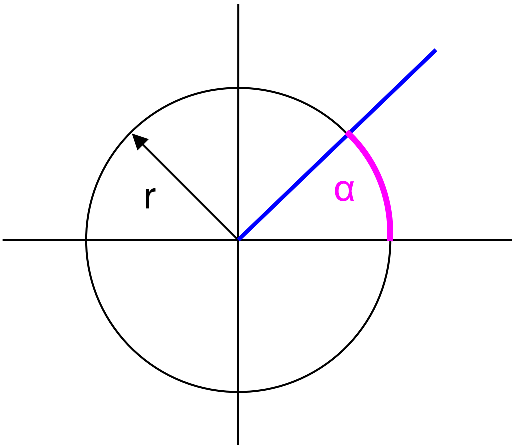
$$60^0 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

einer vollen Umdrehung.

Um die Winkelmessung besser an das Dezimalsystem anzupassen, wurde für die Zwecke des Vermessungswesens eine Teilung des rechten Winkels in 100

Teile festgelegt. Eine volle Umdrehung hat dann den Winkel 400°. Zur Unterscheidung nennt man einen solchermaßen festgelegten Winkel „Neugrad“. Diese Festlegung wird in der Technik außerhalb des Vermessungswesens kaum benutzt.

Eine Festlegung ohne willkürliche Winkelteilung erfolgt durch die Definition des Winkels an einem Kreis.



Der Umfang eines Kreises beträgt

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

ist also abhängig von r. Dividiert man den Umfang durch den Radius, ergibt sich ein vom Radius unabhängiges Maß für eine volle Umdrehung der Größe 2·π. Entsprechend definiert man einen beliebigen Winkel folgendermaßen:

$$\alpha = \frac{Bogenlänge\ am\ Kreis}{Radius\ des\ Kreises}$$

Man nennt dies einen Winkel im Bogenmaß.

Diese Definition hat den Vorteil, dass man einen Winkel als dimensionslose Größe erhält. Somit ist es ohne weiteres möglich, einen Winkel als Exponent in einer e-Funktion zu verwenden. Der Ausdruck

$$z = r \cdot e^{j \cdot \pi} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1}$$

hat in der Mathematik eine wohl definierte Bedeutung.

Für häufig benutzte Winkel ergeben sich folgende Zuordnungen

$$90^0 = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad 60^0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$30^0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \qquad 180^0 = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi$$

$$360^0 = 2 \cdot \pi$$

und die Umrechnung eines Winkels im Gradmaß in das Bogenmaß lautet:

$$\widehat{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$$

und umgekehrt:

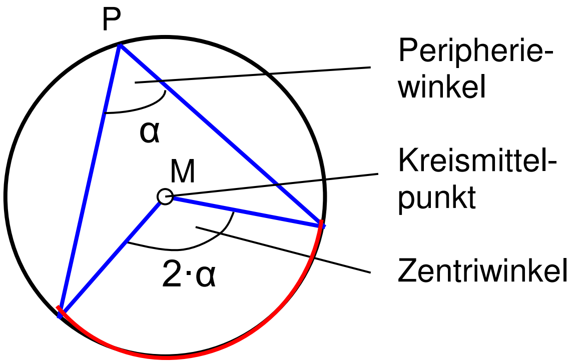
$$\alpha^0 = \widehat{\alpha} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Um zwei Winkel zu addieren oder zu subtrahieren, werden einfach die Bogenlängen addiert bzw. subtrahiert.

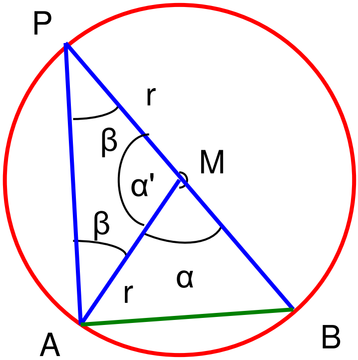
4.2 Winkelsätze am Kreis

Die folgenden Gesetzmäßigkeiten werden oft benutzt:

Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.



Man kann das nachweisen, indem man zunächst den Fall behandelt, dass einer der beiden Schenkel des Peripheriewinkels mit einem des Zentriwinkels zusammenfällt:



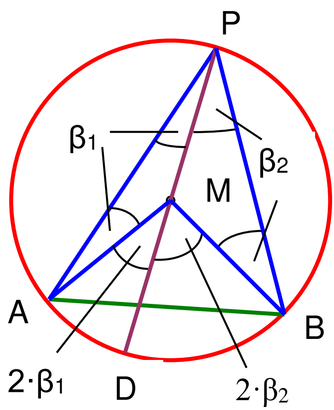
Das Dreieck P – M – A ist in diesem Fall gleichschenklig, der Winkel α' gleich

$$\alpha' = \pi - 2 \cdot \beta$$

Der Winkel α ist damit:

$$\alpha = \pi - \alpha' = 2 \cdot \beta$$

Den allgemeinen Fall kann man auf obigen Fall zurückführen, indem man die Winkel in zwei Winkel aufteilt:



Die braun gezeichnete Linie P – D erzeugt zwei gleichschenklige Dreiecke A – M – P und B – M – P und somit ist der

Außenwinkel A – M – D = $2 \cdot \beta_1$

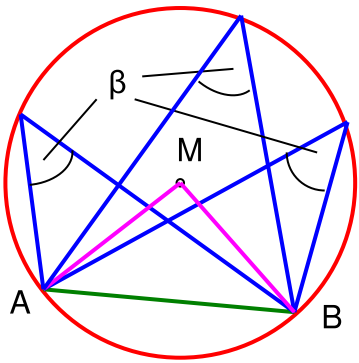
und der Winkel B – M – D = $2 \cdot \beta_2$

Der gesamte Zentriwinkel ist damit gleich dem doppelten Peripheriewinkel $\beta_1 + \beta_2$

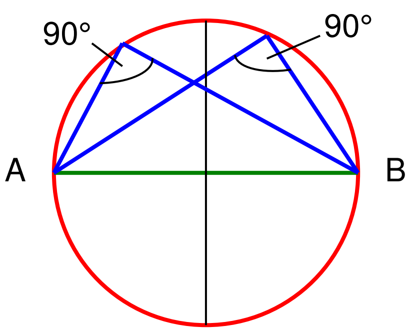
$$A - M - B = 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2)$$

Verschiebt man den Punkt P, dann bleibt das Dreieck A – M – B unverändert; das bedeutet, dass auch der Peripheriewinkel unverändert bleibt.

Alle Peripheriewinkel, die zum gleichen Bogen, bzw. zur gleichen Kreissehne gehören, sind gleich.



Zieht man die Strecke A – B durch den Mittelpunkt des Kreises, dann ist der Zentriwinkel gleich 180° und jeder Peripheriewinkel gleich 90°. Der Kreis wird zum Thaleskreis:



4.3 Trigonometrische Grundbeziehungen

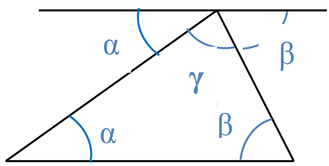
Trigonometrie bedeutet Messung am Dreieck. Ein Dreieck ist definiert

- Durch drei gegebene Seiten
- Durch zwei Seiten und einem Winkel
- Durch zwei Winkel und eine Seite

Zu Berechnungen am Dreieck sind also Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks und den Winkeln zwischen den Seiten notwendig.

Zunächst ist festzustellen:

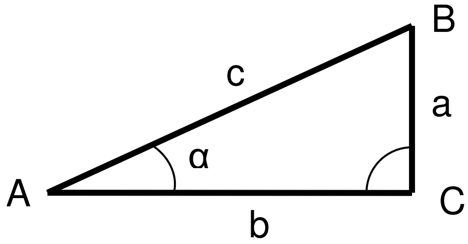
Die Summe der drei Winkel im Dreieck beträgt immer 180°:



Zieht man durch die Spitze des Dreiecks eine Parallele zur Grundlinie, dann ergeben sich sog. Z – Winkel, d.h. die entsprechenden Winkel im Dreieck und an der Parallelen sind gleich. Die Summe der drei Winkel α

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Da sich bei jedem Dreieck rechtwinklige Teildreiecke bilden lassen, ist es zweckmäßig, Beziehungen zwischen Dreieckseiten und Winkeln zunächst an rechtwinkligen Dreiecken herzustellen und dann auf allgemein schiefwinklige Dreiecke zu verallgemeinern.



Zwischen dem Winkel α und den drei Dreiecksseiten a, b und c lassen sich sechs Verhältnisse bilden, durch die der Winkel α festgelegt ist. Diese Streckenverhältnisse tragen folgende Namen:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos ec\,\alpha = \frac{Hypotenuse}{Gegenkathete} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Außerdem gilt am rechtwinkligen Dreieck der Satz von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

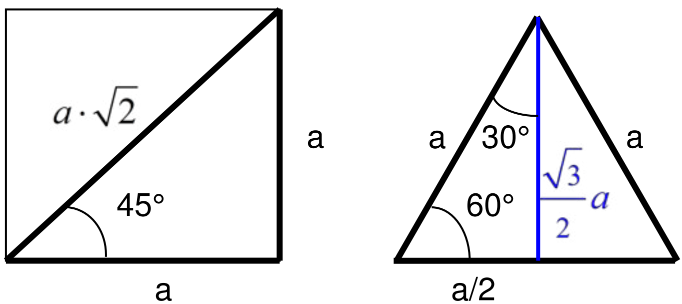
Dividiert man diese Beziehung durch c^2, erhält man:

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Praktisch benutzt werden allerdings nur die ersten vier Beziehungen $\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad \tan\alpha \quad \cot\alpha$

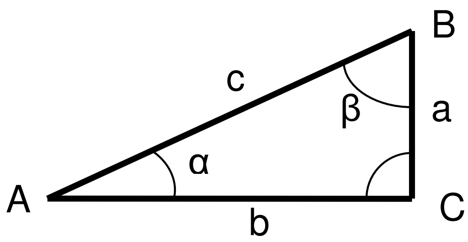
Gibt man einen bestimmten Winkel vor und möchte eines der Streckenverhältnisse berechnen, dann ist dies kein einfacher Vorgang. Die Berechnung geschieht durch unendliche Reihen. Lediglich für bestimmte Winkel lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras das zugehhörige Streckenverhältnis berechnen.



Für die ersten vier Winkelbeziehungen ergibt sich:

Funktion	α=0°	α=30°	α=45°	α=60°	α=90°
sin α	0	1/2 = 0,5	$\sqrt{2}/2 = 0,707$	$\sqrt{3}/2 = 0,866$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2 = 0,866$	$\sqrt{2}/2 = 0,707$	1/2 = 0,5	0
tan α	0	$\sqrt{3}/3 = 0,5774$	1	$\sqrt{3} = 1,7321$	∞
cot α	∞	$\sqrt{3} = 1,7321$	1	$\sqrt{3}/3 = 0,5774$	0

Aus der Tabelle und am rechtwinkligen Dreieck kann man noch folgende wichtige Beziehung ablesen:



Die beiden Winkel α und β ergänzen sich zu 90°. Man nennt den Winkel β den Komplementwinkel zu α. Außerdem ist die Ankathete des Winkels α gleich der Gegenkathete des Winkels β, sodass gilt:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

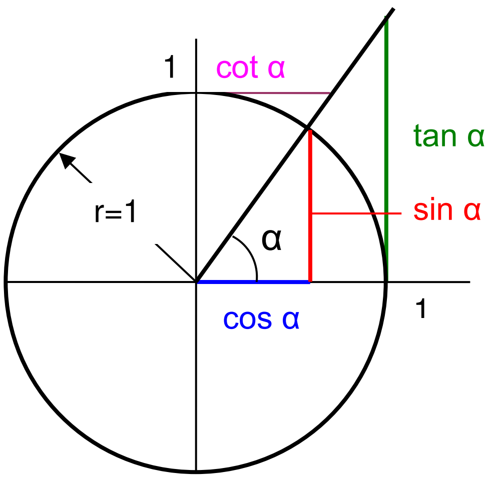
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta \qquad \tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta \qquad \cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

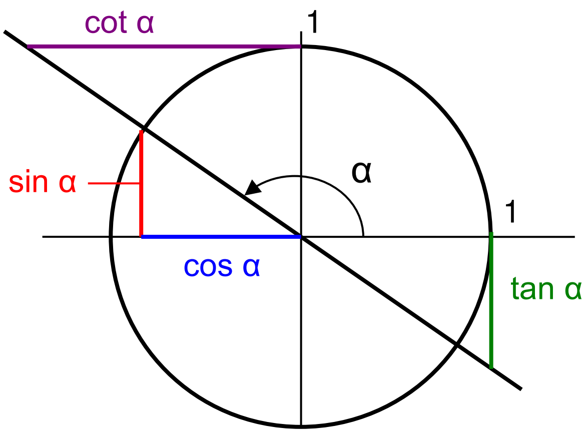
4.4 Darstellung am Einheitskreis, Verallgemeinerung auf beliebige Winkel

Man kann die trigonometrischen Beziehungen direkt zahlenmäßig ablesen, wenn man in einem Dreieck die Hypotenuse gleich 1 macht.

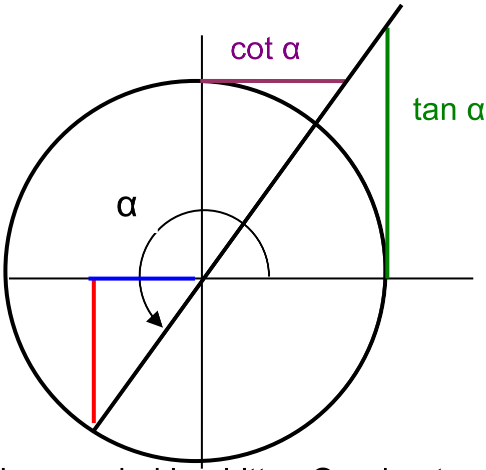


Die Spitzen aller möglichen rechtwinkligen Dreiecke liegen dann auf einem Kreis mit dem Radius 1. Diese Darstellung erlaubt außerdem eine Verallgemeinerung auf Winkel > 90°

Falls der Winkel α >90° ist, kann man im Einheitskreis ebenfalls rechtwinklige Dreiecke zeichnen, wobei allerdings Seiten negativ einzusetzen sind und die Winkelfunktionen negative Werte annehmen können. In der folgenden Figur ist die Ankathete negativ, der cos α wird negativ. Um vorzeichenrichtige Werte für die tan – und cot – Funktion zu erhalten, ist darauf zu achten, dass die entsprechenden Strecken immer vom Punkt (1, 0) und (0, 1) abzutragen sind. der zweite Schenkel des Winkels muss deshalb nach hinten verlängert werden.

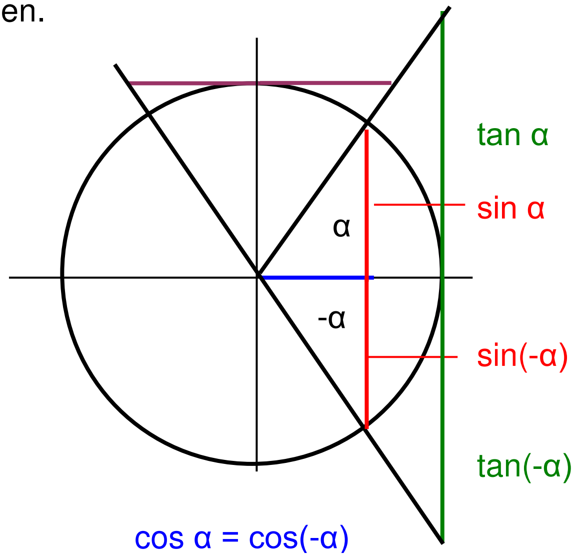


Entsprechende Figuren ergeben sich für Winkel im dritten Quadranten (π ≤ α ≤ 3π/2) und im 4. Quadranten



sin α und cos α sind im dritten Quadranten beide negativ, deshalb ist sowohl tan α und cot α positiv.

Der Einheitskreis ist auch für die Darstellung der trigonometrischen Funktionen mit negativen Winkeln geeignet. Negative Winkel werden im Uhrzeigersinn aufgetragen.



4.5 Umrechnung verschiedener Winkelfunktionen

Wie die Definitionsgleichungen der Winkelfunktionen zeigen, benötigt man eigentlich nur eine, da man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Winkelfunktionen ineinander umrechnen kann. So gelten folgende Beziehungen:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Pythagoras

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

aufgelöst nach sin α ergibt sich:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Die folgende Tabelle zeigt alle Umrechnungsformeln für die ersten vier Winkelfunktionen:

	sin α	cos α	tan α	cot α
$\sin\alpha$	-	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-	$\frac{1}{\cot\alpha}$

$\cot\alpha$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$	-

4.6 Die Arkusfunktionen

Bisher war die Aufgabe gestellt, zu einem gegebenen Winkel die entsprechenden Seitenverhältnisse auszurechnen. Die Umkehraufgabe lautet:

Gegeben ist der sin, cos, tan, cot eines unbekannten Winkels, wie groß ist der zugehörige Winkel? Die zugehörige Rechenoperation heißt Arkusfunktion:

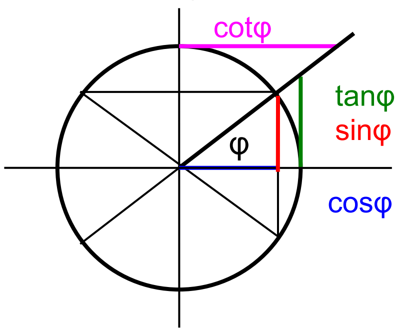
$$\sin\varphi = \frac{a}{b} = q; \qquad \varphi = \arcsin q$$

$$\cos\varphi = q; \qquad \varphi = \arccos q$$

$$\tan\varphi = q; \qquad \varphi = \arctan q$$

„Gesucht ist der Bogen des Winkels φ, dessen sin gleich q ist“.

Am Einheitskreis erkennt man, dass die Aufgabe im allgemeinen nicht eindeutig lösbar ist:



Zu einem positiven Wert von sinφ gehört ein Winkel im ersten Quadranten, aber auch ein Winkel im zweiten

Quadranten, d.h. es gibt zwei Lösungen der Gleichung

$$\sin\varphi = a$$

$$\varphi = \arcsin a \qquad \varphi = \pi - \arcsin a$$

Der gleiche Wert für sin φ ergibt sich auch, wenn der Winkelstrahl um eine volle Umdrehung weiter gedreht wurde. Alle Winkelangaben können deshalb auch um $\pm k \cdot 2\pi$ vergrößert oder verkleinert sein. Deshalb muss man immer angeben:

$$\varphi = \arcsin a \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi = \pi - \arcsin a \pm k \cdot 2\pi$$

Bei der Berechnung auf dem Taschenrechner erscheint der sog. Hauptwert im Bereich

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Ebenso gehören zu einem bestimmten cos φ der positive wie der negative Winkel φ und dieser ist nur bis auf volle Umdrehungen bestimmt. Deshalb lautet die Lösung der Gleichung

$$\cos\varphi = a$$

$$\varphi_1 = \arccos(a) \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 \pm k \cdot 2\pi$$

Der Hauptwert liegt im Bereich:

$$0 \le \varphi \le \pi$$

Zu einem bestimmten tan φ gehören die Winkel

$$\varphi = \arctan a + k \cdot \pi$$

Auf dem Taschenrechner wird der Hauptwert im Bereich

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

berechnet.

Diese Eigenschaft gilt auch für $\varphi = arc\cot a$.

Beispiele:

a)

$$\sin\varphi = 0{,}67 \qquad \widehat{\varphi}_1 = \arcsin 0{,}67 = 0{,}7342 \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_1 = 42{,}067° \pm k \cdot 360°$$

$$\varphi_2 = \pi - \widehat{\varphi}_1 = 2{,}407 \pm k \cdot 2\pi$$

$$\varphi_2 = 180° - \varphi_1 = 137{,}933° \pm k \cdot 360°$$

b) $\cos\varphi = -0{,}322 \quad \varphi = \arccos(-0{,}322)$

$$\widehat{\varphi}_1 = 1{,}8986 \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi_1 = 108{,}784° \pm k \cdot 360°$$

$$\widehat{\varphi}_2 = 2\pi - \widehat{\varphi}_1 = 4{,}3845 \pm k \cdot 2\pi \qquad \varphi_2 = 251{,}21° \pm k \cdot 360°$$

c) $\tan\varphi = -1{,}5 \qquad \varphi = \arctan(-1{,}5)$

$$\widehat{\varphi} = -0{,}9828 \pm k \cdot \pi$$

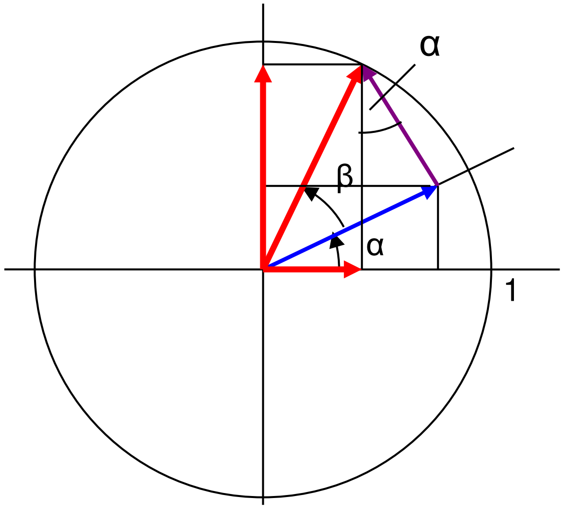
$$\varphi = -56{,}31° \pm k \cdot 180°$$

4.7 Die Additionstheoreme

In den Anwendungen treten häufig Winkelbeziehungen mit der Summe oder der Differenz zweier Winkel auf. Es ist häufig zweckmäßig, diese in die Winkelfunktionen der einzelnen Summanden umzurechnen. Die Umrechnungsformeln werden meist mit Hilfe komplexer Funktionen abgeleitet. Man kann sie jedoch auch am Einheitskreis erhalten.

Beispiel:

$\sin(\alpha+\beta)$ soll als Funktion von sin und cos der einzelnen Winkel dargestellt werden.



Den Vektorpfeil, der den Neigungswinkel α + β hat, kann man als Summe zweier Vektoren darstellen. Der blau gezeichnete Vektor hat die Komponenten

$$(\cos\beta\cdot\cos\alpha;\cos\beta\cdot\sin\alpha)$$

Der violett gezeichnete Vektor hat die Komponenten:

$$(-\sin\beta\cdot\sin\alpha;\sin\beta\cos\alpha)$$

Die Summe dieser beiden Vektoren ergibt den rot gezeichneten Ergebnisvektor:

$$(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)$$

Die horizontale Komponente ist der cos des Winkels α + β, die Vertikalkomponente der sin der Winkelsumme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Die Ableitung erfolgte zwar nur für Winkel im ersten Quadranten, man kann aber nachweisen, dass die Beziehungen für beliebige Winkel gelten, auch wenn z.B. der Winkel β negativ ist. Damit ist:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Spezialfall:

Falls α = β ist, erhält man aus obigen Formeln

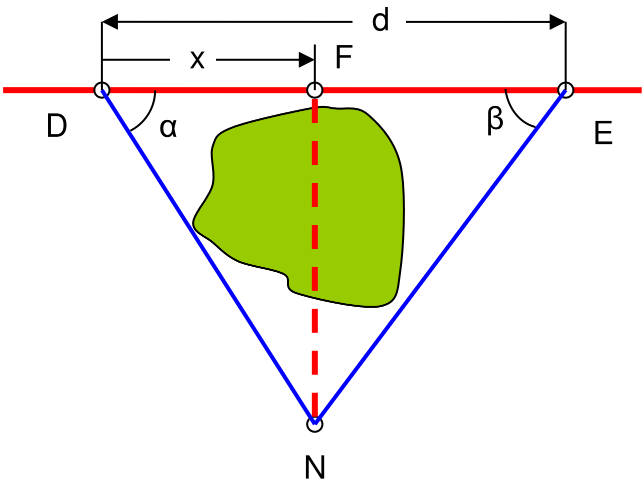
$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Weitere Formeln findet man in den umfangreichen Formelsammlungen.

<u>Beispiele:</u>

1) Von einer Wasserleitung zwischen den Orten D und E soll eine Stichleitung zum Ort N gelegt werden, wobei die Leitung möglichst kurz sein und deshalb senkrecht zur Hauptleitung verlegt werden soll. Der Abzweigpunkt F lässt sich von N aus nicht einsehen, es können aber die Winkel α und β und die Distanz d gemessen werden. An welcher Stelle x soll die Abzweigung erfolgen?



Lösung:

Das Dreieck D – E – N kann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Der senkrechte Abstand F – N sei h. Dann gilt:

$$\frac{h}{x} = \tan\alpha \qquad h = x \cdot \tan\alpha$$

$$\frac{h}{d-x} = \tan\beta \qquad h = (d-x) \cdot \tan\beta$$

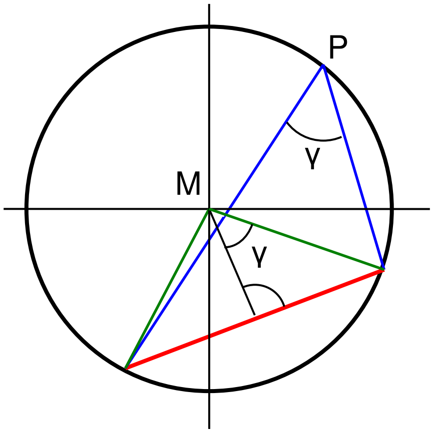
Gleichsetzen ergibt:

$$x \cdot \tan\alpha = (d-x) \cdot \tan\beta$$

$$x \cdot (\tan\alpha + \tan\beta) = d \cdot \tan\beta$$

$$x = \frac{d \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

2) Wie groß ist die Länge der Kreissehne eines Kreises mit dem Radius r, wenn von einem Punkt P des Kreises aus der Winkel γ gemessen wurde?

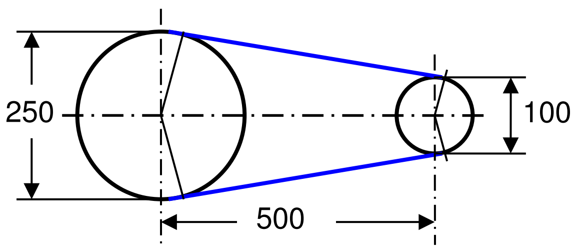


Lösung:

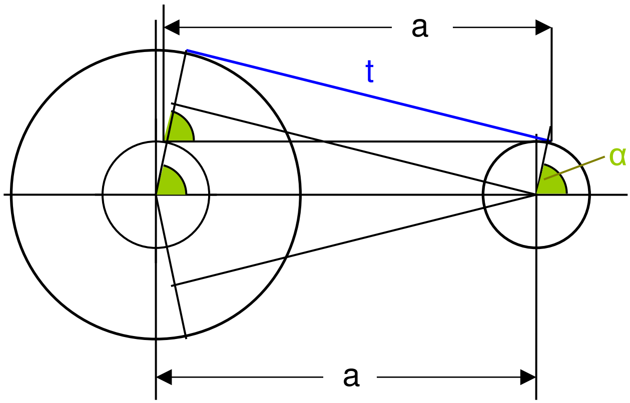
Zeichnet man vom Kreismittelpunkt zwei Strahlen zu den Endpunkten der Sehne und die Mittelsenkrechte vom Kreismittelpunkt aus, dann erhält man ein Dreieck mit der halben Sehnenlänge als Gegenkathete und dem Kreisradius als Hypotenuse. Somit ist:

$$\sin\gamma = \frac{s/2}{r} \qquad s = 2 \cdot r \cdot \sin\gamma$$

3) Welche Länge muss ein Zahnriemen haben, der



zwei Wellen im Abstand von 500 mm verbindet, wobei das größere Zahnrad einen Durchmesser von 250 mm und das kleinere den Durchmesser 100 mm hat?



