

Vektorrechnung Maschinenbau

Gegeben ist der Ortsvektor $a = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle Vektoren a , b und c für die alle der folgenden Bedingungen gelten:

1. a , b und c sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks
2. b steht senkrecht auf a
3. a hat die Länge 3
4. c hat die Länge 5.

Lösung:

Zuerst stelle ich die Formeln auf, die sich aus den Bedingungen ableiten:

1. Rechtwinkligkeit: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$
2. $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ -> Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
3. $|\vec{a}| = 3$, wobei $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
4. $|\vec{c}| = 5$, wobei $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$

Nun geht es an das Auflösen der Gleichungen:

- a) Berechnung der Länge/Betrag des Vektors des $|\vec{b}|$

Nach Formel (1) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

Umstellen nach $|\vec{b}|$ $|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2$

Einsetzen der Werte $|\vec{b}|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

Lösen: $|\vec{b}| = 4$

- b) Berechnung des x-Wertes des Vektors $\vec{a}$

Nach Formel (3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, wobei $a_y = 3$

Umstellen nach a_x $a_x = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_y^2}$

Einsetzen der Werte: $a_x = \sqrt{3^2 - 3^2} = \sqrt{9 - 9} = \sqrt{0} = 0$

Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Berechnung des Vektors $\vec{b}$

Nach Formel (2)

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Einsetzen der Werte und Variablen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = 0$$

Auflösen des Skalarproduktes:

$$0 * b_x + 3 * b_y = 0$$

Lösen:

$$\mathbf{b_y = 0}$$

$$\text{Vektor } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tipp: Über b_x kann man noch keine Aussage treffen, weil es sich kürzt.

d) Berechnung des x-Wertes des Vektors b_x

Nach Formel

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

Auflösen nach b_x

$$b_x = \sqrt{|\vec{b}|^2 - b_y^2}$$

Einsetzen der Werte

$$b_x = \sqrt{4^2 - 0^2} = \sqrt{4^2}$$

Lösen:

$$\mathbf{b_x = 4}$$

$$\text{Somit lautet der Vektor } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnung des Vektors $\vec{c}$

Nach der Formel

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Einsetzen der Werte^

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit lautet der Vektor } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

f) Wahlweise kann eine zeichnerische oder rechnerische Probe durchgeführt werden:

a. Rechnerisch:

Nach Bedingungen (4): $|\vec{c}| = 5$

Berechnung $|\vec{c}|$ über Formel (4) $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$ mit den berechneten Werten aus e

$$\text{Einsetzen der Werte } |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$



b. Zeichnerisch:

x-y-Koordinatensystem zeichnen und die Vektoren eintragen.