Freie Riemenlänge:

$$t^2 = a^2 - (R - r)^2 \qquad t = 494{,}34\,[mm]$$

Winkel α:

$$\cos\alpha = \frac{R - r}{a} = \frac{125 - 50}{500} = 0{,}15; \qquad \alpha = 1{,}42;$$

Gesamte Riemenlänge:

$$s = 2 \cdot t + 2 \cdot R \cdot (\pi - \alpha) + 2 \cdot r \cdot \alpha$$

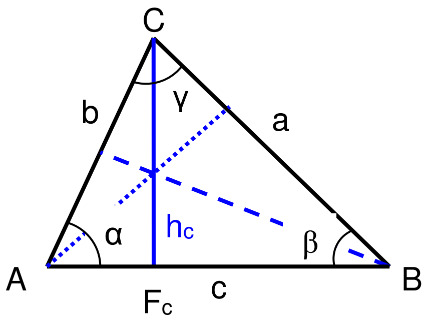
$$s = 2 \cdot t + 2 \cdot R \cdot \pi - 2 \cdot R \cdot \alpha + 2 \cdot r \cdot \alpha$$

$$s = 1561{,}05\,[mm]$$

4.8 Allgemein schiefwinklige Dreiecke

Bisher wurden alle Ergebnisse an rechtwinkligen Dreiecken erzielt. Im folgenden sollen mit Hilfe der Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck die verallgemeinerten Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln an allgemeinen Dreiecken aufgestellt werden.

<u>Der Sinussatz:</u>



Zieht man das Lot von C auf die Seite c dann entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke

A – C – F_c

und B – C - F_c

Die Höhe h ist dabei die Gegenkathete des jeweils gegenüberliegenden Winkels und man kann ablesen:

$$h_c = a \cdot \sin\beta \qquad h_c = b \cdot \sin\alpha$$

Gleichsetzen ergibt:

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man das Lot auf die Seite b zieht:

$$h_b = c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Diese zwei Beziehungen kann man zusammenfassen zu:

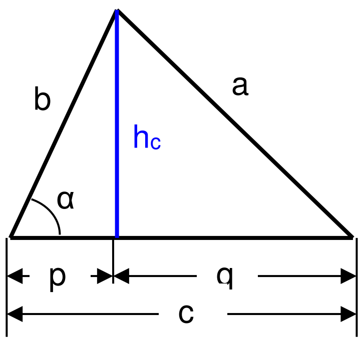
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder: $$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich die Dreieckseiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Kosinussatz:

Der Kosinussatz lässt sich ebenfalls durch Zerlegung des allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke beweisen.



Am linken Dreieck lässt sich ablesen:

$$p = b \cdot \cos\alpha$$

$$q = c - p = c - b \cdot \cos\alpha$$

Außerdem ist: $h_c^2 = b^2 - p^2 = a^2 - q^2$ (Pythagoras)

$$b^2 - b^2 \cdot \cos^2\alpha = a^2 - q^2$$

$$= a^2 - (c - b \cdot cos\alpha)^2$$

$$b^2 - b^2 \cdot \cos^2\alpha = a^2 - c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha - b^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Für die anderen beiden Seiten verläuft die Ableitung gleich. Somit ergeben sich drei Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Das Quadrat einer Seite ist die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das zweifache Produkt der beiden anderen Seiten, multipliziert mit dem cos des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Man kann den cos – Satz als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ansehen. Dabei kann beim schiefwinkligen Dreieck nicht mehr zwischen Hypotenuse und Kathete unterschieden werden. Alle Seiten sind gleich behandelt.

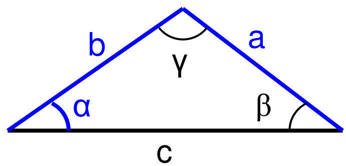
Ist allerdings der eingeschlossene Winkel gleich 90°, dann entfällt wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ das zweifache Produkt und die beiden anliegenden Seiten sind die Katheten, die gegenüber liegende Seite die Hypotenuse.

<u>Beispiele:</u>

1) Von einem Dreieck sind gegeben:

Winkel α = 40°; Seiten a = 40 cm; b = 32 cm

Gesucht sind die beiden restlichen Winkel und die fehlende Seite.



Berechnung von β mit dem sin – Satz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$\beta = 30{,}946°$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 109{,}05°$$

Berechnung von c entweder mit cos – Satz oder mit

$$c = b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta$$
$$c = 58{,}8195\ cm$$

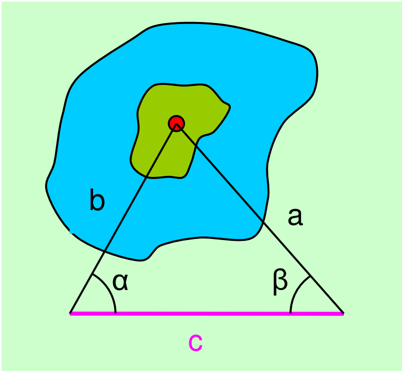
2)

Auf einer Insel in einem kleinen See befindet sich eine Markierung, deren Lage zu zwei Fixpunkten am Ufer gemessen werden soll.

Es wurde bestimmt:

α = 65° 43’ 15’’ β = 48° 15’ 33’’   c = 75 m

Wie groß sind die Abstände der Markierung auf der Insel von den Fixpunkten am Ufer?



Lösung:

Umrechnung der Winkel in das Dezimalsystem:

$$\alpha = 65 + \frac{43}{60} + \frac{15}{3600} = 65{,}7208°$$

$$\beta = 48 + \frac{15}{60} + \frac{33}{3600} = 48{,}2592°$$

Spitzenwinkel des Dreiecks: $180 - \alpha - \beta = 66{,}02°$

Seite a: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 74{,}82\,[m]$

Seite b: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \quad b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 61{,}249\,[m]$

3.8 Goniometrische Bestimmungsgleichungen

Goniometrische Bestimmungsgleichungen sind z.B. der sin- oder cos-Satz, wenn einer der Winkel gesucht ist. In diesem Fall ist die Gleichung einfach nach dem gesuchten Winkel aufzulösen. Kommt der gesuchte Winkel jedoch in mehreren Termen vor, dann muss man die Gleichung solange umformen, bis man den Winkel auf einer Seite der Gleichung isoliert hat.

Im allgemeinen ist der Winkel in unterschiedlichen Winkelfunktionen enthalten, so dass man zweckmäßiger Weise alle Winkelfunktionen mit Hilfe der Umrechnungstabelle auf eine einheitliche Art bringt, also z.B. die Gleichung so umformt, dass nur noch sin φ oder cos φ vorkommt. Bei der Lösung hat man zu beachten, dass zum gleichen Wert des cos oder sin mehrere Winkel gehören und außerdem jeder Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt ist.

Man unterscheidet:

- Rein goniometrische Gleichungen. Sie enthalten die Unbekannte nur in Verbindung mit trigonometrischen Funktionen, z.B.

  $$\tan(2\cdot x) - \cos x = 1{,}3$$

  Sie lassen sich oft dadurch formelmäßig lösen, dass man die trigonometrische Funktionen so umformt, dass nur noch ein Typ von trigonometrischer Funktion vorkommt, z.B. nur noch cos x. Eine weitere Methode besteht darin, dass man durch eine passende Substitution die goniometrische Gleichung in eine algebraische Gleichung umwandelt und mit algebraischen Methoden löst.

- Gemischt goniometrische Gleichungen:
  Die Variable ist sowohl in trigonometrischen als

auch in algebraischen Ausdrücken enthalten. Solche Gleichungen sind nur durch iterative Näherungsverfahren lösbar.

Beispiel: $x^2 \cdot \sin x - \cos x = 0,75$

Beispiele:

a) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \quad \Big|^2$$

$$1-\cos^2 x = \frac{3}{4} - \sqrt{3} \cdot \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+2}}{4}$$

$$\cos x_1 = 0,992033$$

$$\widehat{x}_1 = \arccos(0,992033) = \pm 0,12634 \pm k \cdot 2\pi \qquad x_1 = \pm 7,24°$$

$$\cos x_2 = -0,126 \qquad \widehat{x}_2 = \arccos(-0,126) = \pm 1,6971 \pm k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \pm 97,24°$$

Einsetzen ergibt, dass nur der negative Wert von x_1 und der positive Wert von x_2 gültige Lösungen sind.

b) $2 \cdot \tan x + 3 \cdot \cot x = 10$

$$2 \cdot \tan x + \frac{3}{\tan x} = 10$$

$$2 \cdot \tan^2 x - 10 \cdot \tan x + 3 = 0$$

$$\tan x = \frac{10 \pm \sqrt{100-24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$\widehat{x}_1 = \arctan\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}\right) = 1{,}36 \pm k \cdot \pi \qquad x_1 = 77{,}94°$$

$$x_2 = \arctan\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}\right) = 0{,}31 \pm k \cdot \pi \qquad x_2 = 17{,}77°$$

Beide Werte sind gültig

5. Einführung in die Vektorrechnung

5.1 Begriffe

In der Physik treten zwei verschiedene Arten von Größen auf:

Skalare: Die physikalische Größe kann durch eine einzige Zahl beschrieben werden.
Beispiele: Temperatur, Masse, Arbeit

Vektoren: Zur vollständigen Beschreibung benötigt man die Angabe über die Größe und die Richtung, in der sie wirkt:

Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Magnetische Flussdichte.

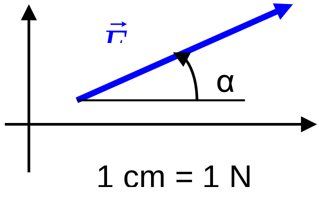
Um mit diesen richtungsabhängigen Größen rechnen zu können, benötigt man einen Satz von Regeln, die sich von denen des Zahlenrechnens unterscheiden.

Um die vektoriellen Größen von den skalaren Größen zu unterscheiden, kennzeichnet man Vektoren durch einen übergesetzten Pfeil oder als Kleinbuchstaben im Fettdruck:

$$\vec{F},\ \vec{a},\ \vec{s}$$

oder: **a, v, s**

In der zeichnerischen Darstellung von Vektoren verwendet man Pfeile, deren Länge ein Maß für den Betrag der Größe ist und deren Richtung die Wirkungsrichtung der physikalischen Größe darstellt.



Die Länge des Vektors in physikalischen Einheiten nennt man den Betrag des Vektors:

$$\left|\vec{a}\right|, \quad \left|\vec{F}\right|$$

Dabei hat man anzugeben, in welchem Maßstab der Betrag des Vektors aufgezeichnet ist und auf welches Bezugssystem sich die Angabe der Richtung bezieht. Als Bezugssystem bietet sich dabei i.a. ein kartesisches Koordinatensystem an.

Ein solchermaßen definierter Vektor hat einen bestimmten Anfangspunkt und ist deshalb in der Ebene oder im Raum fixiert. Einen solchen Vektor nennt man einen „gebundenen“ Vektor.

Kann man dagegen einen Vektor beliebig längs seiner Wirkungslinie verschieben, ohne seine physikalische Wirkung zu ändern, nicht jedoch parallel, dann spricht man von einem „linienflüchtigen“ Vektor. Kräfte in der Starrkörperstatik sind linienflüchtige Vektoren.

Falls es bei der physikalischen Wirkung der Vektorgröße nicht darauf ankommt, an welchem Ort sie wirkt, spricht man von einem „freien“ Vektor. Ein freier Vektor darf also beliebig längs seiner Wirkungslinie und parallel zu sich verschoben werden.

In der mathematischen Theorie über Vektoren werden immer freie Vektoren behandelt. Für gebundene oder linienflüchtige Vektoren müssen zusätzliche Regeln eingeführt werden.

Die Rechenregeln über Vektoren müssen folgende Forderungen erfüllen:

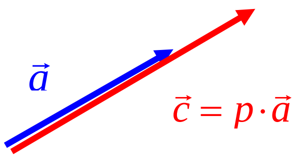
- Sie müssen an die realen Bedürfnisse der Physik angepasst sein.

- Sie müssen widerspruchsfrei sein zu den Gesetzen der Mathematik. Das bedeutet ins besonders:
  Wirken Vektoren nur in einer Richtung, d.h. längs einer Geraden, dann müssen Vektoroperationen zu den gleichen Ergebnissen führen wie die Operationen des Zahlenrechnens, die auf einer Zahlengeraden dargestellt werden.

5.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, Betrag eines Vektors, Einheitsvektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, einer Zahl p, wird so definiert, dass der Betrag des Vektors mit dem Faktor p multipliziert wird und die Richtung des Vektors unverändert bleibt.

$$\vec{c} = p \cdot \vec{a}$$



In der graphischen Darstellung wird also nur die Länge des Vektorpfeils, geändert, nicht die Richtung.
Dies entspricht der Konvention in der Physik:
Wenn die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs verdoppelt wird, soll sich nicht die Richtung des Fahrzeugs ändern.
Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrwert seines Betrags, erhält man einen Vektor der Länge eins mit der Richtung des ursprünglichen Vektors. Diesen Vektor nennt man „Einheitsvektor“.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

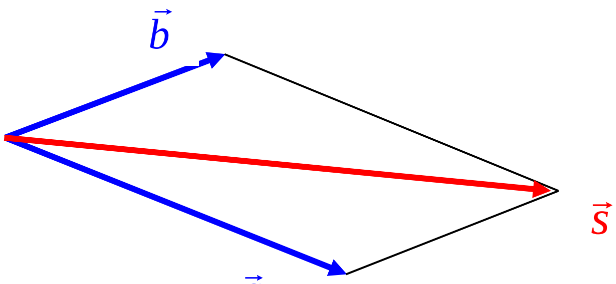
Damit kann man jeden Vektor darstellen als Produkt eines Einheitsvektors, der die Richtung des Vektors angibt, und seiner Länge und damit die beiden Größen Richtung und Betrag voneinander trennen:

$$\vec{a} = \vec{e}_a \cdot |\vec{a}|$$

Die Multiplikation mit einer negativen Zahl ist zunächst noch nicht definiert, da der Betrag einer physikalischen Größe immer positiv ist. Ein negativer Faktor lässt sich jedoch mit Hilfe der Vektorsubtraktion erklären.

5.3 Addition und Subtraktion zweier Vektoren

Entsprechend den Bedürfnissen der Mechanik definiert man die Summe zweier Vektoren mit Hilfe des sog. Parallelogrammaxioms:

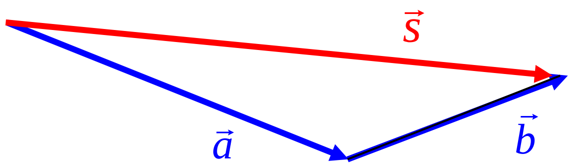


Demnach ist die Summe der beiden Vektoren

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

in der graphischen Darstellung der Vektor, der, ausgehend vom Anfangspunkt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und

$\vec{b}$, zur gegenüberliegenden Spitze des Parallelogramm führt. Die Addition kann aber auch so ausgeführt werden, dass der Vektor $\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt parallel bis zur Spitze des Vektors $\vec{a}$ verschoben wird. Der Summenvektor ist dann der Pfeil, der den Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ mit der Spitze des Vektors $\vec{b}$ verbindet.

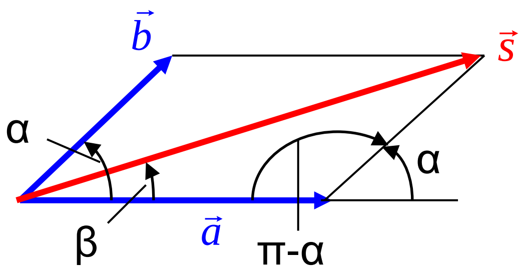


Die Konstruktion lässt sich auf die Addition beliebig vieler Vektoren erweitern.

Aus der Parallelogrammkonstruktion sieht man unmittelbar, dass die Vektoraddition kommutativ ist, d.h. dass die Reihenfolge der beiden Vektoren vertauscht werden darf:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Rechnerische Ausführung der Addition:



Den Betrag des Vektors $\vec{s}$ kann man mit Hilfe des cos-Satzes der Trigonometrie berechnen:

$$\left|\vec{s}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \underbrace{\cos\left(\pi - \alpha\right)}_{=-\cos\alpha}$$

$$\left|\vec{s}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Der Winkel β wird mit Hilfe des sin-Satzes berechnet:

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{s}\right|}{\sin\left(\pi - \alpha\right)}$$

$$\sin\beta = \frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{s}\right|} \cdot \sin\alpha$$

<u>Vektorsubtraktion:</u>

Ganz analog zum Zahlenrechnen lässt sich auch die Vektoraddition umkehren. In der Beziehung:

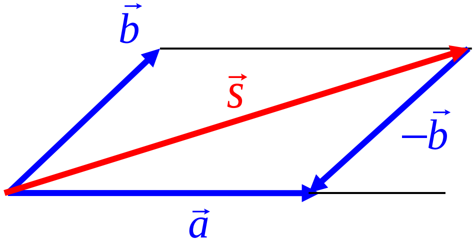
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

in der die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{b}$ bekannt sind, kann man fragen:

Welchen Vektor muss man zu $\vec{s}$ addieren, damit man $\vec{a}$ erhält?

Antwort: $\vec{a} = \vec{s} - \vec{b}$

Oder: $\vec{a} = \vec{s} + \left(-\vec{b}\right)$



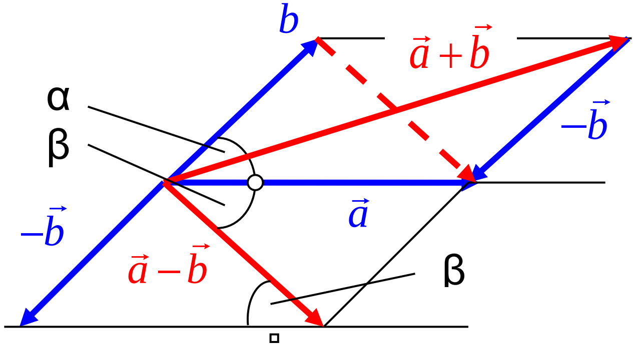
Man hat also einen Vektor zu addieren, der gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist, als der ursprüngliche Vektor $\vec{b}$.

Damit erhält man eine Interpretation des negativen Vorzeichens eines Vektors oder der Multiplikation eines Vektors mit dem Faktor (-1):

Der Vektor $-\vec{b}$ *ist zu einem positiv definierten Vektor* $+\vec{b}$ *entgegengesetzt gerichtet und hat den gleichen Betrag.*

Ein negatives Vorzeichen eines Vektors ist also nur in Verbindung mit einem positiven Vektor definiert.

Für die Differenz der Vektoren $\vec{a}-\vec{b}$ ergibt sich eine einfache Konstruktion an einem Parallelogramm:



Die Differenz der beiden Vektoren $\vec{a}-\vec{b}$ entspricht der zweiten Diagonalen im Parallelogramm.

Die Richtung des Vektors $\vec{a}-\vec{b}$ geht von der Pfeilspitze von $\vec{b}$ zur Pfeilspitze von $\vec{a}$

Rechnerisch ergibt sich, wieder mit Hilfe des sin- und cos-Satzes:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|a^2\right| + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}{\sin\alpha} \qquad \sin\beta = \sin\alpha\cdot\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}$$

<u>Mehrfache Addition:</u>

Beim Zahlenrechnen existiert das sog. assoziative Gesetz:

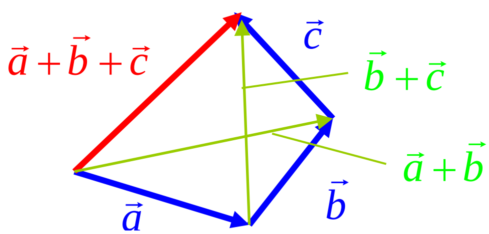
(a +b) + c = a + (b + c)

d.h. die Reihenfolge der Addition ist gleichgültig.

Die analoge Regel gilt auch in der Vektorrechnung:

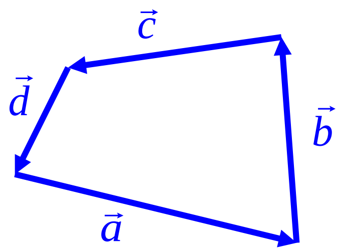
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

Anstatt bei jeder Addition das vollständige Parallelogramm zu zeichnen, ist es zweckmäßig, einfach wieder die Pfeile aneinander zu fügen:



Sonderfall:

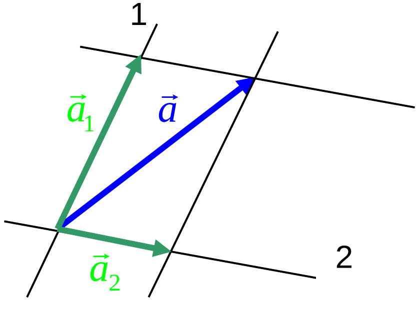
Die Summe mehrerer Vektoren kann auch null sein, obwohl keiner der beteiligten Vektoren null ist. Dies passiert dann, wenn sich das (räumliche) Vieleck schließt. Das Ergebnis ist der Nullvektor, der die Länge null hat und dessen Richtung beliebig ist.



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

5.4 Zerlegung eines Vektors, die Komponentendarstellung eines Vektors

Man kann die Additionsaufgabe auch so umkehren, dass man sich das Ergebnis vorgibt und fragt:
Wie groß sind die Vektoren mit vorgegebener Richtung, die als Summe den gegebenen Vektor ergeben.

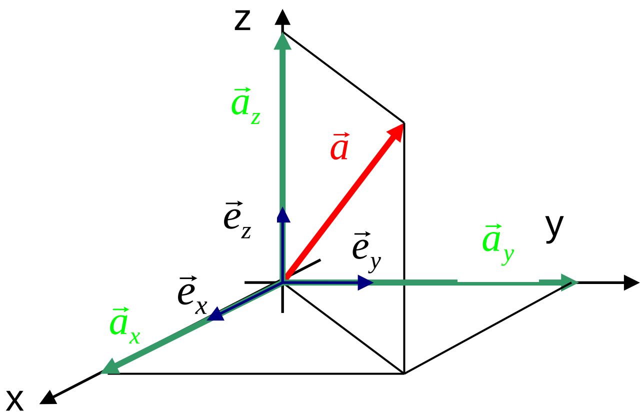


Die Lösung erfolgt durch Umkehrung der Parallelogrammkonstruktion. Man nennt die beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ in Richtung 1 und 2. Gibt man die Richtungen 1 und 2 in Form der beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ vor (Vektoren der Länge 1 in Richtung 1 bzw. 2), dann lässt sich der Vektor $\vec{a}$ darstellen als:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 \cdot |\vec{a}_1| + \vec{e}_2 \cdot |\vec{a}_2|$$

Man kann mit Hilfe der später einzuführenden Vektormultiplikation nachweisen, dass man in der Ebene einen Vektor nur in zwei Richtungen eindeutig zerlegen kann. Entsprechend kann man einen dreidimensionalen Vektor im Raum in drei Richtungen eindeutig zerlegen.

Besonders zweckmäßig für die numerische Rechnung mit Vektoren ist die Zerlegung eines Vektors in die Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems.



Ein dreidimensionaler Vektor $\vec{a}$ lässt sich damit darstellen als Summe seiner Projektionen in Richtung der Koordinatenachsen:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Bezeichnet man die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen mit $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ und die Beträge der Projektionen mit a_x, a_y und a_z , dann lässt sich der Vektor $\vec{a}$ darstellen als

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

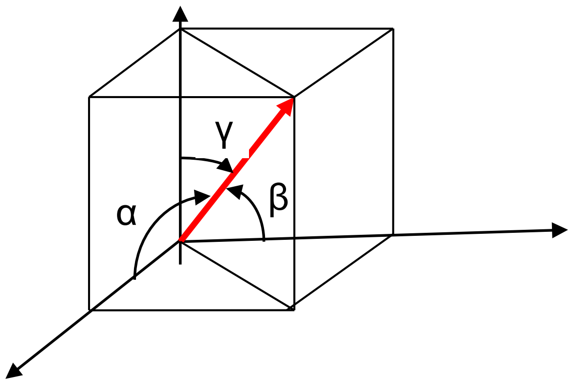
oder in der abgekürzten Schreibweise:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$ [1]

Die Zahlen a_x, a_y, a_z bezeichnet man als Komponenten des Vektors in einem kartesischen Koordinatensystem. Mit Hilfe der Komponenten erhält man den Betrag des Vektors:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Die Richtungen des Vektors bezogen auf die Achse



[1] In der linearen Algebra unterscheidet man zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren. Diese Unterscheidung ist in der physikalischen Vektorrechnung nicht notwendig

Die Richtungen lassen sich folgendermaßen berechnen

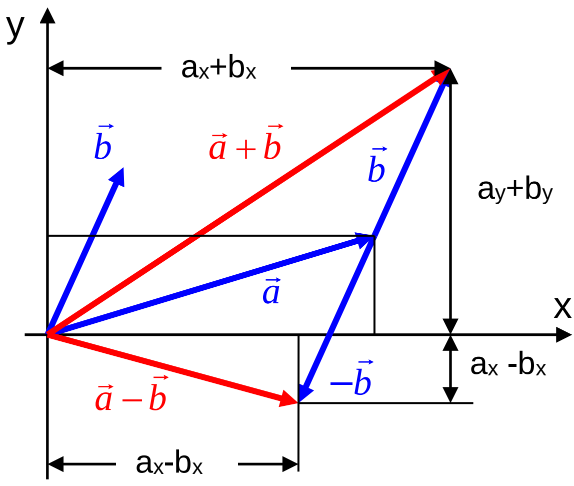
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

5.5 Addition und Subtraktion in Komponentenschreibweise

Die Darstellung erfolgt wegen der einfacheren Visualisierung in ebenen Koordinaten. Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist einfach durchzuführen.



Aus der Figur ist ersichtlich:

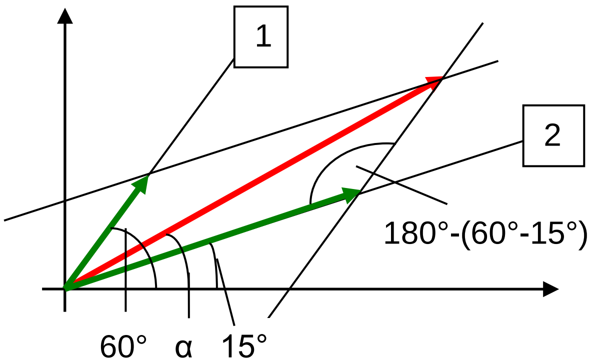
Die Addition und die Subtraktion geschieht so, dass die gleichgerichteten Komponenten der beiden Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y\right)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x,a_y-b_y\right)$$

5.6 Beispiele

1. Beispiel

Der Vektor $\vec{a}=\left(5;3\right)$ soll in zwei Komponenten zerlegt werden, die einen Winkel von 60° und 15° zur Horizontalen bilden. Die Lösung soll graphisch und rechnerisch erfolgen.



Rechnerische Lösung:

Berechnung mit sin-Satz:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5^2+3^2}=5{,}83$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=0{,}8575;\quad \alpha=30{,}96°$$

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin(135°)} = \frac{|a_1|}{\sin(\alpha - 15°)} \qquad |a_1| = 2,268$$

$$a_{1x} = |\vec{a}_1| \cdot \cos(60°) = 1,134$$

$$a_{1y} = |\vec{a}_1| \cdot \sin(60°) = 1,964$$

$$\vec{a}_1 = (1,134; 1,964)$$

ebenso:

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin(135°)} = \frac{|\vec{a}_2|}{\sin(60° - \alpha)} \qquad |\vec{a}_2| = 4,002$$

$$\vec{a}_2 = (3,866; 1,036)$$

2. Beispiel

Gegeben sind die beiden Vektoren:

$$\vec{a} = (3;\ 1;\ 4) \qquad \vec{b} = (4; -3; -3)$$

Welchen Vektor muss man zu den beiden Vektoren dazu addieren, damit die Summe der drei Vektoren mit der y-Achse zusammenfällt und den Betrag 1 hat?

Lösung:

$$a_x + b_x + c_x = 0$$

$$a_y + b_y + c_y = 1$$

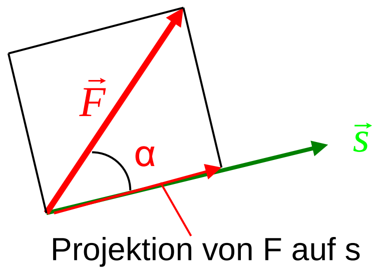
$$a_z + b_z + c_z = 0$$

$$c_x = -7; \quad c_y = 3; \quad c_z = -1$$

5.7 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

In der Physik ist die Größe „Arbeit“ definiert als das Produkt aus Kraft und Weg. Beide Größen sind Vektoren, die Arbeit ist nicht richtungsabhängig und somit eine skalare Größe. Es ist also eine Definition eines Produkts zweier Vektoren notwendig, die einen Skalar ergibt.

Dabei ist offensichtlich, dass nur die Komponente einer Kraft, die in Richtung des Wegs wirkt, eine Arbeit verrichten kann.



Man definiert deshalb als Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

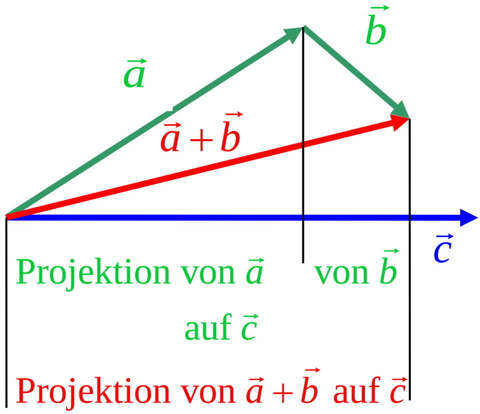
<u>Eigenschaften des Skalarprodukts:</u>

Aus der Definitionsgleichung geht hervor, dass man die beiden Vektoren vertauschen darf. Das Skalarprodukt ist kommutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Außerdem gilt das distributive Gesetz:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$



$$\left|\vec{a}+b\right|\cdot\cos\varphi=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha+\left|b\right|\cos\beta \quad \left|\cdot\left|\vec{c}\right|\right.$$

$$\underbrace{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi}_{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}=\underbrace{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha}_{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\underbrace{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\beta}_{\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

Es gilt jedoch nicht das assoziative Gesetz der Zahlenalgebra $\left(a\cdot b\right)\cdot c=a\cdot\left(b\cdot c\right)$,. Denn

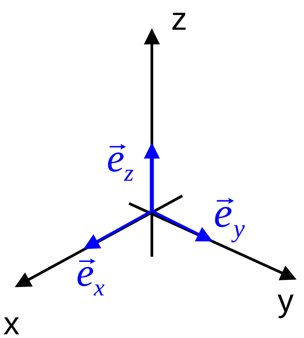
$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ist ein Vektor in Richtung $\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ ist ein Vektor in Richtung $\vec{a}$

Stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren null, obwohl keiner der beiden Vektoren null ist:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Das Skalarprodukt in Komponentenschreibweise



In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ lauten die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z$$

Multipliziert man die beiden Vektoren, dann treten folgende Produkte der Einheitsvektoren auf:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \qquad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

Somit ergibt die Multiplikation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z\right) \cdot \left(b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Fasst man die beiden Definitionen des Skalarprodukts zusammen, ergibt sich eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) \cdot \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)}}$$

5.8 Beispiele

1. Beispiel

Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \left(-3, 2, 2\right) \qquad \vec{b} = \left(2, 1, 2\right)$$

a) Bilden Sie die Skalarprodukte

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$$

b) Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren miteinander ein?

c) Wie groß ist die Konstante k zu wählen, damit der Vektor

$$\vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

senkrecht auf dem Vektor $\vec{c} = \left(1, 1, 0\right)$ steht?

Lösung:

a)

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$$

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 17$$

mit $\vec{b}^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 9$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

damit ist $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 26$

b) Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ stehen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander

$$\left(\vec{a} + k \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$$

c) $\vec{a} \cdot \vec{c} + k \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$$k = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}}$$

In diesem Ausdruck darf man nicht kürzen! Eine Division von Vektoren ist nicht erlaubt!

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \qquad k = \frac{1}{3}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

2. Beispiel

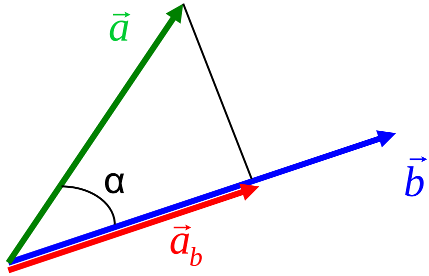
Gegeben sind die beiden Vektoren:

$$\vec{a} = (4, 4, 1) \qquad \vec{b} = (2, 1, 2)$$

Berechnen Sie die in Richtung von $\vec{b}$ fallende Komponente von $\vec{a}$

Lösung:

Veranschaulicht am ebenen Fall ergibt sich:



$$\vec{a}_b = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \text{Einheitsvektor in Richtung } \vec{b}$$

$$\vec{a}_b = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$ erweitert mit $\left|\vec{b}\right|$

$$\vec{a}_b = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\vec{b} \cdot \left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

$$\vec{a}_b = \frac{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha}{\vec{b}^{\,2}} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a}_b == \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}} \cdot \vec{b}$$

Der Ausdruck darf <u>nicht</u> gekürzt werden!

$$\vec{a}_b = \frac{14}{9} \cdot (2, 1, 2) = \left(\frac{28}{9}, \frac{14}{9}, \frac{28}{9}\right)$$

5.9 Das Vektorprodukt

In der Physik treten Produkte von Vektoren auf, die als Ergebnis wieder einen Vektor liefern.

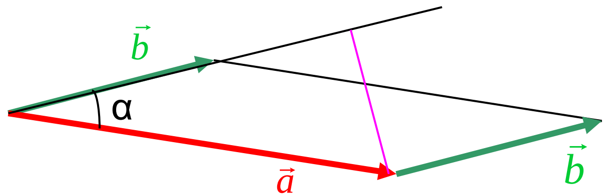
1. Beispiel: Drehmoment einer Kraft. Die drehende Wirkung einer Kraft ist abhängig von der Größe der Kraft und dem Hebelarm, an dem sie wirkt, genauer: vom senkrechten Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Drehpunkt. Im Fall der unbehinderten Drehung steht dabei die Drehachse senkrecht auf der Ebene, die vom Kraftvektor und dem Abstandsvektor gebildet wird.

2. Beispiel: Fließt durch einen elektrischen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, ein Strom, dann wirkt auf den Leiter eine Kraft, die senkrecht zu Stromrichtung und Feldrichtung wirkt.

Die beiden Beispiele legen es nahe, ein Vektorprodukt zu definieren, das einen Vektor liefert, der auf den beiden Faktoren senkrecht steht. Dieses Vektorprodukt heißt „Kreuzprodukt“ und wird geschrieben:

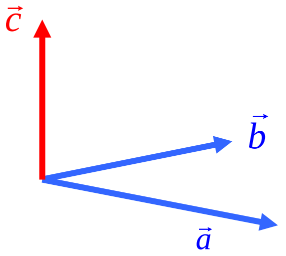
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Die Anwendung in der technischen Mechanik (Drehmoment) zeigt, dass es zweckmäßig ist, den Absolutbetrag des Vektorprodukts als das Produkt aus senkrechtem Abstand zu einem Bezugspunkt und einem Vektor zu berechnen



$$\left|\vec c\right| = \left|\vec a\right| \cdot \left|\vec b\right| \cdot \sin\alpha$$

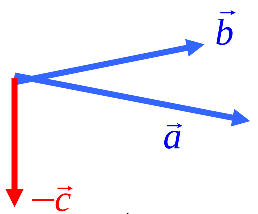
$\vec a$ ist dabei der Vektor vom Drehpunkt zum Lastangriffspunkt der Kraft, $\vec b$ der Vektor der Kraft.



Das Vektorprodukt entspricht gleichzeitig dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ gebildeten Parallelogramm.

Die Richtung des Ergebnisvektors wird so festgelegt, dass die drei Vektoren $\vec a$, $\vec b$ und $\vec c$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden:

Dreht man den ersten Vektor $\vec a$ auf kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektors $\vec b$ und führt gleichzeitig eine Rechtsschraubbewegung durch, dann soll die Bewegung in die Richtung des Ergebnisvektors $\vec c$ gehen.

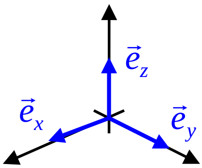


$$\vec b \times \vec a = -\vec c$$

Diese Festlegung bedeutet, dass das Kreuzprodukt nicht kommutativ sein kann. Denn vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren, dann erhält man einen Ergebnisvektor, der in die umgekehrte Richtung von $\vec c$ geht; man erhält $-\vec c$.

Aus der ursprünglichen Definition des Vektorprodukts ergibt sich, dass dieses null ist, wenn die beiden Faktoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind, also wenn α = 0 oder α = π ist.

Zur Ausführung der Multiplikation in Komponenten kann man sich wieder, wie bei der skalaren Multiplikation, das Verhalten der Einheitsvektoren überlegen:



$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

Für das Vektorprodukt ergibt sich somit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z\right) \times \left(b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z\right)$$

Beim Ausmultiplizieren geht man davon aus (ohne Beweis), dass das Vektorprodukt distributiv ist, dass also gilt:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = {} & a_x \cdot b_x \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_x \cdot b_y \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_x \cdot b_z \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_z + \\ & + a_y \cdot b_x \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_x + a_y \cdot b_y \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_y + a_y \cdot b_z \cdot \vec{e}_y \times \vec{e}_z + \\ & + a_z \cdot b_x \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_x + a_z \cdot b_y \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_y + a_z \cdot b_z \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z\end{aligned}$$

Mit den Festlegungen über die Kreuzprodukte der Einheitsvektoren erhält man:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right) \cdot \vec{e}_x + \left(a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\right) \cdot \vec{e}_y +$$
$$+ \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right) \cdot \vec{e}_z$$

Dieses Ergebnis lässt sich in Form einer dreireihigen Determinante darstellen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

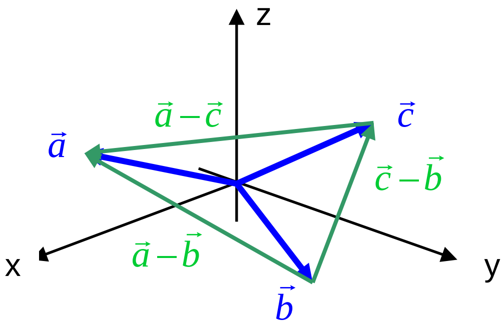
Die drei Vektoren:

$$\vec{a} = (2, 0, 4) \qquad \vec{b} = (0, 5, -2) \qquad \vec{c} = (-1, 2, 0)$$

zeigen jeweils auf die Ecke eines Dreiecks.

a) Wie groß ist die Fläche dieses Dreiecks?

b) Wie lautet der Einheitsvektor, der auf der Dreiecksfläche senkrecht steht und in Richtung des Koordinatenursprungs zeigt?



Lösung:

a) Die Dreiecksfläche ist die halbe Parallelogrammfläche, die von jeweils zwei Dreieckseiten gebildet wird. Die Parallelogrammfläche wird mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnet.

$$\vec{a}-\vec{b}=(2,-5,6) \qquad \vec{c}-\vec{b}=(-1,-3,2)$$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -5 & 6 \\ -1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(8,\ -10,-11)$$

$$\left|\vec{A}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8^2+10^2+11^2}=\frac{16,88}{2}$$

$$\left|\vec{A}\right|=8,44\ Fe$$

b) Der Vektor $\vec{A}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{c}-\vec{b}$ definierten Fläche und weist in Richtung des Koordinatenursprungs. Der dazu gehörende Einheitsvektor ist:

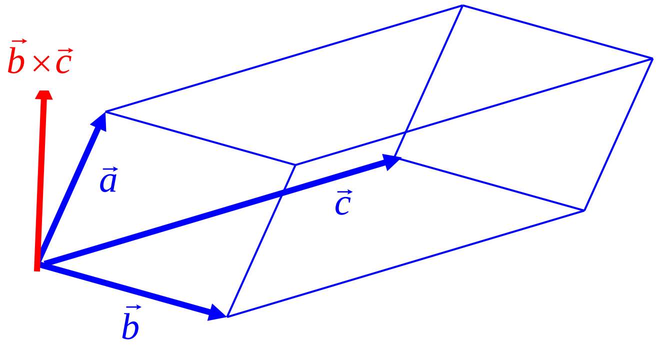
$$\vec{e}=\left(\frac{8}{16,88},-\frac{10}{16,88},-\frac{11}{16,88}\right)$$

$$\vec{e}=(0,47;-0,59;-0,65)$$

5.10 Das Spatprodukt

Man kann die bisher besprochenen Produktbildungen hintereinander anwenden und z.B. bilden:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$



Die drei Vektoren kann man dabei als Kanten eines sog. „Spat“ ansehen. Dies ist ein zylindrischer Körper, bei dem jeweils vier Seiten zueinander parallel sind.

Das Kreuzprodukt $\vec{b}\times\vec{c}$ ist ein Vektor, der auf den beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht und dessen Betrag der Fläche des Parallelogramms, gebildet aus den beiden Vektoren, entspricht. Das Skalarprodukt bedeutet, dass der Betrag von $\vec{a}$ mit dem cos des von $\vec{a}$ und $\vec{b}\times\vec{c}$ eingeschlossenen Winkels multipliziert wird; dies entspricht der Höhe des Spats. Diese wird mit der Grundfläche multipliziert, somit ist das obige Produkt gerade gleich dem Volumen des Spats und das Produkt heißt „Spatprodukt“. Man schreibt dafür auch:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Man kann jede Fläche des Spat als Grundfläche ansehen; deshalb gilt:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

Das Vorzeichen ergibt sich positiv oder negativ, je nach dem, ob die drei Vektoren eine Rechts- oder ein Links-system bilden.

Die zahlenmäßige Ausrechnung führt man am besten mit Hilfe einer dreireihigen Determinante durch. Wie man durch Ausrechnen nachweisen kann, ist:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Aus der geometrischen Deutung als Volumen eines Spats ergibt sich:

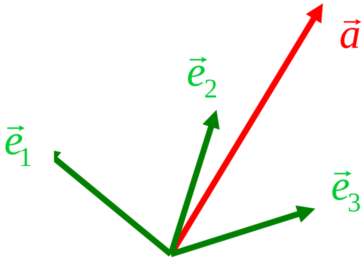
Das Spatprodukt ist null, wenn alle drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *in einer Ebene liegen.*

<u>Anwendungen des Spatprodukts:</u>

Zerlegung eines Vektors in drei Komponenten

Die früher graphisch in zwei Dimensionen gelöste Aufgabe wird rechnerisch für den dreidimensionalen Fall gelöst.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a}$ im Raum, drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, die die drei Zerlegungsrichtungen angeben.



Es sollen also drei Zahlen gefunden werden, sodass gilt:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit dem Vektorprodukt $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, dann verschwinden offensichtlich die Spatprodukte $\vec{e}_2 \cdot \left(e_2 \times \vec{e}_3\right)$ und $\vec{e}_3 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right)$, denn die Vektoren liegen in einer Ebene, und es bleibt:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) = a_1 \cdot \vec{e}_1 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right)$$

$$\underbrace{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}_{Spatprodukt\,(skalar)} = a_1 \cdot \underbrace{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}_{skalar}$$

Damit erhält man die Komponente in Richtung

$$\vec{e}_1\ a_1 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}$$

Multipliziert man die Ausgangsgleichung mit $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$, erhält man die Komponenten a_2 und a_3.

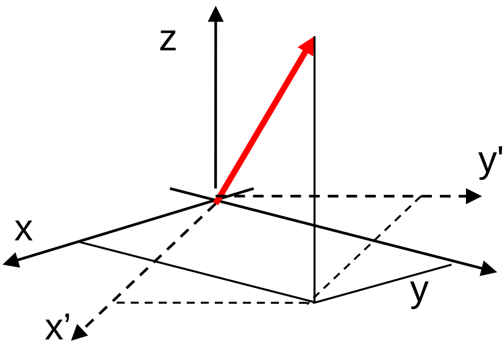
$$a_1 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3} \qquad a_2 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_3\ \vec{e}_1}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3} \qquad a_3 = \frac{\vec{a}\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2}{\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}$$

Liegen die drei Einheitsvektoren in einer Ebene, dann ist das Spatprodukt $\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3$ gleich null, die Division ist nicht möglich und die Zerlegung nicht definiert.

Man kann einen Vektor nicht in drei Richtungen zerlegen, wenn deren Richtungspfeile in einer Ebene liegen.

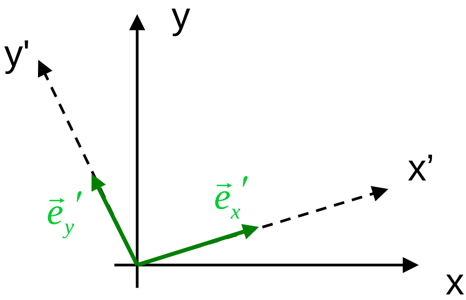
Beispiel:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \left(4{,}3{,}3\right)$. Gesucht sind die drei Komponenten des Vektors in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, das um 30° um die z-Achse gedreht ist.



Lösung:

Der Einheitsvektor in z-Richtung bleibt erhalten, die Einheitsvektoren in x’ und y’ – Richtung lauten im x – y – System:



$$\vec{e}_x{}' = \left(\cos\left(30°\right), \sin\left(30°\right), 0\right)$$

$$\vec{e}_y{}' = \left(-\sin\left(30°\right), \cos\left(30°\right), 0\right)$$

$$\vec{e}_z{}' = \left(0,0,1\right)$$

Da das System der Einheitsvektoren rechtwinklig und ein Rechtssystem ist, sind die Spatprodukte:

$$\vec{e}_x{}' \, \vec{e}_y{}' \, \vec{e}_z{}' = \vec{e}_1 \, \vec{e}_2 \, \vec{e}_3 = 1$$

und

$$\vec{e}_x{}' \times \vec{e}_y{}' = \vec{e}_z{}' \qquad \vec{e}_y{}' \times \vec{e}_z{}' = \vec{e}_x{}' \qquad \vec{e}_z{}' \times \vec{e}_x{}' = \vec{e}_y{}'$$

$$\vec{a} \, \vec{e}_y{}' \, \vec{e}_z{}' = \vec{a} \cdot \vec{e}_x{}'$$

$$= \left(4,3,3\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0 \right)$$

$$a_1 = 4{,}964$$

$$\vec{a}\,\vec{e}_z{}'\,\vec{e}_x{}' = \vec{a}\cdot\vec{e}_z{}'$$

$$= \left(4,3,3\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\cos\left(\frac{\pi}{3}\right),0\right)$$

$$a_2 = 0,598$$

$$a_3 = a_z = 3$$

Ergebnis:

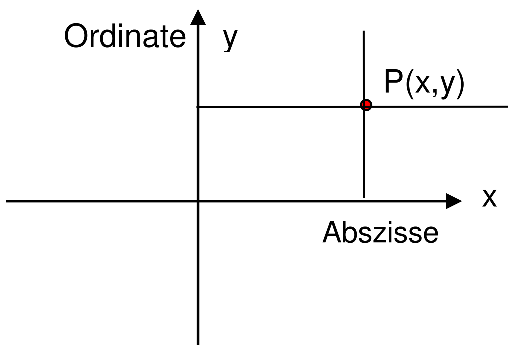
$$\vec{a} = \left(4,964;\,0,598;\,3\right)$$

6 Analytische Geometrie

6.1 Ebene Koordinatensysteme

Das Prinzip der analytischen Geometrie besteht darin, geometrische Probleme mit Hilfe rechnerischen Methoden anstatt mit Lineal und Zirkel zu behandeln. Dies wird dadurch erreicht, dass man den Punkten der Ebene Zahlen zuordnet und ein geometrisches Gebilde als Menge von Punkten auffasst, zwischen denen gewisse Beziehungen bestehen.

Die Zuordnung von Punkten zu Zahlen geschieht durch ein Koordinatensystem. Ein Punkt auf einer Zahlengeraden wird durch eine einzige Zahl festgelegt. Um jeden Punkt der Ebene zahlenmäßig darstellen zu können, benötigt man zwei Zahlen, für einen Punkt im dreidimensionalen Raum drei Zahlen. Es liegt deshalb nahe, zur Beschreibung eines Punktes in der Ebene zwei Zahlengerade in zwei Richtungen zu benutzen, am einfachsten mit Hilfe von zwei Zahlengeraden, die aufeinander senkrecht stehen. Dies ist allerdings nicht zwingend notwendig. Für manche Probleme ist es zweckmäßig, ein schiefwinkliges Koordinatensystem zu definieren.



Folgende Bezeichnungen sind üblich:

Eine Richtung wird i.a. in die horizontale Richtung gelegt. Man nennt sie Abszisse. Die Zahlen des Zahlenpaars, die auf dieser Zahlengeraden abgetragen werden, bekommen oft die Bezeichnung x. **X** ist somit die Menge aller Werte in horizontaler Richtung, die die Punkte P(x,y) auf der geometrischen Figur annehmen können.

Die zweite Zahlgerade senkrecht zur Richtung x heißt Ordinate. Die Zahlen, die auf dieser Geraden abgetragen werden, tragen oft die Bezeichnung y. **Y** ist damit die Menge der Werte y , die die Punkte auf der geometrischen Figur annehmen können.

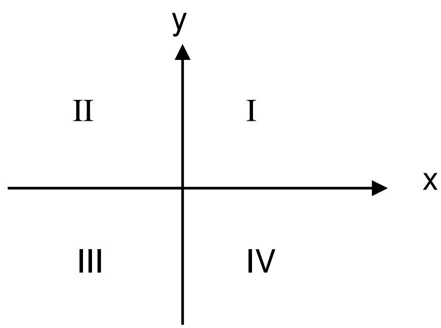
Der Schnittpunkt der beiden Zahlgeraden ist der Nullpunkt des Koordinatensystems. Zweckmäßiger Weise ist der Nullpunkt gleichzeitig Nullpunkt beider Zahlgeraden.

Die beiden Zahlengeraden nennt man Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems (nach René Descartes, franz. Mathematiker), die Zahlenwerte zur Beschreibung der Lage eines Punktes nennt man seine Koordinaten. Einen Punkt P der geometrischen Figur erreicht man dadurch, dass man den x-Wert auf der Abszisse abträgt und an dieser Stelle eine Parallele zur Ordinate zieht. Ebenso trägt man den y-Wert auf der Ordinate ab und zieht eine Parallele zur Abszisse. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist der Ort des Punktes P(x,y).

Entsprechend der häufigen Verwendung der Bezeichnungen x und y nennt man die Abszisse auch oft x – Achse und die Ordinate y – Achse.

Die beiden Zahlgeraden unterteilen die gesamte Ebene in vier Teile; man nennt sie Quadranten des Koordinatensystems.

Bei der Definition eines Winkels wird festgelegt, dass ein Drehsinn entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn einen positiven Winkel definiert. Entsprechend bedeutet ein Rechtskoordinatensystem, dass man die erste Achse (Abszisse) gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, um auf kürzestem Weg die Achse mit der Ordinate zur Deckung zu bringen.

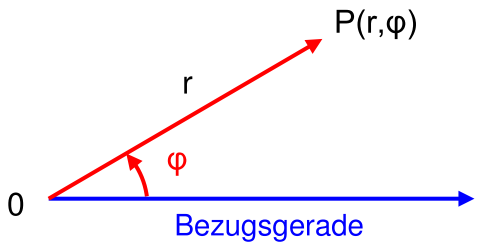


Entsprechend nummeriert man die vier Quadranten in der Reihenfolge, in der man sie bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn überfährt.

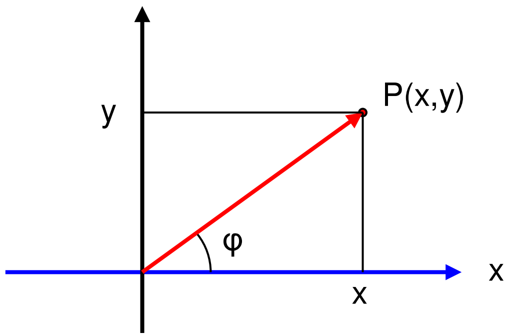
<u>Polarkoordinatensystem</u>

Ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem ist nicht die einzige Möglichkeit, Punkte in der Ebene darzustellen. Man kann dies auch durch Angabe eines Winkels und eines Abstands von einem Bezugspunkt erreichen.

Der Winkel wird von einer Bezugsgeraden aus im mathematisch positiven Sinn abgetragen. Auf dem Winkelstrahl kann man den Abstand vom Nullpunkt aus abtragen.



Hat man einen Zusammenhang in x – y – Koordinaten gegeben, dann kann man diesen leicht in Polarkoordinaten umrechnen. Man benutzt die x – Achse als Bezugsgerade für den Winkel und kann x ersetzen durch:



$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

Indem man alle vorkommenden x und y durch r und φ ersetzt, erhält man alle Punkte der geometrischen Figur in Abhängigkeit der neuen Variablen r und φ.

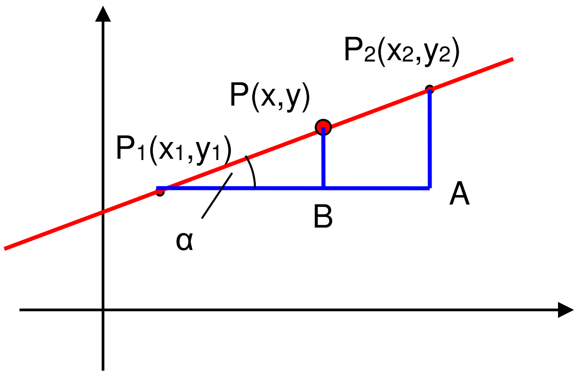
6.2 Geometrische Örter

In der analytischen Geometrie sucht man Funktionsgleichungen, die für Punktmengen mit ganz bestimmten Eigenschaften gelten. Im folgenden werden Probleme mit folgenden Fragestellungen behandelt:

- Gesucht ist eine Gleichung für den geometrischen Ort aller Punkte, die auf einer geraden Linie liegen und durch zwei gegebene Punkte gehen. (Gerade)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben. (Kreis)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt aus und von einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben. (Parabel)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist. (Ellipse)
- Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist. (Hyperbel)

Die Methode, um solche Probleme zu lösen, besteht darin, einen Punkt mit variablen Koordinaten $P(x,y)$ oder $P(r,\varphi)$ zu definieren, der die geforderten Eigenschaften aufweist. Die gestellte Forderung wird durch Gleichungen (oder eine Gleichung) erfüllt, die für die Koordinaten des Punktes erfüllt sein müssen. Das einfachste Problem dieser Art ist die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte.

6.3 Die Gleichung der Geraden



Falls der Punkt P(x,y) auf der Verbindungsgeraden zwischen P_1 und P_2 liegen soll, müssen die beiden Dreiecke P_1 – A – P_2 und P_1 – B – P ähnlich sein, d.h. es muss gelten:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

aufgelöst nach y ergibt sich:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1$$

Dies nennt man die Zweipunkteform der Geradengleichung.

Der Faktor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist gleichzeitig der tan α, der Tangens des Anstiegswinkels der Geraden.

Fasst man die Terme etwas zusammen, erhält man die einfachere Form der Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + c$$

mit

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$c = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = y_1 - m \cdot x_1$$

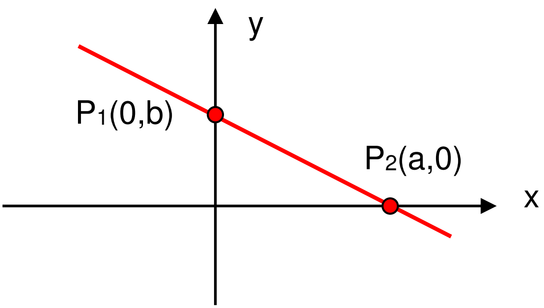
Die obige Form der Geradengleichung nennt man die kartesische Normalform der Geradengleichung. Es sind folgende Sonderfälle zu beachten:

c = 0: y = m·x
Die Gerade geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems

m = 0: Die Gerade hat die Steigung null und verläuft parallel zur x – Achse im Abstand c

x = c: Die Gerade verläuft parallel zur y – Achse im Abstand c

Aus der kartesischen Normalform kann man unmittel-



bar die Steigung m = tan α der Geraden ablesen, Setzt man x = 0, erhält man unmittelbar die Stelle y, an der die Gerade die y – Achse schneidet.

Soll gleichzeitig auch der Schnittpunkt mit der x - Achse bequem aus der Geradengleichung ablesbar sein, kann man aus der Zweipunkt – Form ebenfalls eine passende Gleichung ableiten: angenommen, die Gerade soll durch die beiden Punkte $P_1(0,b)$ und $P_2(a,0)$ gehen:

$$\frac{y-b}{x-0}=\frac{0-b}{a-0} \qquad \frac{y-b}{-b}=\frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Aus dieser Form der Gleichung sind die beiden Achsabschnitte a und b unmittelbar ablesbar.

Beispiel:

Die Geradengleichung $\qquad y=\frac{3}{2}\cdot x-2$

soll auf die Achsabschnittsform gebracht werden.

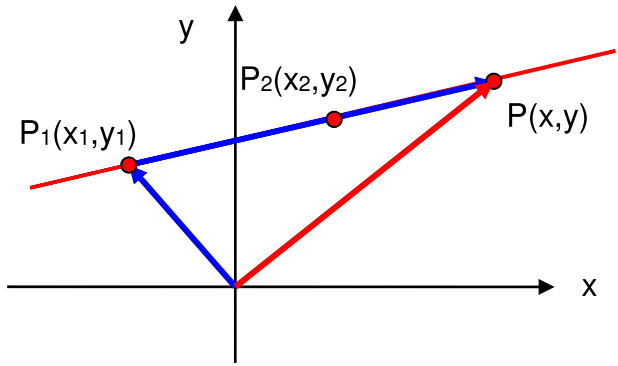
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-2 \quad \Big|:2$$

$$\frac{y}{2}+1=\frac{3}{4}\cdot x$$

$$\frac{3}{4}\cdot x-\frac{y}{2}=1$$

6.4 Die Geradengleichung in Vektorform

Gibt man wieder zwei Punkte in der Ebene vor, dann kann man jeden Punkt der Gerade dadurch erreichen, dass man zu einem Punkt vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus einen Vektor zieht und zu diesem einen zweiten Vektor addiert, der die Richtung der Geraden hat und mit einem Skalar multipliziert ist.



Einheitsvektor in Richtung der Geraden:

$$\begin{aligned} \vec{e}_G &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{Betrag\ des\ Vektors} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist α der Anstiegswinkel der Geraden bzw. der Winkel zwischen der x – Achse und der Geraden.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um zwei Gleichungen mit dem Parameter k. Eliminiert man k, erhält man wieder eine Geradengleichung:

$$x = x_1 + k \cdot \cos\alpha \qquad k = \frac{x - x_1}{\cos\alpha}$$

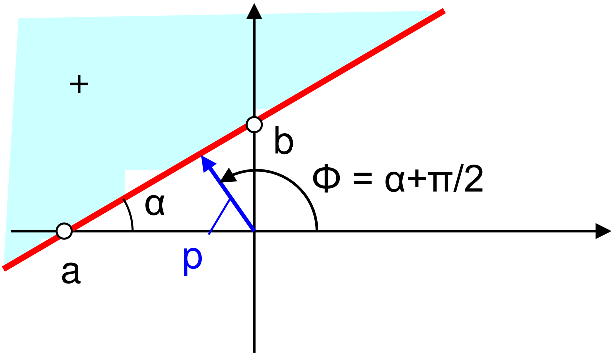
$$y = y_1 + k \cdot \sin\alpha \qquad y = y_1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot (x - x_1)$$

$$y = \tan\alpha \cdot x + c = m \cdot x + c$$

Durch die Festlegung des Einheitsvektors durch die Wahl und die Reihenfolge der beiden gegebenen Punkte hat die Gerade eine gewisse Orientierung erhalten, so dass es gerechtfertigt ist, von der linken und der rechten Seite der Geraden zu sprechen. Man bezeichnet die Seite der Geraden, die beim Passieren der Geraden auf der linken Seite liegt, als die positive Halbebene, die rechte Seite als die negative Halbebene.

6.5 Die Hesse'sche Normalform der Geradengleichung

In den bisher besprochenen Formen der Geradengleichung konnte entweder die Richtung und der Achsabschnitt auf der y – Achse oder die beiden Achsabschnitte auf der x- und y – Achse direkt abgelesen werden. Es ist gelegentlich zweckmäßig, eine Form der Geradengleichung zu ermitteln, bei der direkt der Abstand der Geraden vom Nullpunkt erscheint.



Geht man von der Achsabstandsform aus:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

dann kann man a und b ersetzen durch:

$$a \cdot \sin\alpha = p \qquad b \cdot \cos\alpha = p$$

$$a = \frac{p}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{p}{\cos\alpha}$$

mit $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$$\sin\alpha = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$$ eingesetzt:

$$\frac{x}{p}\cdot\cos\varphi + \frac{y}{p}\cdot\sin\varphi = 1$$

$$x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi - p = 0$$

Dies ist die Hesse'sche Normalform. In dieser Gleichung ist:

p : der Abstand vom Koordinatenursprung. Dieser kann positiv und negativ sein, je nach dem, ob er auf der positiven oder der negativen Seite der Geraden liegt.

φ der Winkel zwischen der Normalen auf die Gerade und der x – Achse.

Mit Hilfe der Hesse'schen Normalform kann man besonders bequem Parallelen zu einer gegebenen Geraden auffinden. Soll eine Parallele im Abstand d gefunden werden, muss man nur den Abstand p vergrößern oder verkleinern.

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - \left(p \pm d\right) = 0$$

Sucht man den Abstand eines beliebigen Punktes von der Geraden, dann legt man eine Parallele durch diesen Punkt und berechnet den neuen Abstand d.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte $P_1(5, 6)$, $P_2(-1, 2)$.
$P_3(3, 6)$ und $P_4(-4, -4)$

Gesucht ist die Gleichung der Geraden in der kartesischen Normalform und in der Achsabschnittsform, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht.

Wie groß ist der Abstand der Geraden zum Koordinatennullpunkt?

Wie lauten die Gleichungen der Parallelen zu der berechneten Geraden, die durch die beiden Punkte P_3 und P_4 gehen?

Wie groß sind die Abstände der Punkte P_3 und P_4 von der berechneten Geraden?

Lösung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{-1-5} = \frac{2}{3}$$

$$c = -m \cdot x_1 + y_1 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + 6 = \frac{8}{3}$$

kartesische Normalform: $y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{3}$

Achsabschnittsform: $\frac{y}{8/3} - \frac{x}{4} = 1$

$$a = -4; \qquad b = \frac{8}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} \qquad \alpha = 0{,}588$$

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

Hesse'sche Normalform:

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$$

Setzt man z.B. den Punkt P_1 ein, erhält man p:

$$p = 2{,}2188$$

Das ergibt die Gleichung:

$$-0{,}5547 \cdot x + 0{,}8320 \cdot y - 2{,}2188 = 0$$

Parallele zur Geraden:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - (2,2188 + d) = 0$$

Einsetzen Punkt P_3 (3,6):

Abstand der Geraden: $d = 1,1094$

Gleichung durch P_3:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - 3,3282 = 0$$

Gleichung durch P_4:

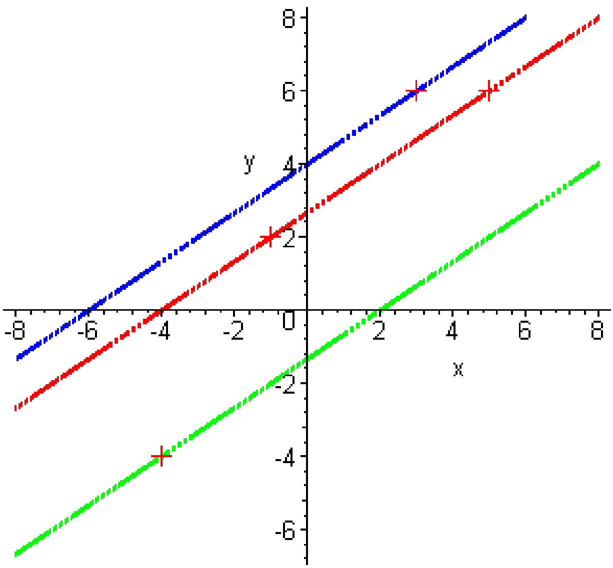
$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y - 2,2188 - d = 0$$

Einsetzen des Punkts P_4 (-4,-4):

Abstand von der Geraden: $d = -3,3282$

Gleichung durch P_4:

$$-0,5547 \cdot x + 0,8320 \cdot y + 1,1094 = 0$$



Folgerungen:

- Das positive Vorzeichen für p ist folgendermaßen zu interpretieren;
  p ist dann positiv, wenn der Richtungsvektor der Geraden $\vec{e}_G$ mit dem Vektor der Normalen (Vektor mit der Länge p vom Nullpunkt zur Geraden) $\vec{n}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bildet.
  Ist p negativ, dann bildet $\vec{e}_G$ mit $\vec{n}$ ein Linkssystem.
  Der Nullpunkt liegt in der negativen Halbebene.
- Ist der Abstand d der Parallelen zur gegebenen Geraden positiv, dann ist der Abstand zum Nullpunkt größer als der der gegebenen Geraden.
- Ist d negativ, dann verkleinert sich der Abstand zum Nullpunkt gegenüber der gegebenen Gerade.

6.6 Die allgemeine Form der Geradengleichung

Die allgemeinste Form der Geradengleichung lautet:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Daraus lassen sich alle der bisher besprochenen Formen gewinnen.

- Division durch B und Auflösung nach y ergibt:
  $$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$$
  Somit ist die Steigung der Geraden:
  $$m = \tan \alpha = -\frac{A}{B}$$

und der Achsabschnitt auf der y – Achse

$$c = -\frac{C}{B}$$

- Die Achsabschnittsgleichung erhält man durch Division durch – C:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

mit $a = -\frac{C}{A}$ $\quad b = -\frac{C}{B}$

- Dividiert man die allgemeine Gleichung durch

$$\sqrt{A^2 + B^2}$$

erhält man

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Quadriert und addiert man die beiden Koeffizienten bei x und y, dann ergibt sich 1; man kann also den Koeffizienten bei x als $\cos\varphi$ eines Winkels und den Koeffizient bei y als $\sin\varphi$ interpretieren. Dies entspricht der Hesse’schen Normalform mit

$$p = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6.7 Schnittpunkt zweier Geraden, die Winkelhalbierende

Der Schnittpunkt zweier Geraden ist ein Punkt, der beiden geraden gemeinsam ist und für den beide Geradengleichungen gelten müssen. Hat man also zwei Gleichungen der allgemeinen Form, dann sucht man die Werte von x und y, die beiden Gleichungen gemeinsam sind, also die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = c_1$$
$$b_1 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$$

Es gibt zahlreiche Methoden, solch ein Gleichungssystem zu lösen, z.B. die Cramer'sche Regel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Im Zähler und im Nenner stehen jeweils zwei Determinanten:
Die Nennerdeterminante besteht aus den Koeffizienten der linken Seite des Gleichungssystems, in der Zählerdeterminante ist die Spalte, in der die Unbekannte steht, durch die rechte Seite ersetzt.

Beispiel:

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2 \cdot x - 5 \cdot y = 8$$
$$-4 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

Die Nennerdeterminante lautet:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14$$

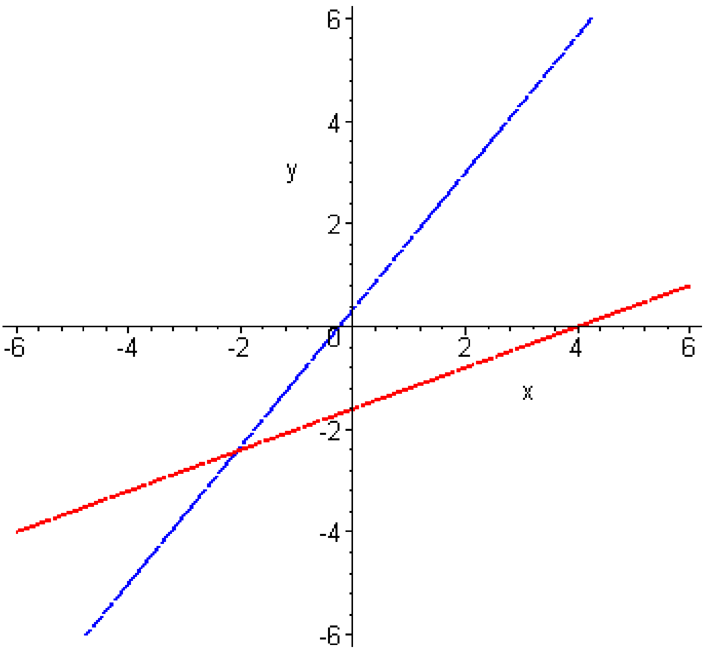
Die Zählerdeterminante für die x – Werte:

$$\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 29$$

Die Zählerdeterminante für die y – Werte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 34$$

Dies ergibt den Schnittpunkt $x = -\frac{29}{14}$ $\qquad y = -\frac{34}{14}$



Der Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden lässt sich einfach aus der kartesischen Normalform berechnen, da diese direkt den Steigungswinkel der Geraden enthält:

$$y = m_1 \cdot x + c_1 = \tan\alpha_1 \cdot x + c_1$$
$$y = m_2 \cdot x + c_2 = \tan\alpha_2 \cdot x + c_2$$

Der Schnittwinkel ist die Differenz der beiden Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$. Aus einer Tabelle der Additionstheoreme entnimmt man

$$\tan\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Im vorigen Beispiel ist $m_1 = 0{,}4$ und $m_2 = 4/3$. Der Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden ist somit:

$$\tan\varphi = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{20-6}{15}}{\frac{23}{15}} = \frac{14}{23}$$

$$\widehat{\varphi} = 0{,}5468 \pm k \cdot \pi \qquad \varphi = 31{,}33° \pm k \cdot 180°$$

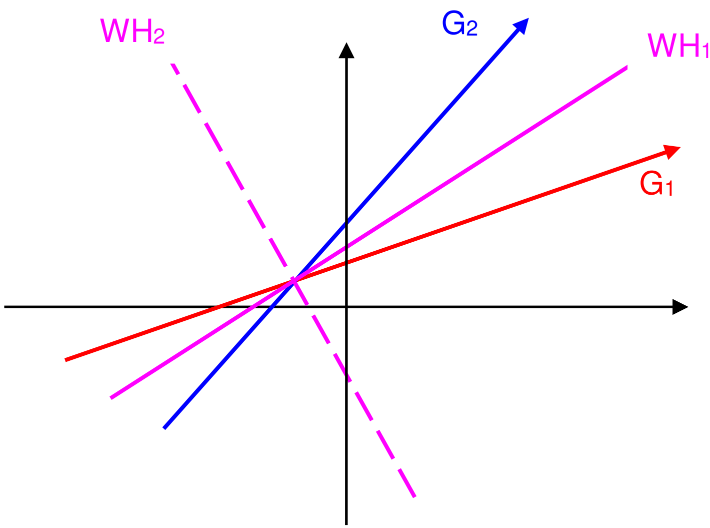
Vertauscht man die Reihenfolge und bildet $\alpha_1 - \alpha_2$, dann erhält man den stumpfen Winkel

$$\pi - \widehat{\varphi} = 2{,}5948 \qquad 180 - \varphi = 148{,}67°$$

Aus obiger Beziehung erhält man auch die Bedingung dafür, dass zwei Gerade sich unter dem Winkel von 90° schneiden. In diesem Fall geht der Tangens gegen unendlich, d.h. der Nenner gegen null. Es muss also sein: $1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden an jeder Stelle den gleichen Abstand haben.

Damit bietet es sich an, die Hesse'sche Normalform der beiden Geraden heranzuziehen und zum Abstand p der beiden Geraden jeweils einen zusätzlichen Ab-



stand d hinzuzuzählen, der für beide gerade gleich sein muss. Dafür gibt es allerdings zwei Möglichkeiten:

Wie im vorigen Absatz dargelegt, ist ein Abstand dann positiv, wenn er in Richtung der positiven Halbebene der Gerade geht. Zählt man zu den beiden gezeichneten gerichteten Geraden einen positiven Abstand d hinzu, dann berechnet man die Winkelhalbierende WH_2. Genau so erhält man WH_2, wenn man jeweils bei beiden Geraden einen Abstand d abzieht Will man die Winkelhalbierende WH_1, dann muss man bei einer Geraden d addieren und bei der anderen d abziehen.

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - \left(p + d\right) = 0$$

$$d = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p$$

Die beiden Abstände sind gleich:

$$x \cdot \cos\varphi_1 + y \cdot \sin\varphi_1 - p_1 = x \cdot \cos\varphi_2 + y \cdot \sin\varphi_2 - p_2$$

Gleichung der Winkelhalbierenden WH_2:

$$x \cdot \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right) + y \cdot \left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) - \left(p_1 - p_2\right) = 0$$

Falls d_2 gleich $-d_1$ gesetzt wird:

Gleichung der Winkelhalbierenden WH_1:

$$x \cdot \left(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + y \cdot \left(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\right) - \left(p_1 + p_2\right) = 0$$

Beispiel:

Zu den beiden Geraden des vorigen Beispiels sollen die Winkelhalbierenden gesucht werden:

$$1.) \qquad 2 \cdot x - 5 \cdot y = 8$$

$$2.) \qquad -4 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

Lösung:

Hesse’sche Normalform

Gleichung 1: $$\frac{2}{\sqrt{4+25}} \cdot x - \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot y - \frac{8}{\sqrt{29}} = 0$$

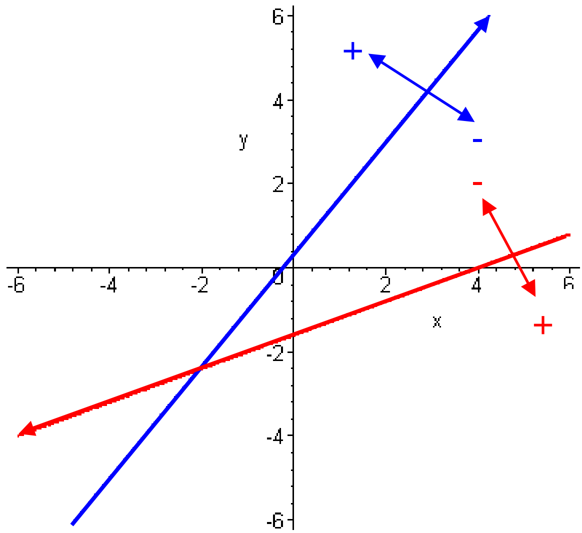
$$\cos\varphi_1 = 0,3714 \qquad \sin\varphi_1 = -0,9285 \qquad p_1 = 1,4856$$

Gleichung 2:

$$-\frac{4}{\sqrt{25}}\cdot x+\frac{3}{5}\cdot y-\frac{1}{5}=0$$

$$\cos\left(\varphi_2\right)=-0{,}8 \qquad \sin\left(\varphi_2\right)=0{,}6 \qquad p_2=\frac{1}{5}$$

Die Orientierung der Geraden wird dadurch bestimmt, dass in die Hesse'sche Normalform der Geradengleichungen jeweils ein Punkt zu beiden Seiten der Geraden eingesetzt wird. Ergibt sich ein positiver Wert, befindet man sich auf der positiven Seite der Geraden.



Probeweises Einsetzen des Punkts (-2, 2) ergibt die skizzierte Orientierung.

Verwendet man die erste Form der Hesse'schen Normalform, d.h. rechnet man mit gleichen Abständen, dann geht die Winkelhalbierende durch den kleineren der beiden Winkel.

$\underline{d_1 = d_2}$:

$$x \cdot (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) + y \cdot (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) - (p_1 - p_2) = 0$$

$$x \cdot (0{,}37130 + 0{,}8) + y \cdot (-0{,}92848 - 0{,}6) - (p_1 - p_2) = 0$$

Winkelhalbierende 1:

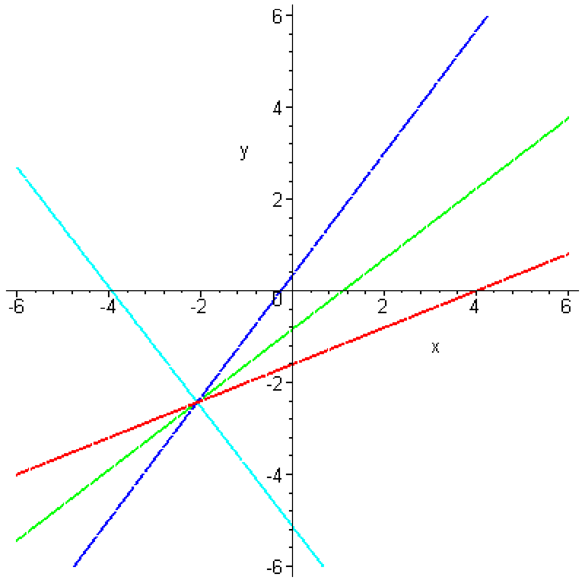
$$1{,}1714 \cdot x - 1{,}5285 \cdot y - 1{,}285 = 0$$

$\underline{d_1 = -d_2}$:

$$x \cdot (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + y \cdot (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) - (p_1 + p_2) = 0$$

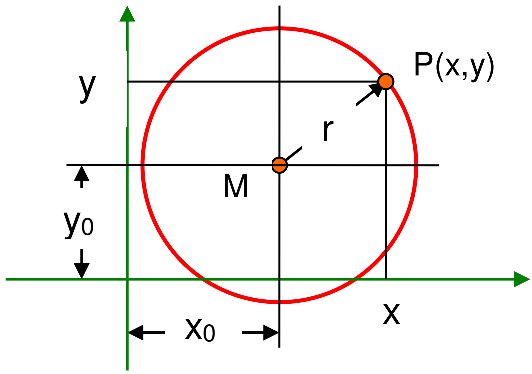
Winkelhalbierende 2:

$$-0{,}4286 \cdot x - 0{,}3285 \cdot y - 1{,}6855 = 0$$



6.8 Der Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt M (x_0, y_0) den gleichen Abstand r haben.



Damit lautet die Kreisgleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Für den Spezialfall, dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt, also $x_0 = y_0 = 0$ ist, gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Liegt der Mittelpunkt auf einer der Koordinatenachsen, z.B. der x – Achse, dann ist $y_0 = 0$.

Löst man die Kreisgleichung nach y auf, erkennt man, dass die Funktion nicht eindeutig ist. Gibt man einen bestimmten x – Wert von, erhält man zwei y – Werte:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0$$

da ein oberer und ein unterer Kurvenzweig existiert.

Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden:

Soll ein Kreis mit einer Geraden zum Schnitt gebracht werden, muss x und y aus den beiden Gleichungen

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$y=m\cdot x+c$$

bestimmt werden. Dies führt immer auf eine quadratische Gleichung in x (oder y), aus der

- zwei reelle Lösungen oder
- eine reelle Lösung oder
- keine reelle Lösung

hervorgeht.

Beispiel:

Wie ist die Größe c zu wählen, damit die Gerade

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+c$$

den Kreis: $(x-3)^2+y^2=16$

- in zwei Punkten schneidet?
- gerade berührt?
- passiert?

Lösung:

$$x^2-6\cdot x+9+\frac{1}{4}\cdot x^2+x\cdot c+c^2-16=0$$

$$\frac{5}{4}\cdot x^2+(c-6)\cdot x+c^2-7=0$$

Dies ergibt die Schnittpunkte:

$$x_{1,2} = -\frac{2 \cdot c}{5} + \frac{12}{5} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{71 - 4 \cdot c^2 - 12 \cdot c}}{5}$$

Wenn die Diskriminante unter der Wurzel gleich null ist, ergibt sich nur eine Lösung, d.h. es handelt sich um einen Berührungspunkt:

$$71 - 4 \cdot c^2 - 12 \cdot c = 0$$

- für

  $$c_1 = -\frac{3}{2} + 2 \cdot \sqrt{5} \qquad c_2 = -\frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{5}$$

  $$c_1 = 2{,}9721 \qquad c_2 = -5{,}9721$$

  ergeben sich Berührungspunkte

- Im Bereich -5,9721 < c < 2,9721

  ergeben sich zwei Schnittpunkte.

- Für c < -5,9721 und c > 2,9721

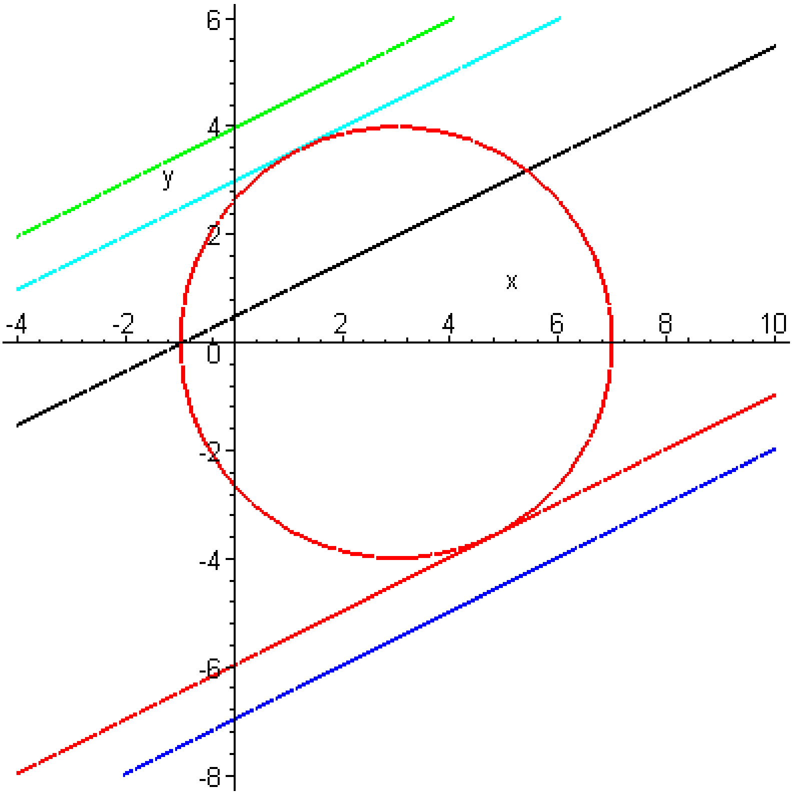
  gibt es keine Schnittpunkte.

Die folgende Graphik zeigt den Kreis und Gerade mit

$$c_1 = -1 + 2 \cdot \sqrt{5} \qquad c_2 = -\frac{3}{2} + 2 \cdot \sqrt{5}$$

$$c_3 = -\frac{5}{2} + 2 \cdot \sqrt{5} \qquad c_4 = -\frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{5}$$

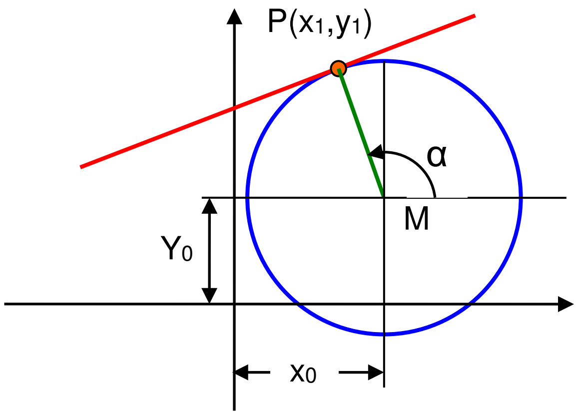
$$c_5 = -2 - 2 \cdot \sqrt{5}$$



Weitere Probleme im Zusammenhang mit Kreis und Gerade sind:

- Berechnung einer Tangente an einen gegebenen Punkt des Kreises
- Berechnung einer Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises.

Tangente an einen gegebenen Punkt eines Kreises.



Zunächst wird die Steigung α der Normalen berechnet.

$$\tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Tangente und Normale stehen aufeinander senkrecht, d.h.

$$\tan\alpha_G = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

Gleichung der Tangente:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

$$y = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot \left(x - x_1\right) + y_1$$

Die Gleichung kann man noch umformen und man erhält die für manche Zwecke praktischere Form:

$$\left(x - x_0\right) \cdot \left(x_1 - x_0\right) + \left(y - y_0\right) \cdot \left(y_1 - y_0\right) = r^2$$

Falls der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt, vereinfacht sich die Gleichung:

$$y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot \left(x - x_1\right) + y_1$$

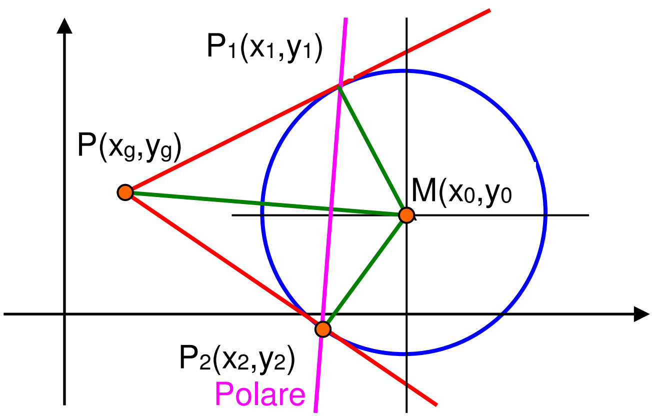
$$y \cdot y_1 = -x \cdot x_1 + x_1^2 + y_1^2$$

Da der Punkt P auf dem Kreis liegt, gilt: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Gleichung der Tangente:

$$y \cdot y_1 + x \cdot x_1 = r^2$$

<u>Gleichung der Tangente von einem außerhalb gelegenen Punkt:</u>



Angenommen, die Berührungspunkte seien bekannt, dann kann man die Geradengleichungen durch diese Punkte nach obiger Formel angeben:

$$(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_1 - y_0) = r^2$$
$$(x - x_0) \cdot (x_2 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_2 - y_0) = r^2$$

Beide Geraden müssen durch den Punkt P(x_g,y_g) gehen

$$(x_g - x_0) \cdot (x_1 - x_0) + (y_g - y_0) \cdot (y_1 - y_0) = r^2$$
$$(x_g - x_0) \cdot (x_2 - x_0) + (y_g - y_0) \cdot (y_2 - y_0) = r^2$$

Diese beiden Gleichungen kann man nun allerdings auffassen, als hätte man in eine Geradengleichung für x und y die beiden Punkte $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ eingesetzt. Ersetzt man x_1 und y_1 durch x und y, erhält man die Gleichung der sog. Polaren:

$$(x_g - x_0) \cdot (x - x_0) + (y_g - y_0) \cdot (y - y_0) = r^2$$

Bringt man diese Gerade mit dem Kreis zum Schnitt, kann man die beiden Berührungspunkte berechnen und mit der Zweipunkteformel die Gleichungen der Tangenten berechnen.

Beispiel:

Vom Punkt P(-4,-3) aus sollen die beiden Tangenten an den Kreis

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

berechnet werden.

Lösung:

Aus der Kreisgleichung liest man ab:

$$x_0 = 3; \qquad y_0 = 2$$

Mit $x_g = -4;\ y_g = -3;$ erhält man die Gleichung der Polaren:

$$(-4-3)\cdot(x-3)+(-3-2)\cdot(y-2)=4$$
$$-7\cdot x+21-5\cdot y+10=4$$
$$7\cdot x+5\cdot y=27$$

Eingesetzt in die Kreisgleichung ergeben sich die beiden Lösungen:

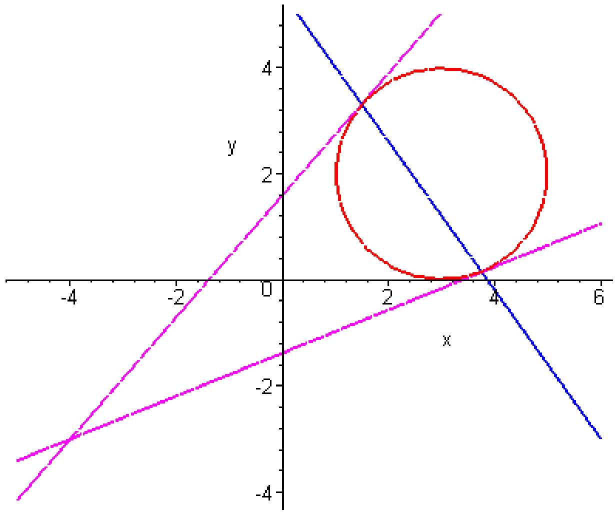
$$P_1=(1,491;3,3126) \qquad P_2=(3,7522;0,14686)$$

Die Tangenten durch die Punkte P_1 und P_2 lauten somit:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_g-y_1}{x_g-x_1}$$

T_1: $\quad y=1,1496\cdot x+1,5985$

T_2: $\quad y=0,4059\cdot x-1,3763$

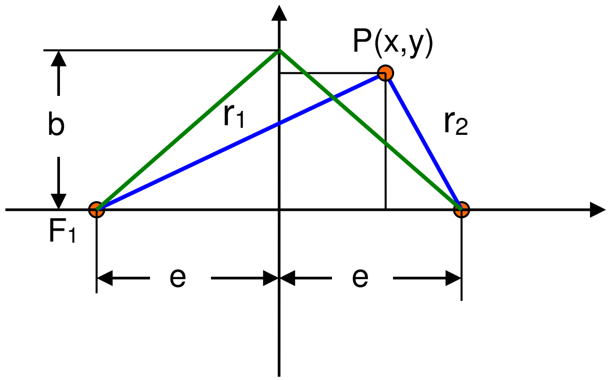


6.9 Die Ellipse

Die Ellipse gehört, wie der Kreis, zu den Kegelschnitten. Sie entsteht dadurch, dass man einen geraden Kreiskegel schräg anschneidet. Sie lässt sich jedoch auch als geometrischer Ort definieren, wobei mehrere Definitionen möglich sind. Die folgende bezeichnet man als „Gärtnerkonstruktion", da sie sehr einfach mit einer Schnur ausgeführt werden kann:

Der Kegel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.

Der Einfachheit halber werden die beiden Fixpunkte auf der x – Achse platziert, symmetrisch zur y – Achse im Abstand $2 \cdot e$



Die Summe der beiden Abstände r_1 und r_2 soll konstant sein:

$$r_1 + r_2 = 2 \cdot a$$

Außerdem kann man an den beiden rechtwinkligen Dreiecken ablesen:

$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (e-x)^2 + y^2$$

Falls der Punkt P auf die y – Achse rückt, soll y = b sein; in diesem Fall ist

$$r_1^2 = r_2^2 = a^2 = b^2 + e^2$$

Mit $r_2 = 2 \cdot a - r_1$

Erhält man: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2 \cdot a - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$

Quadrieren auf beiden Seiten ergibt:

$$(x-e)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x+e)^2 + y^2 - 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$4\cdot a\cdot\sqrt{(x+e)^2+y^2}=4\cdot a^2+(x+e)^2-(x-e)^2$$

$$=4\cdot a^2+4\cdot e\cdot x$$

$$a^2\cdot\left((x+e)^2+y^2\right)=a^4+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+e^2\cdot x^2$$

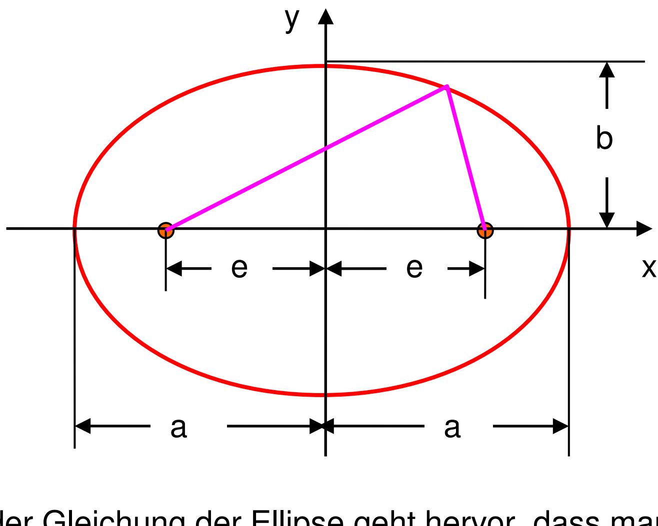
$$a^2x^2+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+a^2\cdot e^2+a^2\cdot y^2=a^4+2\cdot a^2\cdot e\cdot x+e^2\cdot x^2$$

$$a^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-e^2\cdot x^2=a^4-a^2\cdot e^2=a^2\cdot\left(a^2-e^2\right)$$

$$a^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\cdot x^2=a^2\cdot b^2$$

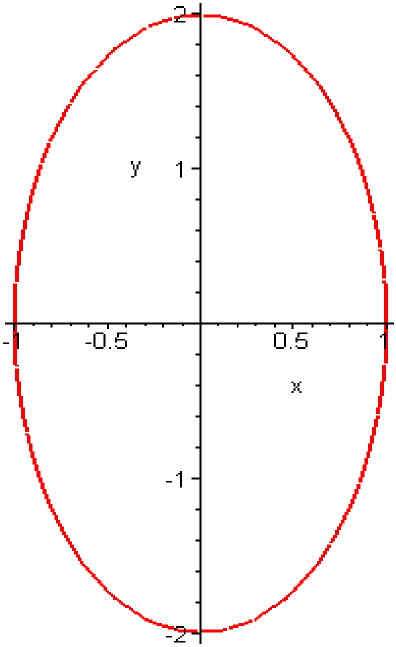
$$a^2\cdot y^2+b^2\cdot x^2=a^2\cdot b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

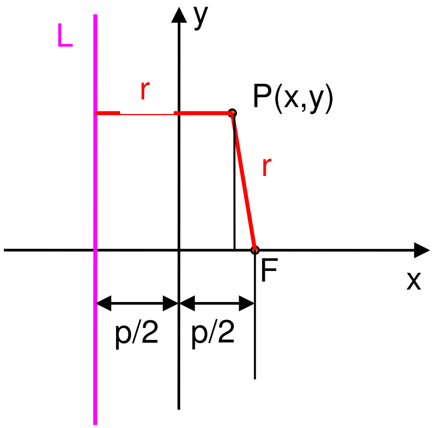


Aus der Gleichung der Ellipse geht hervor, dass man die Ellipse auffassen kann als Kreis, der in einer Richtung gedehnt wurde. Setzt man a = b = R, dann erhält man die Gleichung eines Kreises.

Vertauscht man die beiden Variablen, erhält man eine Ellipse mit der längeren Seite in der y – Richtung. Die beiden Fixpunkte liegen dann auf der y – Achse:



6.10 Die Parabel



Die Parabel ist der geometrische Punkt aller Punkte, deren Abstand von einem gegebenen Punkt aus und von einer Geraden (sog. Leitlinie) aus den gleichen Abstand haben.

Um möglichst einfache Verhältnisse zu erhalten, wird die Leitlinie zunächst parallel zur y – Achse gelegt. Dann muss die Parabelkurve durch den Koordinaten-nullpunkt gehen, da auch im Nullpunkt der Abstand 0 - F = 0 – L ist.

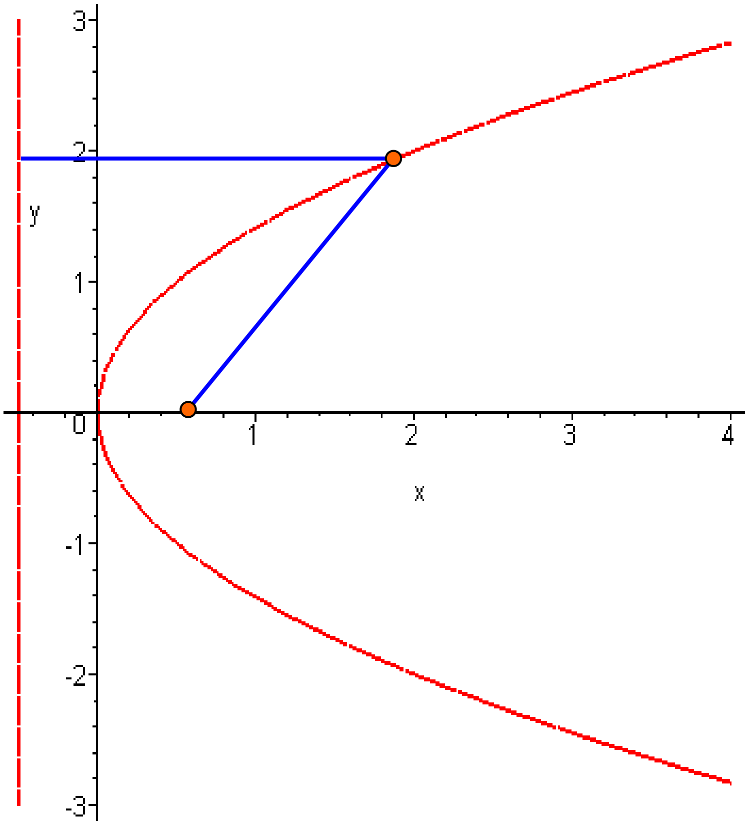
Damit gilt für den Punkt P(x,y):

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \Big|^2$$

$$x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4} = x^2 - p \cdot x + \frac{p^2}{4} + y^2$$

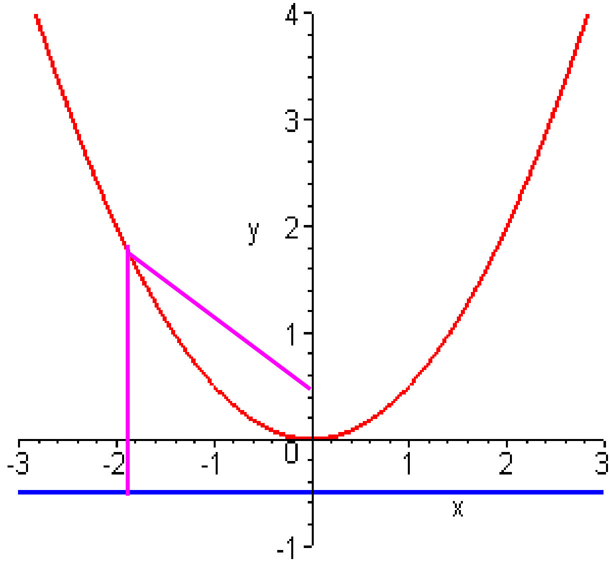
$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

Für p = 1 erhält man damit folgenden Graphen:



Die Parabelfunktion in der errechneten Art ist nicht eindeutig. Zu einem gewählten x – Wert gehören zwei y – Werte. Löst man die Parabelgleichung nach y auf, erhält man zwei Kurvenzweige. Man kann den Graphen um 90° drehen, wenn man in der Parabelgleichung x und y vertauscht. Der Abstand der Leitlinie vom Fixpunkt soll dabei erhalten bleiben:

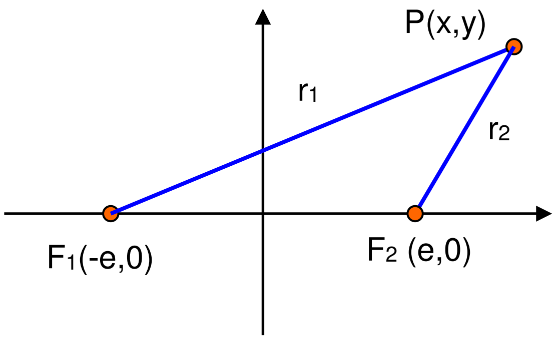
$$y = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot x^2$$



Der Fixpunkt F der Parabel heißt auch „Brennpunkt“. Parallel einfallende Lichtstrahlen oder andere elektromagnetische Wellen werden auf den Brennpunkt fokussiert. Eine im Brennpunkt angeordnete Lampe sendet paralleles Licht aus. Aus diesem Grund werden Antennen für elektromagnetische Strahlung mit einem sog. Parabolspiegel versehen, um Licht- und andere elektromagnetische Strahlung gerichtet auszusenden oder auf eine Stelle zu konzentrieren.

6.11 Die Hyperbel

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten die konstante Differenz 2·a haben.



Zunächst wird angenommen, dass die beiden Fixpunkte F_1 und F_2 symmetrisch zur y – Achse liegen.

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$r_1 - r_2 = 2 \cdot a \qquad r_1 = 2 \cdot a + r_2$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2 \cdot a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad \Big|^2$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4 \cdot a^2 + (x-e)^2 + y^2 + 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$4 \cdot e \cdot x - 4 \cdot a^2 = 4 \cdot a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$e^2 \cdot x^2 - 2 \cdot e \cdot x \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot e \cdot x + e^2 + y^2\right)$$

Auch bei der Hyperbel kann man eine Beziehung analog zur Ellipse aufstellen:

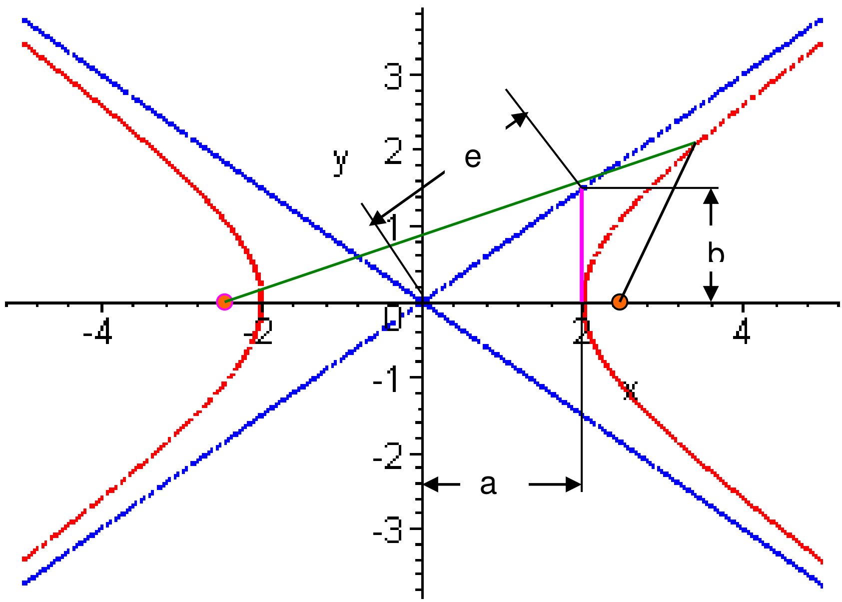
$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 \cdot \left(e^2 - a^2\right) - y^2 \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot e^2 = a^2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)$$

$$x^2 \cdot b^2 - y^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für a = 2; b = 1,5 ergibt sich folgender Graph



Die blau gezeichneten Linien sind die sog. Asymptoten der Hyperbel. Deren Bedeutung sieht man nach folgender Umformung der Hyperbelgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \qquad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}}$$

Wenn x sehr groß wird (positiv oder negativ), dann geht der zweite Ausdruck unter der Wurzel gegen null und es bleibt:

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}$$

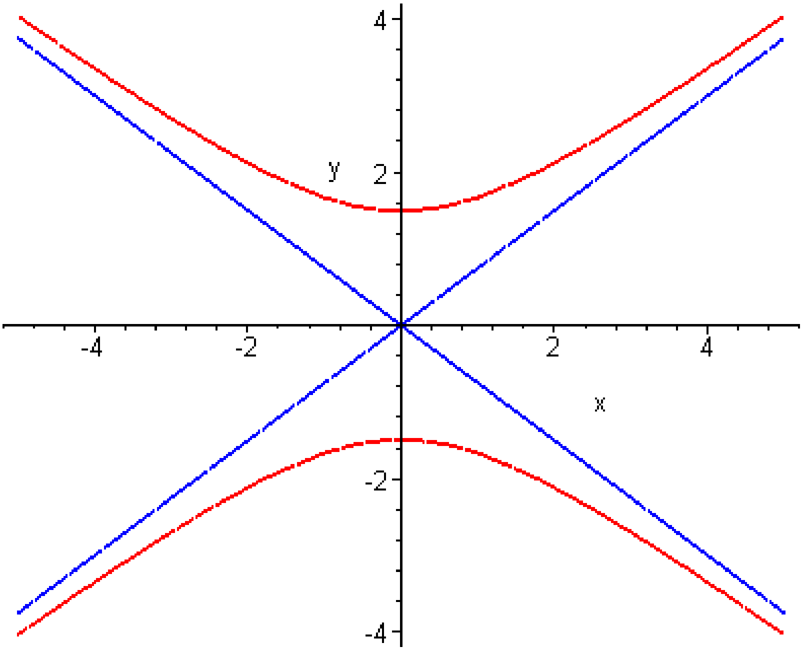
Dies sind die beiden blau gezeichneten Geraden. Gegen diese Geraden strebt die Hyperbelkurve für große x.

Für y = 0 ist x = ± a. Zeichnet man von diesem Punkt ausgehend ein rechtwinkliges Dreieck, erkennt man, dass die Beziehung

$$e^2 = a^2 + b^2$$

erfüllt ist, wenn e die Hypotenuse des Dreiecks und b die zweite Kathete ist. Das Verhältnis $\frac{b}{a}$ ist gleichzeitig die Steigung der beiden Asymptoten.

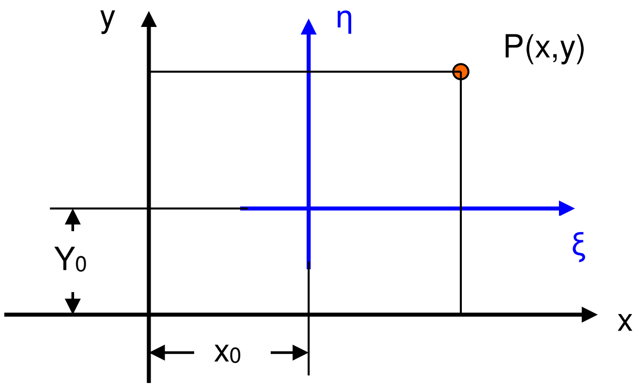
Vertauscht man die beiden Variablen x und y, dann erhält man Hyperbeln, die um 90° gedreht sind, Die Fixpunkte liegen dann auf der y – Achse.



6.12 Koordinatentransformationen

Häufig erhält man als geometrischen Ort Kegelschnitte, die verschoben oder gedreht sind und deshalb eine komplizierte Gleichung liefern und nicht erkennbar ist, um welchen Kegelschnitt es sich handelt. Wenn es gelingt, den Graphen des Kegelschnitts oder das Koordinatensystem so zu verschieben oder zu drehen, dass die Normalform erscheint, erhält man eine wesentlich einfachere Gleichung. Diesen Vorgang nennt man Koordinatentransformation.

a) Parallelverschiebung des Koordinatensystems



Um den Punkt P(x,y) in den neuen Koordinaten darzustellen, muss man x und y ersetzen durch:

$$x = \xi + x_0 \qquad y = \eta + y_0$$

oder: $$\xi = x - x_0 \qquad \eta = y - y_0$$

Man kann die Transformationsvorschrift auch so interpretieren:

Tritt x und y immer in der Kombination

$$(x - x_0), \quad (y - y_0)$$

auf, dann ist ein Graph in Richtung der positiven Achsen verschoben. Man hat also neues Koordinatensystem einzuführen, das nach rechts und nach oben verschoben ist, um z.B. einen Kegelschnitt in die Normalform (in diesem Fall ohne x_0 und y_0) zu überführen-

Beispiel:

Bei der Funktion $2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 4 = 0$

handelt es sich um einen Kegelschnitt. Gesucht ist die Gleichung in Normalform.

$$2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 4 = 0$$

$$2 \cdot \left(x^2 - 3 \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(y^2 + 2 \cdot y + 1 \right) - 4 \cdot 1 = 4$$

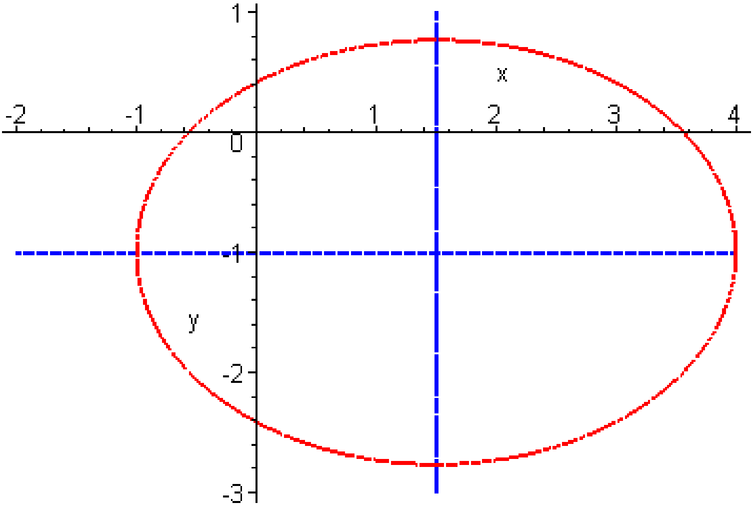
$$2 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + 4 \cdot (y+1)^2 = 4 + \frac{9}{2} + 4 = \frac{25}{2}$$

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2} \right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{8}} = 1$$

Es handelt sich um eine Ellipse, die um $\frac{3}{2}$ nach rechts und um 1 nach unten verschoben ist, mit den Halbachsen $a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}}$. Macht man die Substitutionen: $\qquad x - \frac{3}{2} = \xi \qquad y + 1 = \eta$

Dann erhält man die Ellipsengleichung in der Normalform:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}}\right)^2} = 1$$



Im vorliegenden Fall wurden die Transformationsgleichungen durch quadratische Ergänzung gefunden. Falls diese nicht erkannt werden, kann man allgemein die Substitution $x = \xi + x_0 \qquad y = \eta + y_0$ vornehmen und x_0 und y_0 so bestimmen, dass in der Gleichung die linearen Glieder der Variablen verschwinden und ξ und η nur noch quadratisch vorkommen.

Obiges Beispiel:

$$2 \cdot (\xi + x_0)^2 - 6 \cdot (\xi + x_0) + 4 \cdot (\eta + y_0)^2 + 8 \cdot (\eta + y_0) - 4 = 0$$

$$2 \cdot \xi^2 + 4 \cdot \xi \cdot x_0 + 2 \cdot x_0^2 - 6 \cdot \xi - 6 \cdot x_0 + 4 \cdot \eta^2 + 8 \cdot \eta \cdot y_0 + 4 \cdot y_0^2$$
$$+8 \cdot \eta + 8 \cdot y_0 - 4 = 0$$

Alle Koeffizienten bei ξ sollen verschwinden:

$$4 \cdot x_0 - 6 = 0 \qquad x_0 = \frac{3}{2}$$

Koeffizienten bei η:

$$8 \cdot y_0 + 8 = 0 \qquad y_0 = -1$$

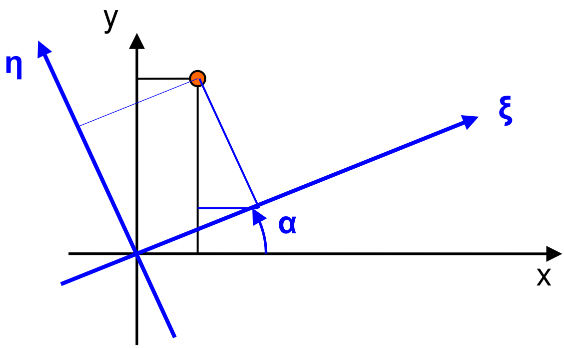
Setzt man diese Werte in obige Gleichung ein, erhält man:

$$2 \cdot \xi^2 + 4 \cdot \eta^2 - \frac{25}{2} = 0$$

Division durch $\frac{25}{2}$ liefert die Normalform.

b) Drehung des Koordinatensystems

Oft ist es notwendig, ein gegenüber dem x – y - System gedrehtes Koordinatensystem einzuführen. Dies ist bei Kegelschnittgleichungen dann notwendig, wenn gemischte Glieder x · y auftreten und man möchte den Kegelschnitt in Normalform darstellen. Aus der Figur kann man folgende Transformationsgleichungen ablesen:



$$x = \xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha$$

$$y = \xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha$$

Dabei kann man den Winkel α so bestimmen, dass die gemischten Glieder $\xi \cdot \eta$ herausfallen.

Beispiel:

Gesucht ist die Normalform des Kegelschnitts:

$$2 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y - x^2 - 17 = 0$$

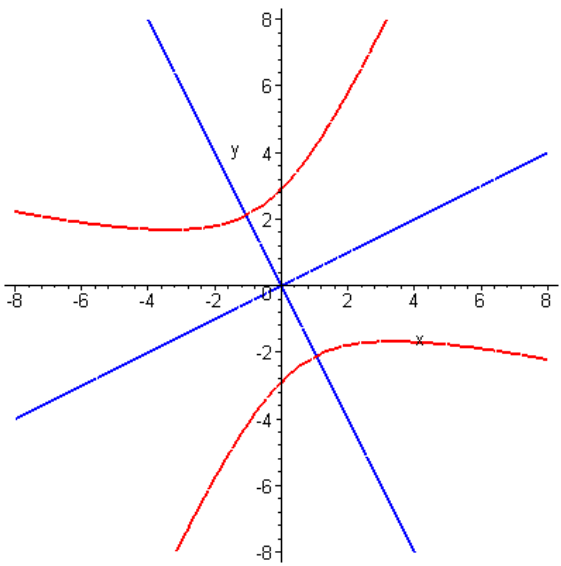
Die obigen Transformationsgleichungen werden ein-gesetzt:

$$2 \cdot \left(\xi^2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \eta^2 \cdot \cos^2\alpha\right)$$
$$-4 \cdot \left(\xi \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\xi \cdot \sin\alpha + \eta \cdot \cos\alpha\right)$$
$$-\left(\xi^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \eta^2 \cdot \sin^2\alpha\right) - 17 = 0$$

$$\xi^2 \cdot \left(2 \cdot \sin^2 \alpha - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha\right) +$$
$$+\eta^2 \cdot \left(2 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha\right) +$$
$$\xi \cdot \eta \cdot \left(6 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin^2 \alpha\right)$$
$$-17 = 0$$

Der Term bei $\xi \cdot \eta$ soll null werden:

$$4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cdot \cos^2 \alpha + 4 \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$
$$3 \cdot \sin(2\alpha) - 4 \cdot \cos(2\alpha) = 0$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{4}{3} \qquad 2 \cdot \alpha = \arctan \frac{4}{3} \pm k \cdot \pi$$
$$\alpha = 0,5 \cdot \arctan \frac{4}{3} \pm k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \widehat{\alpha} = 0,4636 \pm \frac{\pi}{2}$$
$$\alpha^\circ = 26,57^\circ \pm 90^\circ$$



6.13 Die allgemeine Kegelschnittgleichung

Jede quadratische Funktion der Form:

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x \cdot y + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

ist ein Kegelschnitt, falls er sich durch eine Parallelverschiebung oder durch eine Drehung des Koordinatensystems in eine der Normalformen bringen lässt. Dies ist immer möglich, falls es sich nicht um einen entarteten Kegelschnitt handelt, d.h. falls die Gleichung für keine Wertekombination gültig ist.

Fehlt eines der quadratischen Glieder, handelt es sich um eine Parabel. Fehlt das gemischte Glied und sind die Faktoren von den quadratischen Gliedern gleich, handelt es sich um einen Kreis, sonst um eine Ellipse oder Hyperbel.

7 Funktionen

7.1 Funktionsbegriff

Im Kapitel Analytische Geometrie wurde behandelt, wie man durch Gleichungen Beziehungen zwischen Punkten herstellen kann, die durch eine verbale Festlegung einer bestimmten Menge zugeordnet wurden:

„Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, für die gilt:……“

Ein Punkt ist ein Zahlenpaar, bei dem als erstes Element eine Zahl auf der x – Achse angegeben wird; das zweite Element ist die zugehörige Zahl auf der y – Achse, wobei diese mit Hilfe der Gleichung aus der ersten Zahl berechnet werden kann. Auch der umgekehrte Weg ist möglich: Man gibt eine Zahl auf der y – Achse vor und berechnet daraus den zugehörigen x – Wert.

Diese Vorgehensweise wird in der Mathematik verallgemeinert zum Begriff der Abbildung und der Funktion:

Eine Abbildung ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge von Dingen **M** zu denen einer anderen Menge **N**. Dabei ist zunächst nicht gefordert, dass die Abbildung eindeutig ist, d.h. dass zu jedem Element aus **M** nur ein Element aus **N** gehört. Deshalb schränkt man ein:

Eine Funktion ist eine Vorschrift, den Elementen einer Menge **M** die Elemente einer Menge **N** eindeutig zuzuordnen. Die Zuordnung soll eindeutig sein, d.h. zu einem Element der ersten Menge gehört nur ein ganz bestimmtes Element der zweiten Menge. Dabei ist der Funktionsbegriff keineswegs auf Zahlen beschränkt. Im folgenden sollen allerdings nur Mengen von Zahlen betrachtet werden.

Das Ergebnis einer Funktionsvorschrift ist also ein Zahlenpaar (x,y), wobei allerdings, abweichend von der geometrischen Deutung, unterschieden wird zwischen der Menge der Zahlen x, die als vorgegeben betrachtet wird und aus der über die Funktionsvorschrift die Zahl der Abbildungsmenge erst berechnet wird. Aus x wird also y berechnet: man nennt deshalb x die unabhängige Variable, y die abhängige Variable. Bei der geometrischen Deutung des Koordinatenpaares waren beide Zahlen völlig gleichberechtigt. Trotzdem kann man das aus der Funktionsvorschrift ermittelte Zahlenpaar wieder wie bei geometrischen Fragestellungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen, ohne Anspruch auf eine geometrische Deutung, und kann den daraus entstehenden Graphen als optische Veranschaulichung des Zusammenhangs der beiden Mengen auffassen. Dieses Verfahren ist vor allem auch deshalb gerechtfertigt, weil viele technische und betriebswirtschaftliche Zusammenhänge auf Funktionen führen, die geometrischen Figuren entsprechen:

Beispiele: Mohr’scher Spannungskreis (Kreis)

Hooke’sches Gesetz (Gerade)

Wärmeausdehnungsgesetz (Gerade)

Strömungswiderstand (Parabel)

Zusammenhang Dämpfungskraft - Federkraft (Ellipse)

Zusammenhang Druck – Volumen bei einem Gas bei einer isothermen Zustandsänderung (Hyperbel)

Für Funktionen haben sich folgende Ausdrucksweisen eingebürgert:

- Man nennt die Ausgangsmenge **M** das Urbild oder die Definitionsmenge, die Menge **N** das Abbild oder den Wertebereich.

- Wie bereits erwähnt, bezeichnet man die Elemente der Menge **M** mit dem Buchstaben x, die Elemente der Menge **N** mit dem Buchstaben y. Bei technischen Anwendungen treten an deren Stelle die Bezeichnungen der technischen Variablen, wie σ und τ für die Spannungen, θ für die Temperatur usw.

- Um den funktionalen Zusammenhang darzustellen, schreibt man abgekürzt meist

  $$y = f(x)$$

  wobei x ein Element der Ausgangsmenge ist, f die Abbildungsvorschrift symbolisiert (also i.a. eine Rechenvorschrift) und y das Bildelement oder Ergebnis der Abbildung.
  Eine etwas ausführlichere Darstellung ist

  $$x \rightarrow y = f(x)$$

  oder: $f := x \rightarrow$ Rechenvorschrift

  Beispiele: $y = x^2 - 2 \cdot x - 17$

  $$s = f\left(t\right) = 3.5 \cdot e^{-0,25 \cdot t} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi_0\right)$$

  $$R = f(T) = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$$

- Vertauscht man in einer Funktionsvorschrift die beiden Variablen, z.B. in

$$y = f(x) = 0{,}5 \cdot x^2$$

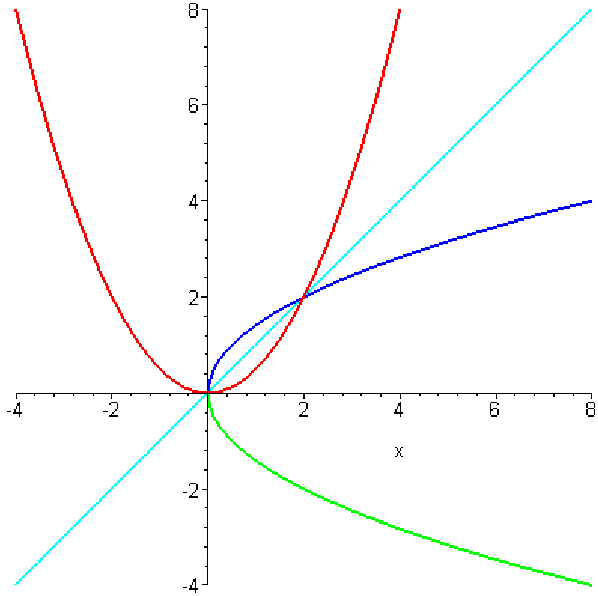
x und y , dann entsteht die Umkehrfunktion zu f(x).

Man schreibt dafür:

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{0{,}5}}$$

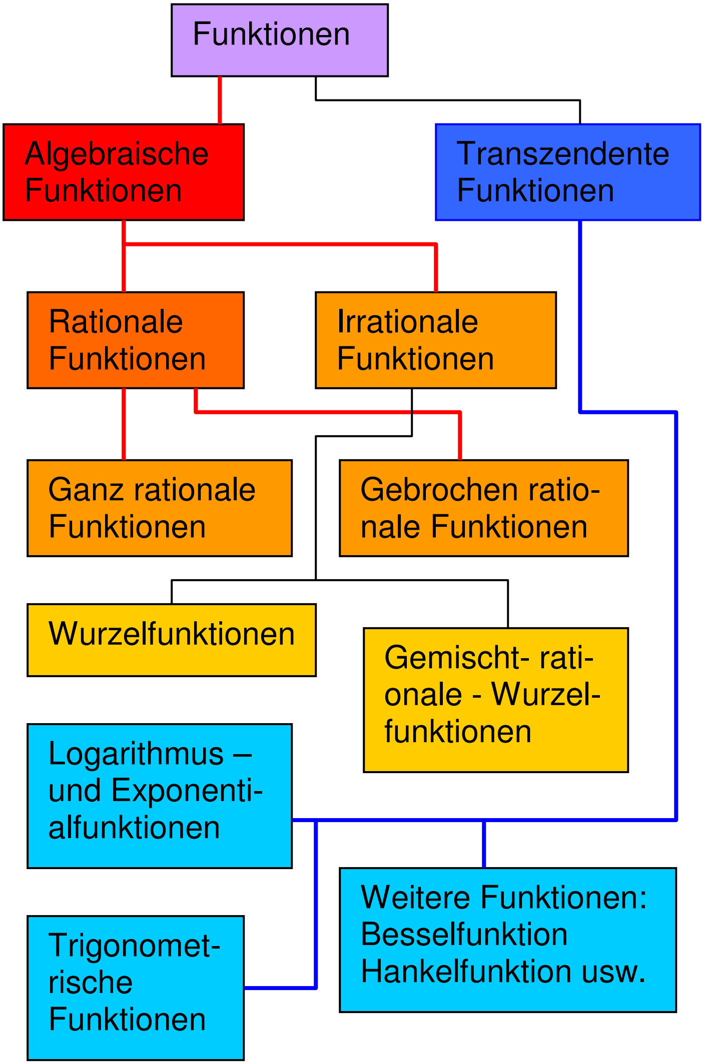
In der graphischen Abbildung bedeutet dies eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der Geraden y = x. Man hat dabei zu beachten, dass die eindeutige Umkehrung i.a. nicht möglich ist. Das bedeutet, man muss sich auf Teile der Funktion beschränken, die eine eindeutige Abbildung erlauben. Im obigen Beispiel entstehen in der Graphik zwei Kurvenzweige:

$$y = +\sqrt{\frac{x}{0{,}5}} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{\frac{x}{0{,}5}}$$



7.2 Funktionsarten

Die Funktionen lassen sich in folgende Kategorien einteilen:



- Algebraische Funktionen sind solche, in denen nur algebraische Verknüpfungen Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Wurzelziehen vorkommen.
- Ganzrationale Funktionen sind im wesentlichen Polynome, also Funktionen ohne Division und Wurzelziehen.
- In gebrochen rationalen Funktionen kommen auch Brüche von Polynomen vor
- Irrationale Funktionen enthalten neben Polynomen und Polynombrüchen auch Wurzeln
- Transzendente Funktionen enthalten alle höheren Rechenoperationen, wie Potenzieren, Logarithmieren, aber auch trigonometrische Funktionen. Daneben gibt es Funktionen, die in der Ingenieurmathematik seltener vorkommen und die meist mit Hilfe von Reihen oder sog. Differentialgleichungen definiert werden.

7.3 Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind Polynome. Ihre Koeffizienten sind in den meisten Anwendungen reell.

$$y = P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Einzelne der Koeffizienten können auch null sein. Ist die höchste Potenz die Potenz n, dann spricht man von einem Polynom n. Ordnung oder n. Grades. Polynome haben folgende Eigenschaften:

- Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein Polynom n. Grades n Nullstellen, die auch teilweise zusammenfallen können (mehrfache Nullstellen) und komplex sein können.

- Hat ein Polynom nur reelle Koeffizienten, dann treten komplexe Nullstellen immer paarweise auf und sind paarweise zueinander konjugiert komplex. Ein Polynom, dessen höchste Potenz ungerade ist, hat deshalb immer mindestens eine reelle Nullstelle.
- Mit dem Hilfsmittel der Differenzialrechnung lässt sich nachweisen, dass ein Polynom n. Grades mit reellen Koeffizienten maximal n – 1 Maxima oder Minima und maximal n – 2 Wendepunkte hat.
- Ein Polynom n. Grades hat n + 1 Koeffizienten. Durch eine passende Wahl dieser Koeffizienten lassen sich Polynome an nahezu alle Kurvenverläufe anpassen, so dass man auch experimentell gewonnene Daten mit Hilfe von Polynomen formelmäßig darstellen kann. Außerdem kann man komplizierte Funktionen durch Polynome oft einfacher darstellen und handhaben.

<u>Hornerschema:</u>

Eine besonders häufige Aufgabe ist die Berechnung von Funktionswerten eines Polynoms. Setzt man nun x – Werte in das Polynom ein, dann entstehen bei den hohen Potenzen sehr schnell sehr große Zahlen und beim Addieren der folgenden Glieder entstehen Rundungsfehler. Es ist deshalb besser, das Potenzieren zu vermeiden und folgende Umformung vorzunehmen:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \\ &= \Bigl(\Bigl(\bigl(\bigl(a_n \cdot x + a_{n-1}\bigr) \cdot x + a_{n-2}\bigr) \cdot x + a_{n-3}\Bigr) \ldots\Bigr) \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Diese Rechnung lässt sich auch in einer Tabelle ausführen

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_0
X_0		$a_n \cdot x_0$	1. Klammer· x	
	a_n	$(a_n \cdot x_0 + a_{n-1})$	1.Klammer·x+a_{n-2}	Ergebnis

1. Klammer

Diese Tabelle nennt man das Hornerschema.

Beispiel:

Der Wert des Polynoms

$$P(x) = x^5 - 2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + x - 12$$

an der Stelle x = -2 soll berechnet werden:

	1	-2	+5	-7	1	-12
-2		-2	8	-26	66	-134
	1	-4	13	--33	67	-146

Die Berechnung erfolgt in folgenden Schritten:

- Der erste Koeffizient wird in die letzte Zeile übernommen.
- Der Wert in der letzten Zeile wird mit x_0 multipliziert und das Ergebnis in die zweite Zeile, nächste Spalte eingetragen
- Der letzte Wert der zweiten Zeile wird zum Wert in der Kopfzeile addiert und in die letzte Zeile eingetragen.

- Die Rechenschritte werden so lange fortgesetzt, bis in der letzten Spalte das Ergebnis erscheint.

Es ist zu beachten, dass in der Tabelle auch die Spalten aufgeführt sein müssen, deren Koeffizient gleich null ist, d.h. wenn eine Potenz fehlt.

Beispiel:

$$P(x) = x^5 - x^3 + 1$$

Gesucht ist der Wert des Polynoms an der Stelle
x = 1,5

	1	0	-1	0	0	1
3/2		3/2	9/4	15/8	45/16	135/32
	1	3/2	5/4	15/8	45/16	167/32

Die Tabellen zeigen eine weitere interessante Eigenschaft dieses Schemas:

Dividiert man das Polynom durch $(x-x_0)$, dann stehen die Koeffizienten des Restpolynoms in der letzten Zeile des Hornerschemas, denn:

Dividiert man das Polynom durch $(x - x_0)$, dann geht die Division i.a. nicht auf, sondern es bleibt ein Rest:

$$P_n(x):(x - x_0) = P_{n-1}(x)\cdot(x - x_0) + b_0$$

Setzt man nun $x = x_0$ ein, wie es beim Hornerschema geschieht, dann ergibt sich als Wert in der letzten Zeile, letzte Spalte der Polynomwert an der Stelle x_0, der gleichzeitig der Divisionsrest ist. Man kann also vermuten, dass die Zahlen in der letzten Zeile gerade die Koeffizienten des Restpolynoms sind. Der Nachweis ergibt sich, wenn man die Bildung der letzten Zeile des Hornerschemas mit einer Division vergleicht, die nach dem üblichen Verfahren durchgeführt wird.

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 : x - x_0 = a_n \cdot x^{n-1}$$

$$a_n \cdot x^n - a_n \cdot x^{n-1} \cdot x_0$$

$$\underline{\quad - \qquad\quad + \qquad\qquad}$$

$$0 + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^{n-1} \cdot x_0$$

$$= x^{n-1} \cdot \underbrace{\left(a_{n-1} + a_n \cdot x_0\right)}_{b_{n-2}} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} \qquad\qquad + \underbrace{\left(a_{n-1} + a_n \cdot x_0\right)}_{b_{n-2}} \cdot x^{n-2}$$

$$b_{n-2} \cdot x^{n-1} - b_{n-2} \cdot x^{n-2} \cdot x_0$$

$$\underline{\qquad - \qquad\qquad + \qquad\qquad}$$

$$x^{n-2} \cdot \left(b_{n-2} \cdot x_0 + a_{n-2}\right) \qquad + \left(b_{n-2} \cdot x_0 + a_{n-2}\right) \cdot x^{n-3}$$

Die Koeffizienten des Ergebnispolynoms zeigen das Bildungsgesetz des Hornerschemas.

Setzt man im Hornerschema eine Nullstelle des Polynoms ein, dann ergibt sich der Rest null und im Restpolynom, das im Polynomgrad um eins erniedrigt ist, kann nach weiteren Nullstellen gesucht werden.

Beispiel:

Gesucht sind die Nullstellen des Polynoms:

$$P_5\left(x\right) = x^5 - 9 \cdot x^4 + 7 \cdot x^3 + 57 \cdot x^2 - 44 \cdot x - 84$$

Das konstante Glied enthält die Faktoren.

$$84 = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1$$

Falls das Polynom nur ganzzahlige Nullstellen hat, kommen diese Zahlen (positiv und negativ) als Lösungen in Frage. (Wurzelsatz von Vieta).

	1	-9	7	57	-44	-84
3		3	-18	-33	72	84
	1	-6	-11	24	28	0

x = 3 ist Lösung. Mit dem Restpolynom werden weitere Nullstellen gesucht:

Wegen des letzten Glieds des Restpolynoms wird eine Nullstelle bei x = 2 angenommen

	1	-6	-11	24	28
2		2	-8	-38	-28
	1	-4	-19	-14	0

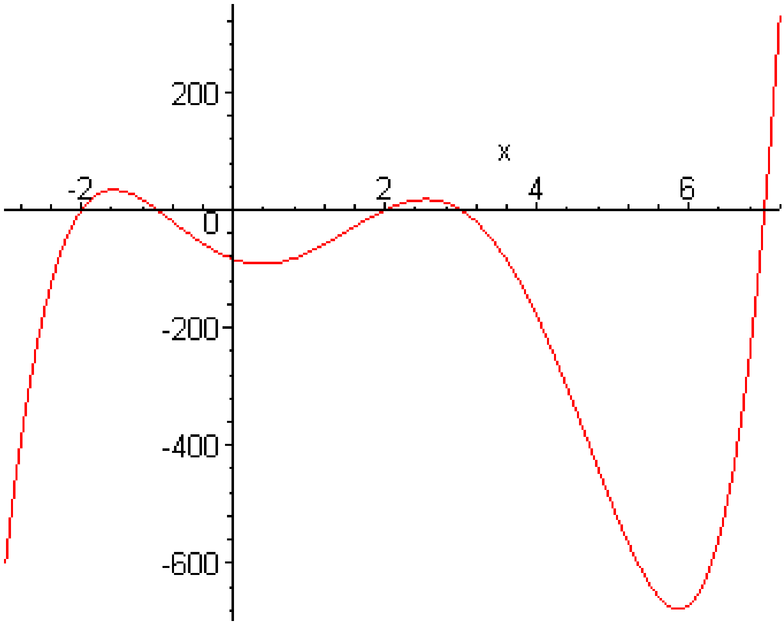
	1	-4	-19	-14
7		7	21	14
	1	3	2	0

Die restlichen Lösungen sind x = -2 und x = -1.

Damit lässt sich das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-3)$$

Der Graph zeigt die Nullstellen des Polynoms



Anwendungen von Polynomen:
Polynome lassen sich in der Technik sehr vielseitig anwenden, da sie durch passende Wahl der Koeffizienten leicht an verschiedene Kurvenverläufe anpassen lassen:
Beispiele:
Interpolation von einzelnen Punkten zur Berechnung von Zwischenwerten (Lagrange – Polynome oder Bezier – Splines)
Ausgleich fehlerbehafteter Messwerte durch sog. Ausgleichspolynome (Fehlerausgleich nach Gauss oder Tschebyschev)
Berechnung von transzendenten Funktionen durch Potenzreihen.

7.4 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen haben die Form:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei P(x) und Q(x) Polynome sind. Man nennt f(x) echt gebrochen rational, wenn der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms ist. Ist dies nicht der Fall, dann kann man durch eine Polynomdivision ein Polynom abspalten und man erhält einen echt gebrochen rationalen Restbruch.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4 \cdot x + 15}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4 \cdot x + 15}{x^2 - 2 \cdot x + 1}$$

$$x^3 - 4 \cdot x + 15 : x^2 - 2 \cdot x + 1 = x + 2$$

$$\underline{x^3 - 2 \cdot x^2 + x}$$

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 15$$

$$\underline{2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2}$$

$$-x + 13$$

$$\frac{x^3 - 4 \cdot x + 15}{x^2 - 2 \cdot x + 1} = x + 2 - \frac{x - 13}{(x-1)^2}$$

Durch systematisches Vorgehen kann man das Verhalten von gebrochen rationale Funktionen leicht ermitteln. Zweckmäßig sind folgende Schritte, wobei die obige als Beispiel dient:

a) Nullstellen der Funktion.
Die Funktion ist dann null, wenn das Zählerpolynom null ist und das Nennerpolynom nicht gleichzeitig null ist.

$$x^3 - 4 \cdot x + 15 = 0$$

Durch Probieren mit dem Hornerschema erhält man die erste Nullstelle bei x = -3

	1	0	-4	15
-3		-3	9	-15
	1	-3	5	0

Restpolynom:

$$R(x) = x^2 - 3 \cdot x + 5$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5}}{2}$$

Es gibt keine weiteren reellen Nullstellen.

b) Pole der Funktion
Wenn der Nenner gleich null wird und der Zähler nicht gleichzeitig null, dann strebt die Funktion an dieser Stelle gegen unendlich.
Im Fall des Beispiels hat der Nenner bei x = 1 eine doppelte Nullstelle. In diesem Fall verhält sich die Funktion in der Umgebung des Pols symmetrisch, d.h. die Funktion strebt sowohl von links als auch von rechts in die gleiche Richtung. Im Fall einer einfachen Nullstelle oder einer Nullstelle ungerader Ordnung strebt die Funktion von beiden Seiten in umgekehrte Richtungen.

c) Symmetrieeigenschaften

Ob sich eine Funktion symmetrisch verhält, kann man dadurch feststellen, dass man x durch –x ersetzt und nachprüft, ob sich der Funktionswert und das Vorzeichen ändert.

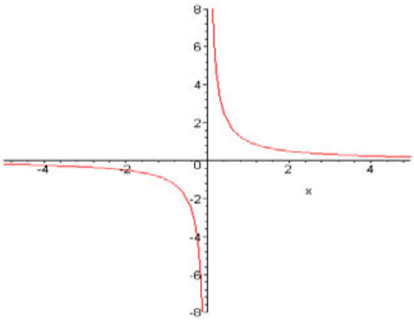
Falls $f(x) = f(-x)$ (es ändert sich weder der Funktionswert noch das Vorzeichen)

dann ist die Funktion symmetrisch zur y – Achse.

Falls $f(x) = -f(-x)$ (es ändert sich nur das Vorzeichen des Funktionswerts, nicht der Absolutbetrag),

dann ist die Funktion punktsymmetrisch. Man kann auch sagen: Jeder Punkt des Graphen in der positiven Halbebene mit der Abszisse x hat den gleichen Abstand vom Nullpunkt wie der entsprechende Punkt mit der Abszisse –x in der negativen Halbebene. Ein einfaches Beispiel ist die Funktion

$$y = \frac{1}{x}$$

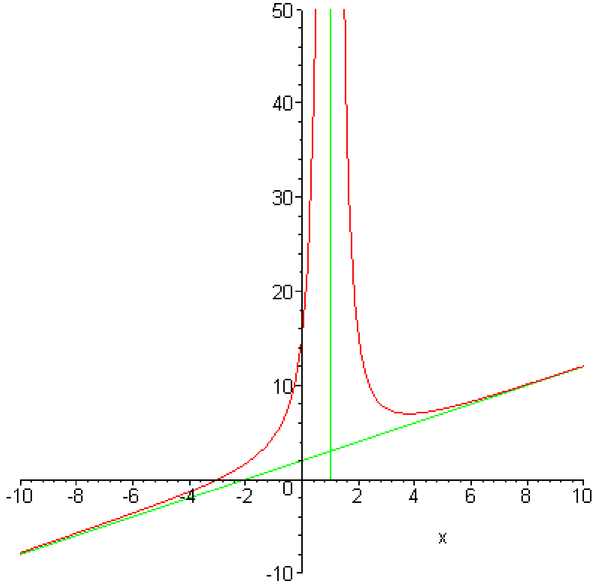


Bei der oben gegebenen Beispielfunktion ist keine Symmetrie erkennbar.

d) Verhalten für x $\rightarrow\pm\infty$
Das Verhalten der Funktion für große x hängt von den höchsten Potenzen des Zähler – und Nennerpolynoms ab.
Bei einer echt gebrochen rationalen Funktion ist der Polynomgrad des Nenners größer als der des Zählers, somit wächst für große x der Nenner stärker als der Zähler und die Funktion geht gegen null, sowohl für positive große Werte als auch für negative große Werte von x.
Ist der Polynomgrad des Zählers gleich dem des Nenners, dann kann man durch Polynomdivision eine Konstante abspalten. Wird x sehr groß, dann geht der echt gebrochene Teil der Funktion gegen null und die Funktion gegen den konstanten Wert.
Ist der Polynomgrad des Zählers größer als der des Nenners, dann kann man durch Polynomdivision ein Polynom abspalten und die Funktion schmiegt sich für große x immer mehr dem abgespaltenen Polynom an.
Im Beispiel wird die Funktion sich also immer mehr der Geraden $y = x + 2$ annähern, ohne sie exakt zu erreichen.

e) Wertebereich.
Zum Schluss der Untersuchung ist es zweckmäßig, die ganze Ebene in Bereiche einzuteilen, wobei die Bereichsgrenzen durch die Nullstellen und die Pole der Funktion gegeben sind, und zu prüfen, ob der Funktionsgraph oberhalb oder unterhalb der x – Achse verläuft.

f) Mit den Hilfsmitteln der Differenzialrechnung können noch Maxima, Minima und Wendepunkte der Funktion bestimmt werden. Im Beispiel ergibt sich ein Minimum an der Stelle P_M (3,769; 6,973) und kein Wendepunkt.



Weiteres Beispiel:

Es sollen die Eigenschaften und die graphische Darstellung der Funktion:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

ermittelt werden.

a) Nullstellen:

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1) = 0 \qquad x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

b) Pole der Funktion: Nenner wird nicht null; keine Pole

c) Symmetrieeigenschaften: f(x) = f(-x) Funktion ist symmetrisch zur y – Achse.

d) Verhalten für große x – Werte:
Für x → ±∞ sind die Konstanten +1; -1 im Zähler und im Nenner unwesentlich. Die Funktion strebt gegen 1. Dies ergibt sich auch bei einer Polynomdivision.

e) Wertebereich:
Der Nenner ist immer positiv, deshalb bestimmt der Zähler das Vorzeichen.
Für x < -1 und für x > +1 ist der Zähler positiv; im Bereich -1 < x < +1 ist der Zähler negativ

f) Maxima, Minima, Wendepunkte:

$$y' = \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \qquad y' = \frac{2 \cdot x \cdot (2)}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$$

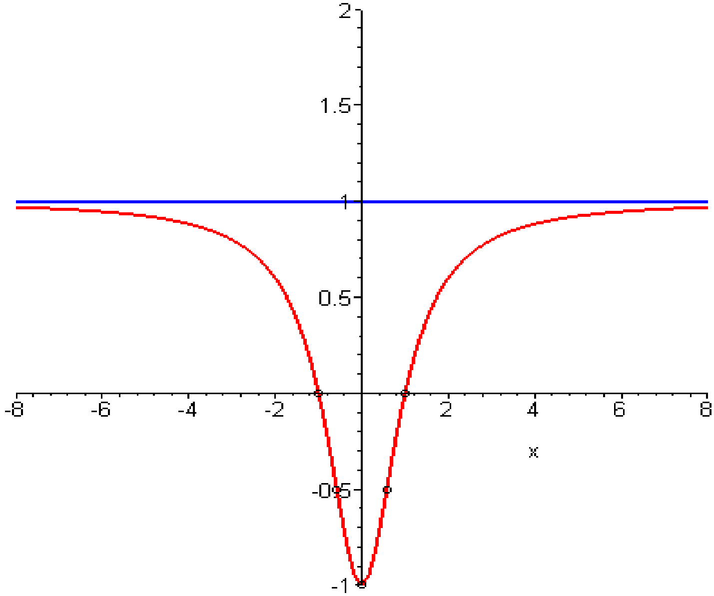
$$x = 0 \qquad y = -1$$

$$y'' = \frac{4 \cdot \left(x^2+1\right)^2 - 4 \cdot x \cdot 2 \cdot \left(x^2+1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2+1\right)^4} = 0$$

$$4 \cdot \left(x^2+1\right) \cdot \left(x^2+1-4 \cdot x^2\right) = 0$$

Wendepunkte:

$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad y = -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$



7.5 Partialbruchzerlegung

Man kann eine gebrochen rationale Funktion so auffassen, als hätte man mehrere Brüche auf einen gemeinsamen Hauptnenner gebracht und den Bruch so weit wie möglich vereinfacht. Für manche Zwecke, z.B. um über eine gebrochen rationale Funktion zu integrieren, ist es zweckmäßig, diesen Vorgang rückgängig zu machen, um einfache Teilintegrale zu erhalten, über die einfach integriert werden kann. Zu dem Zweck werden die Nullstellen des Nenners aufgesucht und der Nenner in Linearfaktoren zerlegt. Anschließend macht man einen Ansatz der Form:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots\ldots \equiv \text{ ursprünglicher Polynombruch}$$

Es handelt sich um eine Identität, d.h. das Gleichheitszeichen soll für alle Werte von x gelten.

Falls das Nennerpolynom komplexe Nullstellen hat, ist es besser, für die beiden konjugiert komplexen Nullstellen den Ansatz zu machen:

$$\frac{A\cdot x+B}{x^2+p\cdot x+q}$$

um komplexe Koeffizienten zu vermeiden.

Beispiel:

$$\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34}$$

Der Nenner hat zwei reelle Nullstellen und lässt sich folgendermaßen in Faktoren zerlegen:

$$x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34 \equiv (x+1)\cdot(x-2)\cdot\left((x-1)^2+16\right)$$

Man macht deshalb den Ansatz:

$$\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34} \equiv \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C\cdot x+D}{x^2-2\cdot x+17}$$

Wird mit dem Nenner multipliziert, entsteht folgende Identität:

$$
\begin{aligned}
x^2+5\cdot x-16 \equiv A\cdot(x-2)\cdot\left(x^2-2\cdot x+17\right) \\
+B\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-2\cdot x+17\right) \\
+(C\cdot x+D)\cdot(x+1)\cdot(x-2)
\end{aligned}
$$

Eine Identität gilt für jeden Wert von x; man darf also jeden beliebigen Wert einsetzen, z.B. die reellen Nullstellen:

x = 2: $\quad -2 = B\cdot 3\cdot 17 = 51 \qquad B = -\dfrac{2}{51}$

x = -1: $\quad -20 = A\cdot(-3)\cdot 20 \qquad A = \dfrac{1}{3}$

x = 0: $\quad -16 = -34\cdot A + 17\cdot B - 2\cdot D \qquad D = 2$

In einer Identität müssen außerdem die Koeffizienten bei jeder Potenz von x auf beiden Seiten gleich sein. z.B. bei x^3

$$0 = A + B + C \qquad C = -A - B = -\frac{1}{3} + \frac{2}{51}$$

$$C = -\frac{5}{17}$$

Somit ist:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2+5\cdot x-16}{x^4-3\cdot x^3+17\cdot x^2-13\cdot x-34} \equiv \\
&\equiv \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{2}{51}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{17}\frac{5\cdot x-34}{x^2-2\cdot x+17}
\end{aligned}
$$

Sonderfall: Treten im Nenner mehrfache Nullstellen auf, d.h. erscheint ein Faktor im Nenner in einer Potenz, dann muss man bis zur höchsten Potenz alle Potenzen im Ansatz berücksichtigen.

Beispiel:

Der Polynombruch $\dfrac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{(x+1) \cdot (x-2)^2}$

soll in Partialbrüche zerlegt werden.

Ansatz:

$$\frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4}{(x+1) \cdot (x-2)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4 \equiv A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x+1) \cdot (x-2) + C \cdot (x+1)$$

x = 2: $\quad 2 = 3 \cdot C \qquad C = \dfrac{2}{3}$

x = -1 $\quad 11 = 9 \cdot A \qquad A = \dfrac{11}{9}$

x = 0

$$4 = 4 \cdot A - 2 \cdot B + C \qquad 2 \cdot B = \frac{44}{9} + \frac{2}{3} - 4 = \frac{14}{9} \qquad B = \frac{7}{9}$$

Ergebnis:

$$\frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4}{(x+1) \cdot (x-2)^2} \equiv \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$$

7.6 Wurzelfunktionen

Bei Wurzelfunktionen ist zu beachten, dass diese im allgemeinen einen beschränkten Definitionsbereich haben, da die Wurzel nur für positive Radikanden definiert ist. Falls der Wurzelexponent ungeradzahlig ist, kann man durch die Festlegung (Beispiel 3. Wurzel)

$y = \sqrt[3]{x}$ für x > 0 und

$y = -\sqrt[3]{-x}$ für x < 0

die Funktion für alle x definieren.

Beispiel:

$$y = \sqrt{x^4 - 2 \cdot x^2 - 12}$$

a) Nullstellen:

$$x^4 - 2 \cdot x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{13}} \quad x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{13}}$$

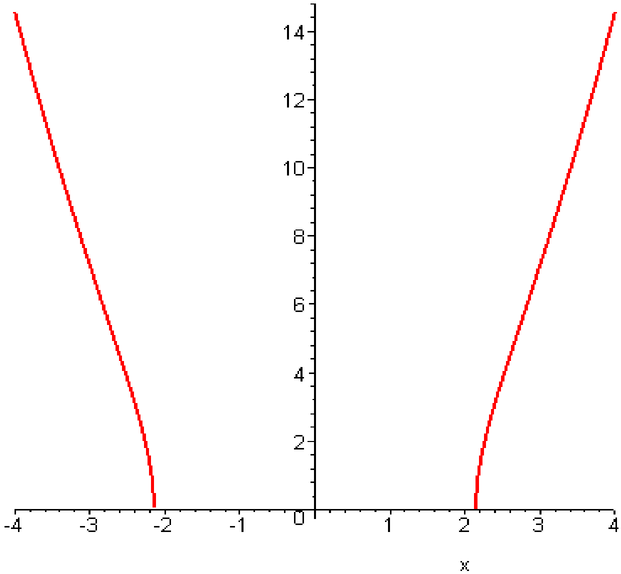
b) Pole: keine

c) Symmetrieeigenschaften: f(-x) = f(x)
symmetrisch zur y – Achse

d) Definitionsbereich:
definiert für $x < x_2$ und $x > x_1$

e) Wertebereich: y > 0

f) Verhalten für große x: Für x →±∞ geht y →+∞



7.7 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, deshalb können beide gemeinsam behandelt werden.

Die Exponentialfunktion lautet allgemein

$$y = a^x$$

Dabei ist die Funktion wegen der Regeln für das Rechnen mit Potenzen nur für positive a definiert.

Für den Bereich 0 < a < 1 kann man immer eine Zahl

b > 1 finden kann, für die gilt: $a = \frac{1}{b}$

und somit $y = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$

Damit kann man den Fall 0 < a < 1 auf die Exponentialfunktion mit negativen Exponenten zurückführen, die durch Spiegelung von a^x an der y – Achse hervorgeht.

Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = a^x$

a) Nullstellen: a^x kann nicht null werden. Die Funktion geht gegen null, wenn x →-∞ geht. Falls x sehr große positive Werte annimmt, wird y sehr groß und der Kehrwert $\frac{1}{a^x}$ sehr klein.

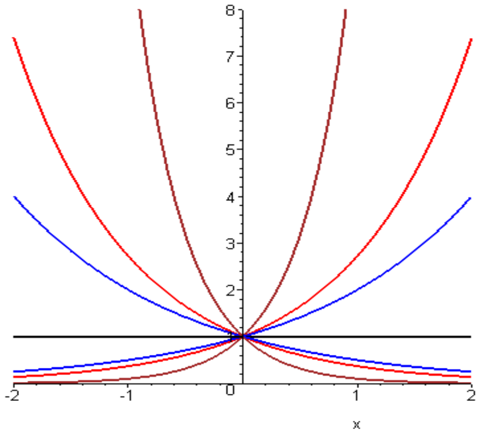
b) Pole: keine Pole

c) Symmetrie: keine Symmetrie

d) Verhalten für große x: a^x wächst sehr rasch gegen unendlich für große Werte von x.

e) Definitionsbereich: -∞< x < +∞

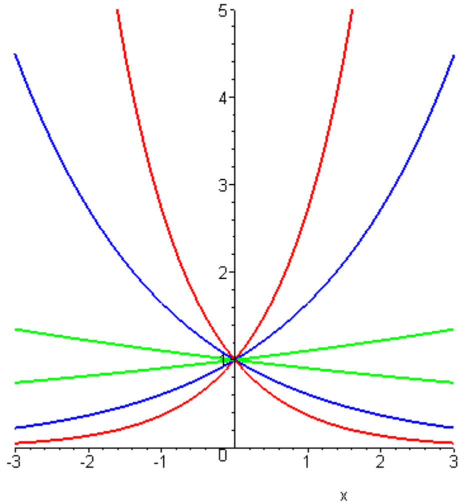
f) Wertebereich: y > 0



Die graphische Darstellung zeigt Exponentialfunktionen mit der Basis 0,1; 1/e; 0,5; 1; 2; e; 10;

Alle Graphen gehen durch den Punkt (0; 1), da $a^0 = 1$ für beliebige Werte von $a > 0$.

Eine besondere Bedeutung in der Anwendung hat die Exponentialfunktion mit der Basis e einschließlich ihrer Modifikationen. Im folgenden Graphen sind die Funktionen $e^{0.1 \cdot x}$; $e^{0.5 \cdot x}$; e^{x}; $e^{-0.1 \cdot x}$; $e^{-0.5 \cdot x}$; e^{-x} dargestellt:



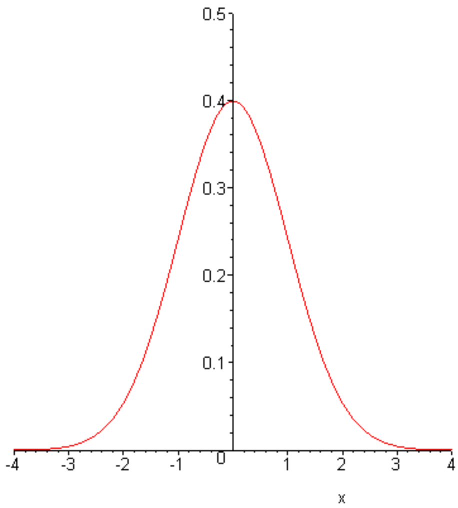
Das Aussehen der Kurven entspricht dem der Kurven mit variabler Basis. Dies rührt daher, dass man eine Exponentialfunktion mit Basis a in eine mit der Basis e umrechnen kann:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

In den Anwendungen kommen auch Exponentialfunktionen vor, in denen statt des Exponenten x eine Funktion von x steht, z.B.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese Funktion spielt in der Statistik eine wichtige Rolle. Sie ist symmetrisch zur y – Achse und geht für große x gegen null.

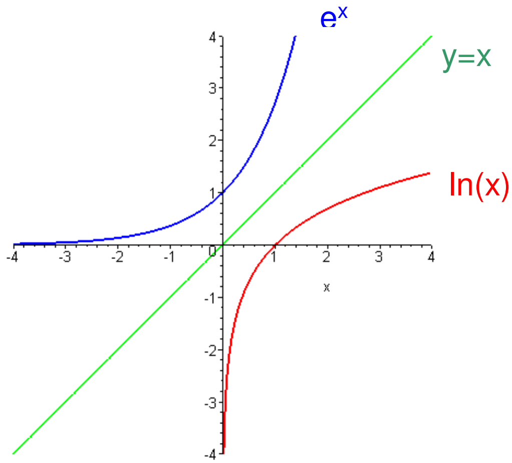


Man nennt sie die Gauß'sche Glockenkurve.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Da man auch die Logarithmen verschiedener Basen in die Basis e umrechnen kann, genügt es, die Funktion des natürlichen Logarithmus zu behandeln.

Umkehrfunktion heißt, die Originalfunktion wird an der Geraden y = x gespiegelt, bzw. in der Exponentialfunktion werden die beiden Variablen vertauscht und wieder nach y aufgelöst:

$$y = e^x \quad x = e^y \quad y = \ln x$$



Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

a) Nullstellen: bei x = 1

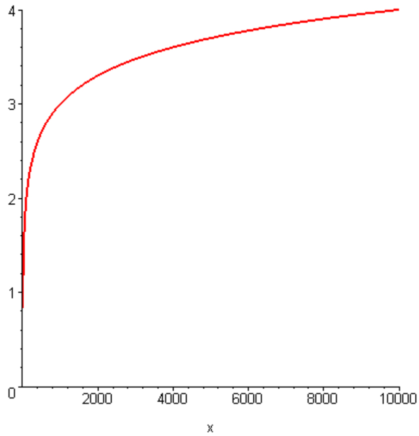
b) Pole: für $x \rightarrow +0$ geht die Logarithmusfunktion gegen $-\infty$

c) Symmetrie: keine

d) Definitionsbereich: $x > 0$

e) Verhalten für große x: für $x \rightarrow \infty$ geht auch $y \rightarrow \infty$ jedoch wächst die Logarithmusfunktion außerordentlich langsam. Man kann nachweisen, dass die Logarithmusfunktion langsamer wächst, als jede Potenz von x, d.h. als jedes Polynom, auch wenn die Koeffizienten noch so klein sind.

Der Graph zeigt die Funktion $y = \log_{10} x$. Bei x = 10000 ist y erst 4.



7.8 Trigonometrische Funktionen

Betrachtet man in den trigonometrischen Beziehungen den Winkel als eine Variable, die sich von -∞ bis +∞ ändern kann, dann erhält man eine Funktion

$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x \qquad y = \cot x$

Da sich die Werte der Winkelfunktionen sin x und cos x nach dem Winkel von 2·π, die von tan x und cot x nach dem Winkel von π wiederholen, erhält man periodische Funktionen mit folgenden weiteren Eigenschaften:

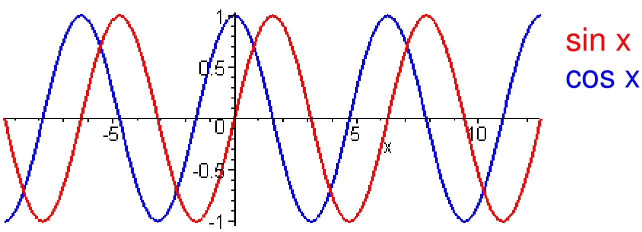
sin x: Nullstellen: x = 0 ±π

Symmetrieeigenschaften: sin(-x) = -sin(x)
Punktsymmetrie

Pole: keine

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

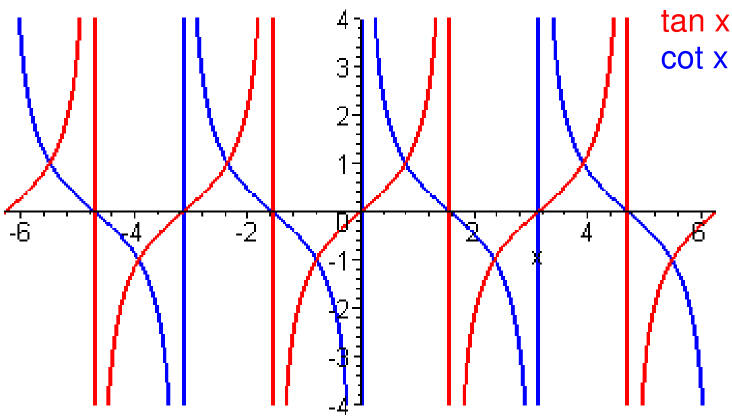
Wertebereich: $-1 \le y \le +1$



cos(x): Wegen $\cos x = \sin\left(x + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)$ ist die cos – Funktion lediglich die um $\frac{1}{2}\cdot\pi$ nach links verschobene sin – Funktion, hat also die gleichen Eigenschaften.

tan(x), und Wegen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ hat die tan – Funktion Nullstellen, wenn sin x = 0 ist und Pole, wenn cos(x) 0 = ist. Die Funktion ist punktsymmetrisch.

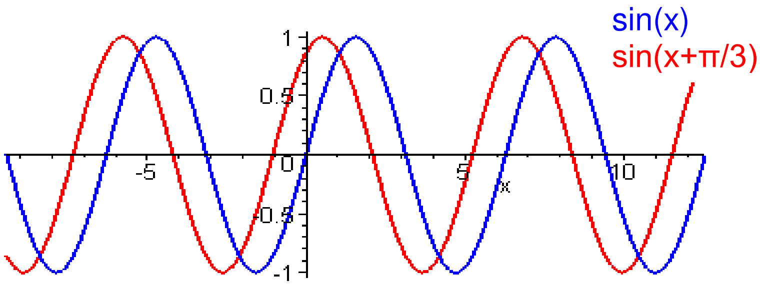
cot(x): Wegen $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ hat die Funktion Nullstellen, wenn cos x = 0 ist, und Pole, wenn sin x = 0 ist. Die Funktion ist punkt symmetrisch.



Ebenso wie bei den Kegelschnitten und allen anderen bisher besprochenen Funktionen kann man auch bei den trigonometrischen Funktionen Koordinatentransformationen durchführen. Ist z.B. bei x = 0 bereits ein Winkel vorhanden, dann addiert sich dieser Winkel zu allen x – Werten und die sin – Funktion nimmt die Form an:

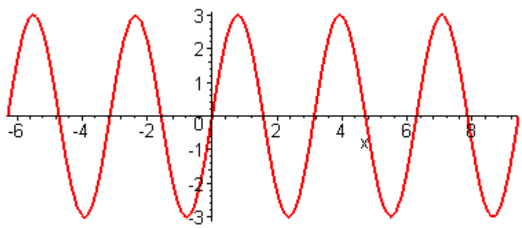
$$y = \sin\left(x + \varphi\right) \quad \text{z.B.} \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Letztere Funktion ist um $\frac{\pi}{3}$ nach links verschoben:



Tritt in den trigonometrischen Funktionen der Winkel mehrfach auf, dann verkleinert sich die Periodenlänge. Ein Faktor vor der sin- oder cos – Funktion vergrößert den Ausschlag:

Beispiel: $y = 3 \cdot \sin\left(2x\right)$



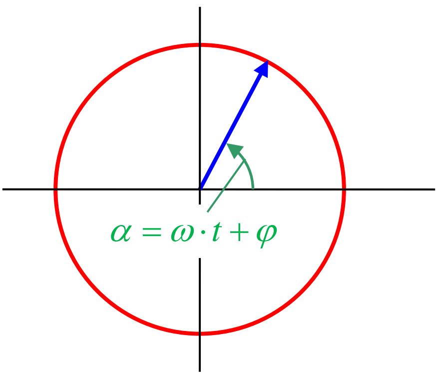
Technische Anwendungen:

Eine Schwingung ist ein periodischer Vorgang und wird i.a. durch eine sin- oder cos – Funktion beschrieben. Auch kompliziertere Schwingungsformen lassen sich durch eine Summe von sin- oder cos – Funktionen darstellen. Hierbei wächst der Winkel proportional zur Zeit. Der Schwingungsausschlag wird als Amplitude bezeichnet. Die allgemeine Form einer Schwingungsgleichung lautet:

$$y = \hat{x} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

Damit als Argument der sin – Funktion ein Winkel steht, muss die Größe ω die Dimension $\frac{Winkel}{Zeit}$ haben.

Man bezeichnet diese Größe als Winkelgeschwindigkeit oder als Kreisfrequenz: Die Bezeichnung deutet darauf hin, dass man von der Vorstellung ausgeht, dass der Winkelpfeil im Einheitskreis mit einer bestimmten Geschwindigkeit umläuft. Der Winkel ist an sich eine dimensionslose Größe, somit hat ω die Dimension [1/s]



T ist die Schwingungsdauer und ist die Zeit, die für einen vollen Umlauf des Winkels, also für den Winkel 2π benötigt wird. Somit ist:

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$$

Man nennt T auch die Periodendauer der Schwingung.

$\omega \cdot t + \varphi$ heißt der Phasenwinkel der Schwingung, φ ist der sog. Nullphasenwinkel, also der Winkel, der zum Zeitpunkt t = 0 vorhanden ist.

Eine mechanische Schwingung lässt sich also folgendermaßen darstellen:

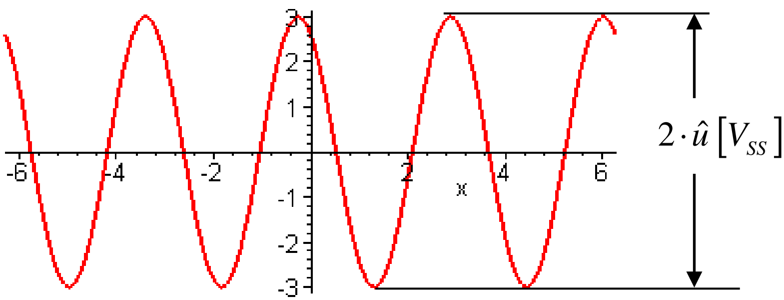
$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

mit $\hat{x}$ = Schwingungsamplitude (in [m] oder [mm])

Eine elektrische Schwingung, z.B. eine periodisch sich verändernde Spannung wird dargestellt als:

$$u = \hat{u}[V] \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Der Schwingungsausschlag ist die doppelte Amplitude:

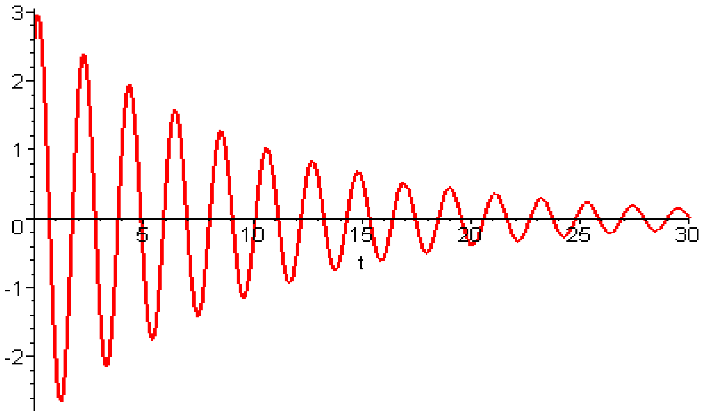


Ist die Schwingung gedämpft, dann verändert sich die Amplitude im Lauf der Zeit, sie ist eine Funktion der

Zeit. Bei einer viskos gedämpften Schwingung fällt die Amplitude nach einer Exponentialfunktion ab und sie lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$x = \hat{x} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right)$$

mit δ = Abklingkonstante [1/s]



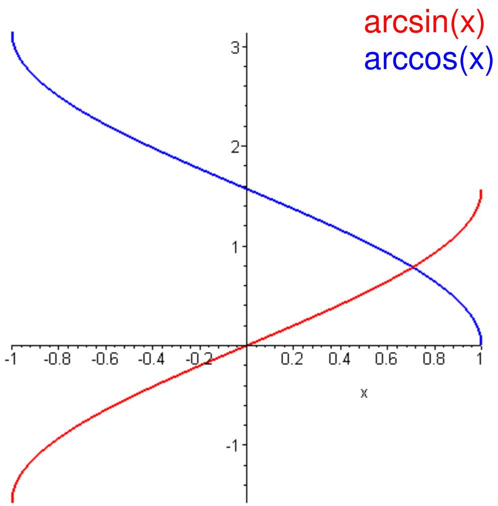
Oft wird bei Schwingungen die Schwingungsfrequenz f [1/s] angegeben, d.h. die Anzahl der Schwingungen/Sekunde. Dies bedeutet, dass die Winkelgeschwindigkeit 2π mal so groß ist, da mit einer Schwingung ein Winkel von 2π durchlaufen wird. Der Zusammenhang mit der Kreisfrequenz lautet somit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Bei der Frequenz von 50 Hz des europäischen Stromnetzes ist also $\omega = 50 \cdot 2\pi = 100 \cdot \pi = 314 \left[1/s\right]$

Die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen sind die arc – Funktionen. Spiegelt man deren Graphen an der Geraden y = x, dann wird deutlich, dass zu einem bestimmten x – Wert unendlich viele y –

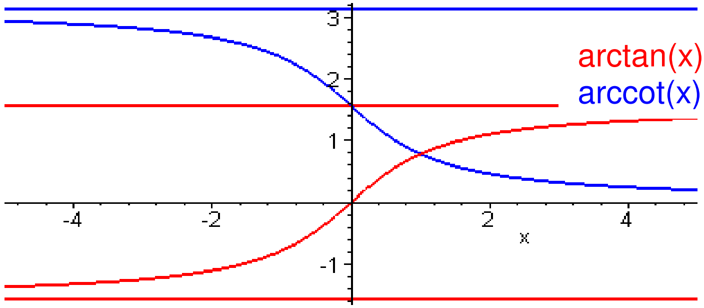
Werte gehören. Eine eindeutige Abbildung liefert nur der sog. Hauptwert der arc – Funktion. Das ist bei der arcsin – Funktion der Bereich $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$ und bei der cos – Funktion der Bereich $0 \leq y \leq \pi$. Man nennt einen Funktionswert in diesem Bereich den Hauptwert der Funktion. Dieser Wert wird i.a. von einem Taschenrechner berechnet



Das gleiche gilt für die Funktionen

y = arctan(x) und y = arccot(x)

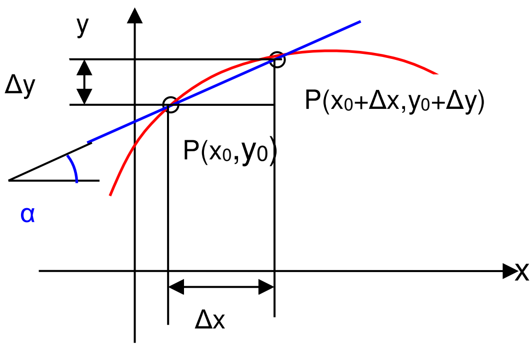
Der Hauptwert wird dadurch bestimmt, dass nur eine Kurve der beiden Funktionen gespiegelt wird:


arctan(x)
arccot(x)
3
2
1
-1
-4
-2
2
4
x

8 Differentialrechnung, die Ableitung von Funktionen

8.1 Das Tangentenproblem

Wenn man an einen Funktionsgraphen an einem bestimmten Punkt $P_0(x,y)$ eine exakte Tangente legen will, dann besteht das Problem, dass man zur Bestimmung der Geraden nur den Punkt kennt, durch den die Gerade hindurch gehen soll. Zur vollständigen Bestimmung der Geradengleichung benötigt man aber entweder einen zweiten Punkt oder die Steigung der Geraden.



Das Problem wird folgendermaßen gelöst:
Man wählt einen benachbarten Punkt $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ im kleinen Abstand Δx und berechnet den Tangens der Verbindungsgeraden der beiden Punkte. Anschließend führt man einen Grenzübergang durch, indem man für Δx eine Nullfolge einsetzt. Falls Δx gegen null geht, nähert sich der Winkel der Verbindungsgeraden immer mehr der Richtung der Tangente an, im Grenzfall erhält man die Richtung der exakten Tangente. Die Grenzwertbildung

bezeichnet man mit

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\mathit{Term}\text{, für den } \Delta x \text{ gegen null gehen soll } \right)$

Formelmäßig ausgedrückt, bildet man

$$\tan\alpha' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Die exakte Steigung erhält man durch den Grenzübergang:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Beispiel:

Gesucht ist die Tangente an die Parabel

$$y = 0{,}5 \cdot x^2$$

an der Stelle $x_0 = 2$. Eingesetzt, ergibt sich für $y_0 = 2$

$$\tan\alpha' = \frac{0.5 \cdot \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - 0.5 \cdot x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{0.5 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x + 0.5 \cdot \Delta x^2 - 0.5 \cdot x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0 \cdot \Delta x + 0.5 \cdot \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{x_0 + 0.5 \cdot \Delta x}{1}$$

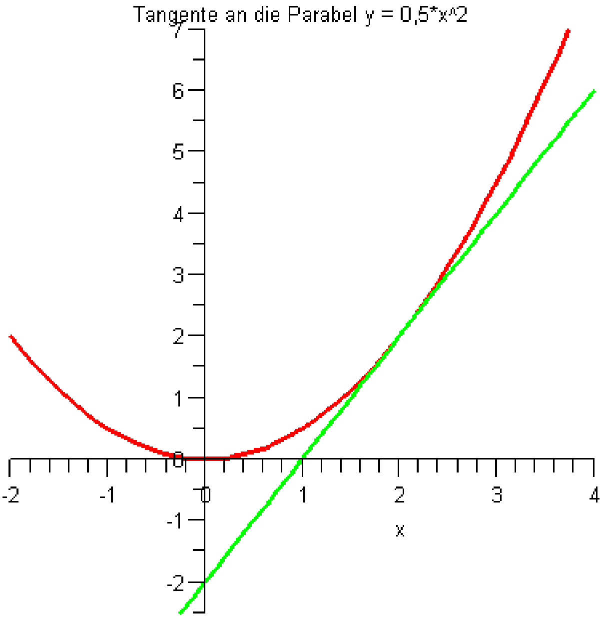
Setzt man für Δx eine Nullfolge ein, dann geht Δx gegen null und mit $x_0 = 2$ ergibt sich für den Tangentenanstiegswinkel:

$$m = \tan\alpha = 2$$

Die Geradengleichung ist dann:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan\alpha \qquad \frac{y - 2}{x - 2} = 2$$

$$y = 2 \cdot x - 2$$



Man kann das Problem verallgemeinern, indem man die Steigung der Tangente nicht für einen bestimmten Punkt berechnet, sondern die Stelle x variabel lässt.
Beispiel: Gesucht ist die Steigung an einer beliebigen Stelle für die Funktion

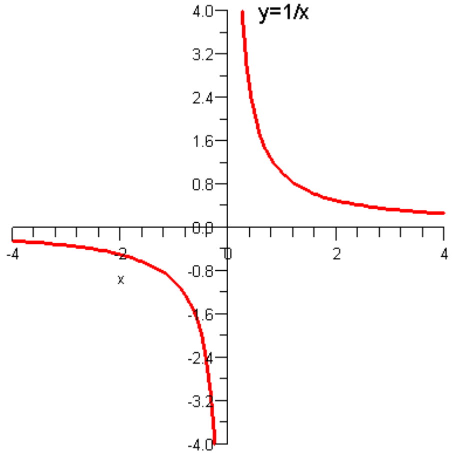
$$y = \frac{1}{x}$$

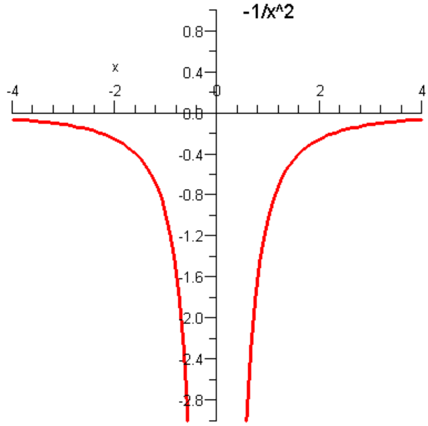
Man bildet wieder die Größe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und macht anschließend den Grenzübergang $\Delta x \to 0$

$$\frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x \cdot (x + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{x \cdot (x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

Man erhält also eine Funktion, die die Steigung an jeder Stelle x angibt für die Funktion $y = \frac{1}{x}$





Man nennt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ den Differenzenquotient

Den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nennt man die „Ableitung“ der Funktion f(x),
bzw. den Vorgang der Limesbildung das „ableiten“ oder das „differenzieren“ der Funktion.

Den Ausdruck $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreibt man kürzer

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$ und nennt $f'(x)$

die „Ableitungsfunktion“.

8.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion nicht immer gewährleistet ist. An der Stelle x = 0 Hat die Ableitungsfunktion einen Pol, an dieser Stelle ist die Ableitung nicht definiert. Man kann zwar dem arctan α an dieser Stelle den Wert –π/2 zuweisen, jedoch gehört ein Pol einer Funktion nicht zu ihrem Definitionsbereich.

Man definiert deshalb:

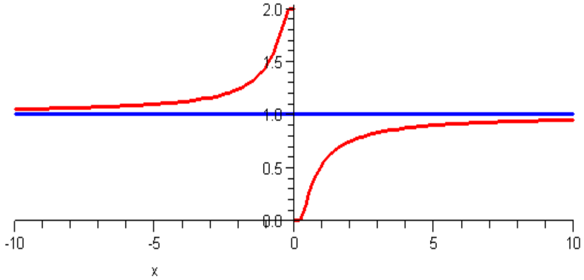
Eine Funktion y = f(x) ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn dort der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ *eindeutig existiert.*

An einer Polstelle kann man diesen Grenzwert nicht bilden.

Weiteres Beispiel:

Die früher erwähnte Funktion $y = \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ besitzt an der Stelle x = 0 eine Unstetigkeitsstelle.



Auch bei dieser Funktion kann man den Grenzwert bei x = 0 nicht bilden. Berechnet man f(x + Δx), dann erhält man ein Δy, das nicht gegen null geht. Man sagt, die Funktion ist an dieser Stelle unstetig. Man kann sich damit behelfen, dass man zwei Grenzwerte bildet, einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert

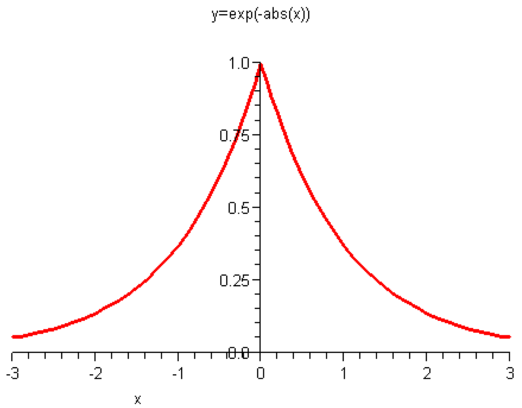
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Es ergeben sich im allgemeinen zwei verschiedene Grenzwerte, im obigen Fall sind beide sogar gleich 0. Das negative Vorzeichen im ersten Grenzwert muss deshalb gesetzt werden, weil hier die Differenz

Δx = (kleinerer x – Wert) – (größerer x – Wert) negativ ist.

Eine Funktion ist also an einer Stelle nicht differenzierbar, wenn sie unstetig ist.

Auch bei stetigen Funktionen kann eine nicht differenzierbare Stelle auftreten

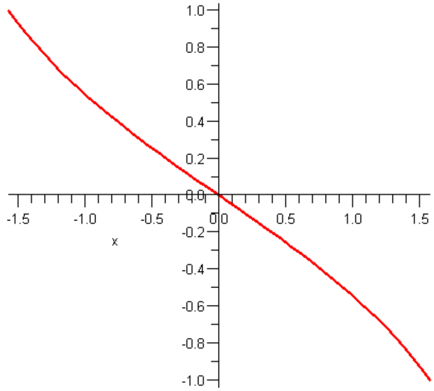


Die Funktion hat an der Stelle x = 0 einen Knick, die Tangentensteigung ist an dieser Stelle nicht eindeutig.

In einem dritten Fall kann eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar sein, nämlich wenn sie an einer Stelle x_0 einen unbestimmten Ausdruck annimmt.

Beispiel: $$y = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$$

An der Stelle x = 0 entsteht der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ damit ist die Funktion an dieser Stelle nicht definiert.



Durch eine später zu besprechende Methode kann man jedoch den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} = 0$ bilden.

Man spricht hier von einer behebbaren Unstetigkeit, indem man für x = 0, y = 0 setzt. Damit kann man den Grenzwert und damit die Ableitung an der Stelle x = 0 bilden.

8.3 Formale Ableitungsregeln

An statt für jede gegebene Funktion die mühsame Bestimmung des Differenzenquotienten mit anschließender Limesbildung durchzuführen, ist es zweckmäßiger, für die verschiedenen

Funktionstypen Ableitungsregeln aufzustellen. Damit wird das Ableiten von Funktionen zu einem rezeptmäßig vorgegebenen Vorgang.

1 Ableitung einer Konstanten

$$y = a \qquad y' = 0$$

Die Funktion ist eine Gerade parallel zur x – Achse. Sie hat die Steigung 0 und zwar für beliebige Werte von x.

2 Ableitung einer Funktion mit einem konstanten Faktor

$$y = a \cdot f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x)$$

$$y = a \cdot f(x) \quad y' = a \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor vor einer Funktion bleibt beim Differenzieren unverändert.

3 Ableitung der Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten

$$y = x^n$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x + \Delta x\right)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

Die Terme $\binom{n}{k}$ bedeuten die früher besprochenen Binomialkoeffizienten des Pascal´schen Dreiecks. Speziell $\binom{n}{1} = n$.

x^n fällt heraus, der Bruch lässt sich somit durch Δx kürzen. Führt man den Grenzübergang mit Δx → 0 durch, dann bleibt nur noch $n \cdot x^{n-1}$ übrig, somit ist:

$$y = x^n \qquad y' = n \cdot x^{n-1}$$

4 Ableitung der Summe mehrerer Funktionen

$$y = f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right) + f_3\left(x\right) + \ldots$$

Man kann von jedem Summenglied den Differenzenquotienten bilden:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_1\left(x + \Delta x\right) - f_1\left(x\right)}{\Delta x} + \frac{f_2\left(x + \Delta x\right) - f_2\left(x\right)}{\Delta x} + \ldots \right)$$

Nach den Regeln für Grenzwerte darf man von einer

Summe von Funktionen gliedweise die Grenzwerte bilden:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right)+\ldots$$

$$y' = f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)+\ldots$$

Eine Summe von Funktionen wird gliedweise differenziert.

5 Die Ableitung eines Produkts mehrerer Funktionen

Zunächst wird die Regel für das Produkt von zwei Funktionen abgeleitet:

y = f(x) soll sich darstellen lassen als Produkt der beiden Funktionen u(x) und v(x):

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

z.B. $y = x \cdot (1 - x^2)$

Der Differenzenquotient lautet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

Im Zähler wird der Ausdruck $u(x)\cdot v(x+\Delta x)$ addiert und wieder subtrahiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}+$$
$$\frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Man fasst die Terme nun folgendermaßen zusammen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}+\frac{u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v(x+\Delta x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

Bildet man den Limes $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dann stehen auf der rechten Seite zwei Produkte von Funktionen. Nach den Regeln für Grenzwerte darf man von jedem Faktor den Limes bilden und die beiden Grenzwerte multiplizieren:

$$\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)=v(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} u(x)=u(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=v'(x)$$

Damit ergibt sich:

$$y=u(x)\cdot v(x)$$

$$y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

1. Beispiel:

gesucht ist die Ableitung von

$$y = x^2 \cdot \left(2 + x - x^3\right)$$

Man kann natürlich ausmultiplizieren und die Potenzregel anwenden. Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich:

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(2 + x - x^3\right) + x^2 \cdot \left(1 - 3 \cdot x^2\right)$$

2. Beispiel:

an welchen Stellen hat die Funktion

$$y = x^2 \cdot \left(x^2 - 1\right)$$

ein waagrechte Tangente?

waagrechte Tangente bedeutet, $\tan\alpha = y' = 0$

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(x^2 - 1\right) + x^2 \cdot \left(2 \cdot x\right) = 0$$

$$y' = 2 \cdot x \cdot \left(2 \cdot x^2 - 1\right) = 0$$

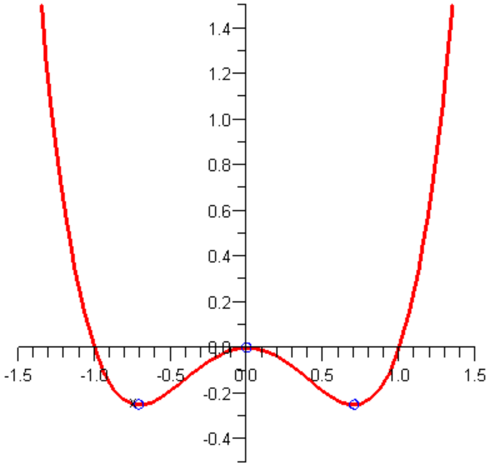
Jeder der beiden Faktoren kann null sein:

$$2 \cdot x = 0 \qquad x = 0; \quad y = 0$$

$$2 \cdot x^2 - 1 = 0 \quad x^2 - \frac{1}{2} = 0; \quad \left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_{2,3} = -\frac{1}{4}$$



Die Lösung lässt sich erweitern auf das Produkt von drei oder mehr Funktionen

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$$

Man fasst zunächst zwei Faktoren zu einer Funktion zusammen:

$$y = (u(x) \cdot v(x)) \cdot w(x)$$

$$y' = \left(u(x) \cdot v(x)\right)' \cdot w(x) + \left(u(x) \cdot v(x)\right) \cdot w'(x)$$

anschließend wird die Klammer mit den zwei

Produkten differenziert:

$$y' = \left(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\right)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

in abgekürzter Schreibweise:

$$(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$$

Beispiel:

$$y = (x+1)^3 = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$$

$$y' = 1(x+1)\cdot(x+1) + (x+1)\cdot 1\cdot(x+1) + (x+1)\cdot(x+1)\cdot 1$$

$$y' = 3\cdot(x+1)^2$$

Wie später noch nachgewiesen wird, scheint die Potenzregel nicht nur bei Potenzen der Variablen, sondern auch bei zusammengesetzten Ausdrücken zu gelten.

6 Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Die abzuleitende Funktion hat die Form

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Der Ausdruck wird auf die Produktform gebracht:

$$u(x) = f(x)\cdot v(x)$$

Nun wird nach der Produktregel abgeleitet:

$$u'(x) = f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x)$$

Es wird nach $f'(x)$ aufgelöst:

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\cdot v'(x)}{v\ \ (x)}$$

$f(x)$ wird wieder durch den ursprünglichen Ausdruck $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ersetzt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) - \dfrac{u(x)}{v(x)} \cdot v'(x)}{v(x)}$$

Nach Erweiterung des Bruchs durch $v(x)$ ergibt sich die endgültige Formel:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

in Kurzschreibweise:

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Beispiel 1:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \qquad y' = \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

Beispiel 2:

$$y = \frac{1}{x^n} \qquad y' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2 \cdot n}} = -n \cdot x^{n-1-2\cdot n}$$

$$y' = -n \cdot x^{-n-1}$$

Die Potenzregel gilt offensichtlich auch für negative Exponenten.

7 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

a.) $y = \sin(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

aus Formelsammlung:

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2\cdot\cos\left(\frac{x+x+\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}$$

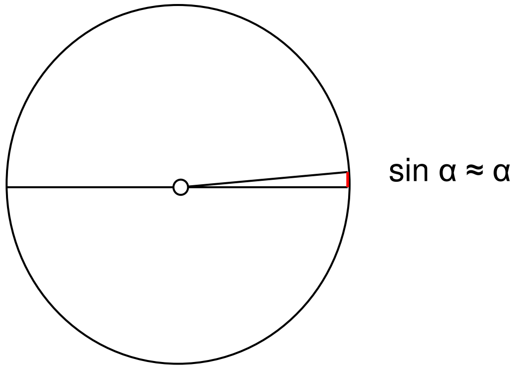
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x/2}$$

Bildet man nur den Limes für Δx → 0, dann wird aus dem ersten Faktor: $\cos(x)$

Der Grenzwert des zweiten Faktors

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x/2} = 1,$$

denn wie man dem Einheitskreis, der das Verhalten der trigonometrischen Funktionen beschreibt, entnehmen kann, unterscheidet sich der sin eines kleine Winkels kaum von der Bogenlänge des Winkels, so dass man setzen kann:



$\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \approx \frac{\Delta x}{2}$, so dass verbleibt:

$$y = \sin(x) \qquad y' = \cos(x)$$

b.) $y = \cos(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

Für $\cos\alpha - \cos\beta$ findet man in der Formelsammlung:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-2 \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Der Grenzwert des zweiten Faktors ist wieder gleich 1, so dass sich ergibt:

$$y = \cos(x) \qquad y' = -\sin(x)$$

Die tan – Funktion und die cot – Funktion werden nach der Quotienten Regel abgeleitet:

$$y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$y' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$y' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ebenso wird die cot – Funktion abgeleitet:

$$y = \cot(x) \qquad y' = -\left(1 + \cot^2(x)\right) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

8. Die Ableitung zusammengesetzter Funktionen, die Kettenregel

Bisher wurden Funktionen mit einfachem Argument abgeleitet, z.B. $y = x^n$, $y = \sin(x)$ usw.

Funktionen der Form $y = \left(x^2 - 3 \cdot x - 17\right)^4$

oder

$$y = \sin\left(3 \cdot x - \pi\right)$$

bezeichnet man als zusammengesetzte Funktionen. sin ist die äußere Funktion, $3 \cdot x + \pi$ die innere Funktion. Zwar lässt sich die Potenz oder die sin – Funktion für sich ableiten, aber die Behandlung der inneren Funktion ist noch offen.
Allgemein sagt man, die äußere Funktion ist eine Funktion der inneren Funktion. Setzt man z.B. den Ausdruck $3 \cdot x + \pi = u\left(x\right)$, dann ist

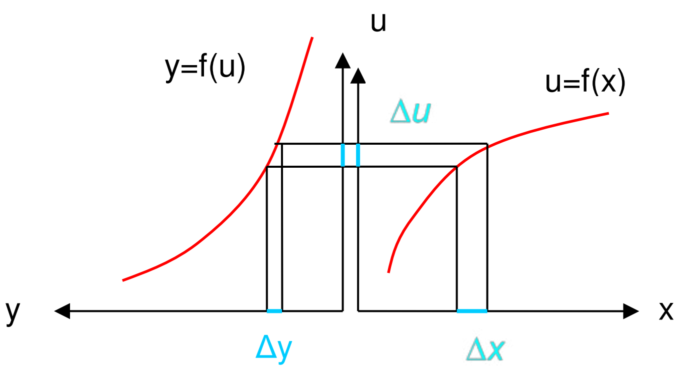
$$y = \sin\left(u\right)$$

$$u = 3 \cdot x - \pi$$

allgemein:

$$y = f\left(u\left(x\right)\right)$$

u ist also einmal unabhängige Variable, im zweiten Ausdruck abhängige Variable. Dies lässt sich in folgendem Graphen veranschaulichen:



Bildet man nun den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,
dann führt die Berechnung von Δx zunächst zur Berechnung von Δu, mit Δu kann man ein Δy berechnen. Macht man in den beiden Diagrammen Δu gleich groß, dann kann man den Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
erweitern um Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Bei der Bildung des Limes kann man das Produkt der beiden Brüche getrennt behandeln und man erhält:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Die Ableitung kann man also so durchführen:

Man ersetzt die innere Funktion zunächst durch eine Variable, nach der die äußere Funktion abgeleitet wird. anschließend wird die innere Funktion nach x abgeleitet.

Beispiele:

$$y = \left(x^2 - 3 \cdot x - 12\right)^3$$

$$u(x) = x^2 - 3 \cdot x - 12$$

$$y = u^3$$

$$y' = 3 \cdot u^2 \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$= 3 \cdot \left(x^2 - 3 \cdot x - 12\right)^2 \cdot (2 \cdot x - 3)$$

$$y = \sin(2 \cdot x + \pi)$$

$$u(x) = 2 \cdot x + \pi$$

$$y = \sin(u)$$

$$y' = \cos(u) \cdot 2 = 2 \cdot \cos(2 \cdot x + \pi)$$

$$y = \tan\left(\frac{x}{x-4}\right) = \tan(u)$$

$$y' = \left(1 + \tan^2 u\right) \cdot \frac{1 \cdot (x-4) - x \cdot 1}{(x-4)^2}$$

$$y' = \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{x-4}\right)\right) \cdot \frac{1 \cdot (x-4) - x \cdot 1}{(x-4)^2}$$

Die Kettenregel lässt sich auf tiefer geschachtelte Funktionen erweitern:

Wenn eine Funktion gegeben ist:

$$y = f\Big(u\big(v\left(w(x)\right)\big)\Big),$$

dann ist die Ableitung:

$$y' = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(w) \cdot w'(x)$$

Beispiel:

$$y = 3 \cdot \cos^3\left(x^2 - 1\right)$$

$$y' = 3 \cdot 3 \cdot \cos^2\left(x^2 - 1\right) \cdot (-1) \cdot \sin\left(x^2 - 1\right) \cdot 2 \cdot x$$

$$y' = -18 \cdot \cos^2\left(x^2 - 1\right) \cdot \sin\left(x^2 - 1\right) \cdot x$$

9. Die Ableitung implizit gegebener Funktionen

Viele Funktionen lassen sich nicht oder nur schwer nach der abhängigen Variablen (hier meist y) auflösen.

Beispiel: $\cos(x) - y \cdot \sin(y) = 0$

Mit Hilfe der Kettenregel lassen sich auch solche Ausdrücke differenzieren. Dabei ist zu beachten, dass y noch eine Funktion von x ist, also alle Ausdrücke mit y noch nach der Kettenregel abzuleiten sind.

Obiges Beispiel:

$$\cos(x) - y \cdot \sin(y) = 0$$

Der zweite Term ist ein Produkt von zwei Funktionen und wird nach der Produktregel behandelt. Die Ableitung von y ist $1 \cdot y'$, die Ableitung von

$\sin y$ ist $\cos(y) \cdot y'$

$$-\sin(x) - 1 \cdot y' \cdot \sin(y) - y \cdot \cos(y) \cdot y' = 0$$

Die Funktion kann nach y' aufgelöst werden:

$$y' = -\frac{\sin x}{\sin y - y \cdot \cos y}$$

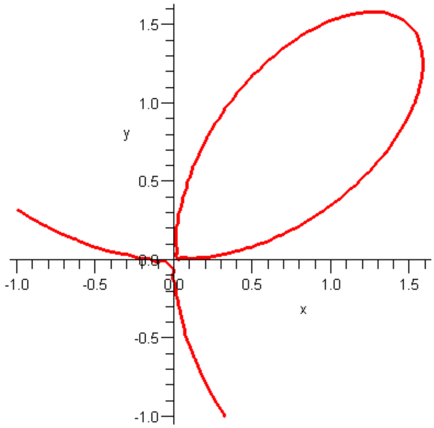
2. Beispiel kartesisches Blatt

$$x^3 + y^3 - 3 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$$

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3 \cdot a \cdot (y + x \cdot y') = 0$$

$$y' \cdot (3 \cdot y^2 - 3 \cdot a \cdot x) = 3 \cdot a \cdot y - 3 \cdot x^2$$

$$y' = \frac{3 \cdot a \cdot y - 3 \cdot x^2}{3 \cdot y^2 - 3 \cdot a \cdot x}$$



10. Potenzregel für rationale Exponenten

in $y = x^n$ soll n eine rationale Zahl der Form $\frac{p}{q}$ sein (p,q ganzzahlig),

$$\text{also} \quad y = x^{\frac{p}{q}} \qquad y^q = x^p$$

Es wird implizit abgeleitet:

$$q \cdot y^{q-1} \cdot y' = p \cdot x^{p-1}$$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

Für y wird die ursprüngliche Funktion eingesetzt:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p \cdot (q-1))}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1) - \frac{p \cdot (q-1))}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p \cdot q - q - p \cdot q + p}{q}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Die Potenzregel ist somit auch für rationale Exponenten gültig.

Beispiele:

$$y = \sqrt[4]{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

Die Funktion lässt sich darstellen als:

$$y = \left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4} \cdot \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot 2 \cdot x = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$$

11 Die Ableitung der Bogenfunktionen

Wie die Graphen der Funktionen zeigen, erhält man bei den beiden Funktionen

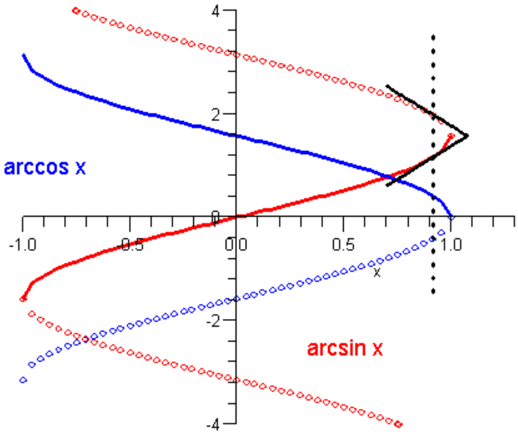
$$y = \arcsin(x) \quad \text{und} \quad y = \arccos(x)$$

keine eindeutigen Tangentenanstiegswinkel. Man muss man sich auf die Hauptwerte der Funktionen beschränken, bzw. verschiedene Lösungen für den Tangentenwinkel zulassen.

Nur bei

$$y = arc\tan(x) \quad \text{und} \quad y = arc\cot(x)$$

sind die Tangentenwinkel eindeutig.



Zur Berechnung der Ableitungen geht man von der ursprünglichen Definition der Umkehrfunktionen aus:

$$y = \arcsin(x); \qquad x = \sin(y)$$

es wird implizit differenziert:

$$1 = \cos(y) \cdot y' \qquad y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ebenso wird arccos (x) berechnet:

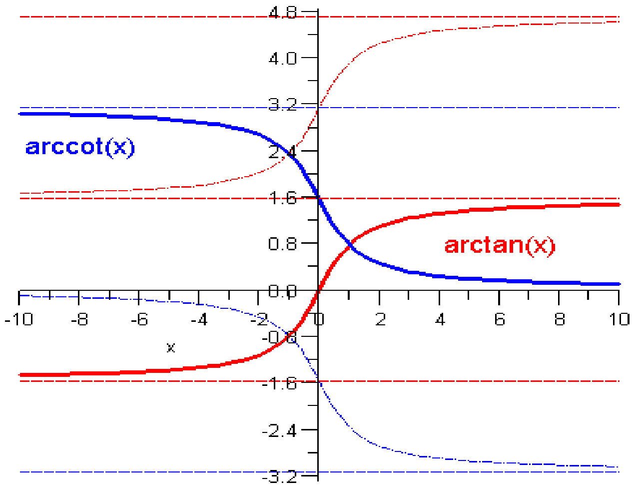
$y = \arccos(x) \qquad x = \cos(y)$

differenziert: $\qquad 1 = -\sin(y) \cdot y'$

$$y' = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$y = \arccos(x); \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

In der gleichen Weise werden die Funktionen $y = \arctan(x)$ und $arc\cot(x)$ abgeleitet:



$y = \arctan(x) \qquad x = \tan(y)$

implizit differenziert: $\quad 1 = (1+\tan^2 y) \cdot y'$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

ebenso: $y = arc\cot(x)$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Beispiele:

a. $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}$$

b. $y = \sqrt{1-\arcsin^2 x}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2 x}} \cdot (-2) \cdot \arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = -\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-\arcsin^2 x} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

12 Ableitung der Logarithmus – und Exponentialfunktion

a. $y = \log_a(x)$

Es wird der Differenzenquotient gebildet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x \cdot \dfrac{x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1+\frac{1}{\dfrac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Wenn $\Delta x \to 0$ geht, dann geht $\dfrac{x}{\Delta x} \to \infty$, das Argument des Logarithmus hat also die Form:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dieser Grenzwert ist die Zahl e.

Damit ist

$$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Falls also $\quad y = \ln(x) \quad$ ist $\; y' = \frac{1}{x}$

da $\log_e e = 1$ ist.

b. $\qquad y = a^x$

Die Funktion wird auf beiden Seiten logarithmiert (zweckmäßigerweise zur Basis e):

$$\ln y = x \cdot \ln a$$

implizite Ableitung:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \qquad y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$y' = a^x \cdot \ln a$ speziell für a = e:

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Die Ableitung der e – Funktion ist gleich der Funktion selbst.

Beispiele:

a.)

$$y = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \qquad y' = \frac{1}{\frac{1}{1-x^2}} \cdot (-1) \cdot \left(1-x^2\right)^{-2} \cdot (-2 \cdot x)$$

$$y' = \frac{2 \cdot x}{1-x^2}$$

b.) $y = 2^{\cos(x)} \quad y' = 2^{\cos(x)} \cdot \ln 2 \cdot (-\sin(x))$

c.) Potenzfunktionen mit beliebig reellen Exponenten

$$y = x^r \quad \ln y = r \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = r \cdot \frac{1}{x} \qquad y' = r \cdot y \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^r \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

Die Potenzregel gilt auch für reelle Exponenten, wie z.B. bei $y = x^{\sqrt{2}}; \quad y = x^{\ln 4}; \quad y = x^{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

13 Logarithmisches Ableiten

Zur Ableitung der Exponentialfunktion wurde zunächst logarithmiert und anschließend die implizit gegebene Funktion abgeleitet. Diese Methode lässt sich allgemein auf Funktionen der Form

$$y = u(x)^{v(x)}$$

anwenden: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

in abgekürzter Schreibweise:

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln\left(u(x)\right) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$$

$$y' = u^{v} \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$$

$$y' = u^{v-1} \cdot \left(u \cdot v' \cdot \ln u + u' \cdot v \right)$$

Beispiele:

a.

$$y = x^{x}$$

$$y' = x^{x-1} \cdot \left(x \cdot \ln x + x \right)$$

$$y' = x^{x} \cdot \left(\ln x + 1 \right)$$

b.

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-1} \cdot \left(x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot \left(1 - \ln x \right) = x^{\frac{1-2\cdot x}{x}} \cdot \left(1 - \ln x \right)$$